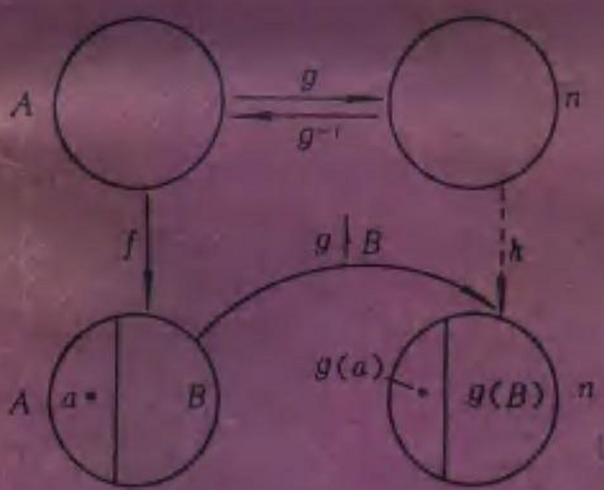
北京市高等教育自学考试用书

离散数学

（上）

陈进元　屈婉玲　编



北京市高等教育自学考试用书

离散数学

（上）

陈进元　屈婉玲　编

北京大学出版社

内容提要

本书系统地介绍了数理逻辑的基础知识和集合代数的部分内容。包括命题逻辑、集合、二元关系、函数、基数、公理集合论等。另外还附有部分习题的提示和解答。

此书适用于自学青年阅读，并且可供高等院校数学专业、计算机专业学生学习参考。

北京市高等教育自学考试用书

离散数学

（上）

陈进元　屈婉玲　编

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168毫米　32开本　8.75印张　200千字

1987年11月第一版　1987年11月第一次印刷

印数：00001—8,500册

统一书号：13209·183　定价：1.85元

前　言

为了适应社会主义现代化建设的需要，我国实行了高等教育自学考试制度。它是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种新的教育形式，是我国社会主义高等教育体系的一个组成部分。实行这种高等教育自学考试制度，是实行宪法规定的“鼓励自学成才”的重要措施，也是造就和选拔人才的一种新途径。

参照北京市计算机软件专业自学考试大纲，我们编写了《离散数学》(上、下)。它包括了大纲所要求的内容，选材较为精练，讲解较为详细，书内有大量的例题和习题，书后附有部分习题的提示或解答，便于自学参考。书中一些打有＊号的章节，其内容已超出大纲基本要求，仅作为参考材料提供给读者。

本书各部分内容安排及编者如下：

第一部分：数理逻辑(第1—7章)，陈进元编；

第二部分：集合论(第8—12章)，屈婉玲编；

第三部分：代数结构(第13—16章)，方新贵编；

第四部分：图论(第17—21章)，耿素云编。

本书分上、下两册出版。上册包括命题逻辑、谓词逻辑、集合代数、二元关系、函数、集合的基数、公理集合论系统等内容，下册包括代数系统、群、环、域、格与布尔代数、图的基本概念、欧拉图、哈密尔顿图、树、平面图等内容。

本书不仅可以作为自学教材，其内容包括了高等院校计算机软件专业本课程所要求的全部内容，因而还可作为高等院校有关专业学生学习参考。

编写这样一部自学教材对我们来说还是初次尝试，可能有不少不妥之处，恳请读者提出批评。

编　者

1986年12月于北京大学计算机系

目　　录

第一章 命题逻辑基本概念

§1 命题符号化

数理逻辑采用数学方法研究抽象思维的规律，研究的中心问题是推理，而推理的基本要素是命题。在二值逻辑①中，**命题**是指具有唯一眞值的陈述句。所谓**眞值**就是语句为眞或为假的这种性质。当一个语句为眞时，我们说它的眞值为**眞**；当一个语句为假时，我们说它的眞值为**假**。命题的眞值可简称作**命题的值**。

例1.1 判断下列语句是否为命题。

1) 您好?

2) 请勿吸烟!

3) $x+y>5$。

4) 台湾是中国的一部分。

5) 人能活到一千岁。

6) 《簪花仕女图》是唐代画家周昉作品。

7) 二十一世纪将会有人居住在太空。

此例中，1),2)两句都不是陈述句，所以不是命题。3)虽然是陈述句，但它的值要随x,y的取值而变，不唯一，因此也不是命题。4)是眞命题，5)是假命题。对于6)，有些人可能说不出它的眞假，但无论怎样，它不是眞就是假，眞值是唯一的，所以是命题。7)的眞值是什么，现在谁也说不出。不过，到了二十一世纪，一切就会清楚，因此7)的眞值仍然是唯一的，它也是个命题。

---

① 二值逻辑是指命题的真值仅有“真”、“假”两种取值的逻辑系统。本书所介绍的内容都在二值逻辑范围内。

从以上分析可以看出，判断一个语句是否为命题，首先要看它是否为陈述句，然后再看它是否具有唯一的真值——这和我们是否知道它是真还是假是两回事。

4)—7)这几个命题都是由简单句构成，即它们各自都不能再分解成其它的语句了。这种由简单句构成的命题称作**简单命题**。另外，还存在着**复合命题**，它们是由简单命题和联结词复合而成的。例如，“庐山和黄山都是祖国的风景胜地”这句话就可以看成是由简单命题“庐山是祖国的风景胜地”和“黄山是祖国的风景胜地”经用联结词“并且”复合而成的复合命题。

数理逻辑的特点是把逻辑推理变成类似数学演算的完全形式化了的逻辑演算，为此，首先要把推理所涉及到的各命题符号化。

简单命题一般用小写英文字母 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示，将符号放在它所表示的命题之前，例如：

p：青岛是个美丽的海滨城市。

q：白天鹅仅产在我国北方。

对于简单命题来说，它的真值是确定的，这样的命题又称作**命题常项**。例如上面的 p,q 都是命题常项，其中 p 的值为真，q 的值为假。另外，还有一些真值不确定的简单句，如例 1.1 中的 3)：$x+y>5$，它的值随 x,y 的取值而变，不过，每当给定 x,y 一组赋值后，它的值也就确定了，从而变成了一个简单命题。例如：$2+3>5$ 为假命题，而 $1+6>5$ 为真命题。这种真值可变化的简单句称作**命题变项**。一般也用符号 $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$ 表示命题变项。一个符号，例如 p，到底表示的是命题常项还是命题变项，一般可由上、下文确定，不会发生混淆。

我们将真值也符号化。一般用 1(或 T) 表示“真”，用 0(或 F) 表示“假”。对于一个确定的命题，它的值不是 1 就是 0，因此，我们有时也用 1 表示抽象的“真命题”，用 0 表示抽象的“假命题”。

复合命题的符号化，不仅要涉及到其中简单命题的符号化，

还要涉及到其中联结词的符号化。下面就给出几种常用的符号化的联结词及相应的复合命题的定义。

定义1.1 令 p 为命题。复合命题"非 p"（或"p 的否定"）称作 p 的**否定式**，记作 $\neg p$。符号 $\neg$ 称作**否定联结词**。$\neg p$ 真当且仅当 p 假。

例如，令 p 为"今天天气好"，则"今天天气不好"可写成 $\neg p$。

定义1.2 令 p,q 为命题。复合命题"p 并且 q"称作 p,q 的**合取式**，记作 $p\wedge q$。符号 $\wedge$ 称作**合取联结词**。$p\wedge q$ 真当且仅当 p,q 同时为真。

合取所表示的逻辑关系是 p,q 两个命题同时成立。因此，日常语言中的联结词"既…又…"，"不但…而且…"，"虽然…但是…"等，都可以符号化为 $\wedge$。例如，"小王既聪明又用功"可以写成 $p\wedge q$，，其中 p 为"小王聪明"，q 为"小王用功"。

定义1.3 令 p,q 为命题。复合命题"p 或者 q"称作 p,q 的**析取式**，记作 $p\vee q$。符号 $\vee$ 称作**析取联结词**。$p\vee q$ 为真当且仅当 p,q 至少有一个为真。

由定义可以看出，析取表示的是一种"相容或"，即允许 p,q 同时为真。例如，"他今天下午或者看书或者打球"可以写成 $p\vee q$，因为"看书"和"打球"这两件事是可以在同一个下午都做的。当然，这两件事中也可以只做一件。

然而，日常语言中的"或者…或者…"，"不是…就是…"等联结词是有二义性的，它们有时表示的是一种不相容的或，即不允许两个命题同时为真。例如"第一节课或者上数学或者上英语"，这时就不能再写成 $p\vee q$，而要采用下面定义的联结词来表示这种逻辑关系。

定义1.4 令 p,q 为命题。复合命题"p 或 q 恰有一个[1]成

---

[1] "恰有一个"是指"有一个且仅有一个"。

立”称作 p,q 的**异或式**，记作 $p \forall q$。符号 $\forall$ 称作**异或联结词**。$p \forall q$ 真当且仅当 p,q 恰有一个为真。

这样，上面的那句话“第一节课或者上数学或者上英语”就可以写成 $p \forall q$，因为数学和英语不能同时都在第一节上。

由于采用了不同的符号来表示意义不同的“或者”关系，这就排除了任何的二义性，由此体现了数理逻辑语言的精确性。

定义1.5 设 p,q 为命题。复合命题“如果 p 则 q”称作 p,q 的**蕴涵式**，记作 $p \to q$。其中又称 p 为**蕴涵式的前件**，q 为**蕴涵式的后件**。符号 $\to$ 称作**蕴涵联结词**。$p \to q$ 真当且仅当 p 真和 q 假不同时成立。

$p \to q$ 表示的基本逻辑关系是：p 是 q 的充分条件，或者说 q 是 p 的必要条件。因此，复合命题“只要 p 就 q”，“p 仅当 q”，“只有 q 才 p”等都可以写成 $p \to q$ 的形式。

从定义可以看出，$p \to q$ 只有当 p 真而 q 假时才为假。为什么这样规定呢？我们通过一个例子来说明。

例1.2 一位父亲对儿子说：“如果我去书店，就一定给你买本《儿童画报》。”问：在什么情况下父亲食言？

父亲的可能情况有如下四种：

1) 父亲去了书店，给儿子买了《儿童画报》；

2) 父亲去了书店，却没给儿子买《儿童画报》；

3) 父亲没去书店，却给儿子买了《儿童画报》；

4) 父亲没去书店，也没给儿子买《儿童画报》。

显然，1),4) 两种情况父亲都没有食言。3) 这种情况，和父亲原来的话并没有什么相抵触的地方，当然也不算食言。只有2) 这种情况，答应的事却没有做，应该算是食言了，而这种情况正好对应着使得蕴涵式为假的“前件真后件假”的条件。除此之外，其它三种情况都使得蕴涵式为真。

在日常语言中说“如果 p 则 q”，那么 p 和 q 总是有着某种内在联系的。然而，在数理逻辑中，更关心的是复合命题与其中

各简单命题之间抽象的眞值关系，而不太关心各简单命题的具体內容是什么。因此，只要各简单命题的眞值是确定的，则不管它们之间是否有內在联系，都可以由联结词组成眞值确定的复合命题。例如，下面两句话：

如果地球停止了自转，则大熊猫产在中国；

如果 2＋2＝4，则夸夸其谈可以创造财富

看起来似乎都很荒谬，然而它们都可以写成 $p \rightarrow q$ 的形式，并且由定义 1.5 可知，前一句为眞而后一句为假。

定义1.6 设 p,q 为命题。复合命题"p 当且仅当 q"称作 p,q 的**等价式**，记作 $p \leftrightarrow q$。符号 $\leftrightarrow$ 称作**等价联结词**。$p \leftrightarrow q$ 眞当且仅当 p,q 眞值相同。

等价所表示的基本逻辑关系是：p 是 q 的充分必要条件。例如："两圆面积相等当且仅当两圆半径相等"为眞的等价式，而"两角相等当且仅当它们为对顶角"是假的等价式，都可以写成 $p \leftrightarrow q$ 的形式。

以上介绍了六种常用的联结词及其相应的复合命题形式。这些联结词反映了复合命题和简单命题之间抽象的逻辑关系，即眞值关系，所以又称作**眞值联结词**。下面我们仍简称为**联结词**。

二值逻辑范围内的命题，一般都可以根据以上的定义和方法形式化，即写成符号串的形式。步骤如下：

1） 找出各简单命题，分别符号化。

2） 找出各联结词，把简单命题逐个联结起来。

例1.3 将下列命题符号化：

1） 李明是计算机系的学生，他住在312室或313室。

2） 如果我下班早，就去商店看看，除非我很累。

3） 只有一个角是直角的三角形才是直角三角形。

解 各命题的符号化如下：

1） $p \wedge (q \veebar r)$。其中，p：李明是计算机系的学生。q：他住在 312 室。r：他住在 313 室。

2) $\neg p\to(q\to r)$。其中，p：我很累。q：我下班早。r：我去商店看看。

此句中的联结词"除非"相当于"如果不…"的意思，所以第三句$\neg p$可看成$(q\to r)$成立的一个条件。

3) $\neg p\to\neg q$。其中，p：三角形的一个角是直角。q：三角形是直角三角形。

此句的形式为"只有p才q"，这里p是q的必要条件，即沒有p就一定沒有q，或者说如果有q就一定有p，因此也可以写成$q\to p$的形式。此外，由于原句并沒有说p是q的充分条件，因而不可以写成$p\to q$或$p\leftrightarrow q$的形式。

在研究推理时，如果把命题分析到简单命题为止，则这种建立在以简单命题为基本推理单位基础之上的逻辑体系，称作**命题逻辑**或**命题演算**。我们在本书前四章所介绍的都属于命题逻辑的内容。

§2　合式公式与真值函数

上节给出的六种最基本的复合命题形式$\neg p$，$p\wedge q$，$p\vee q$，$p\dot\vee q$，$p\to q$，$p\leftrightarrow q$，既可以看作是具体命题的符号化表达式，也可以看作是含有命题变项p,q的真值不唯一的**抽象命题**形式。在它们的基础之上还可以构造出更复杂的命题形式。**命题形式**给出了复合命题及其简单命题之间真值关系的逻辑骨架。

命题形式是由命题常项或变项、联结词等组成的符号串。反之，是否任何的符号串都是命题形式呢？例如$p\neg,\wedge q$？回答是否定的。为了明确什么样的符号串才是命题形式，我们给出合式公式的定义，并且规定：一个符号串是命题形式当仅且当它是合式公式。

定义1.7　**合式公式**定义如下：

1) $p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots,1,0$是合式公式。

2）如果A是合式公式，则$(\neg A)$也是。

3）如果A,B是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\veebar B)$，$(A\to B)$，$(A\leftrightarrow B)$也是。

4）只有有限次地应用1)—3)构成的符号串才是合式公式。

合式公式可以简称作**公式**。

由公式的定义可知，公式的结构可以很简单，也可以很复杂。为了描述公式结构的特点及复杂程度，我们给出公式层次的定义。

定义1.8 公式的层次定义如下：

1）称A是第0层公式是指A是$p,q,r,\cdots,p_i,q_i,r_i,\cdots$或1，0。

2）称A是第$n+1$层公式$(n\geqslant 0)$是指A符合下列情况之一：

a）$A=$①$(\neg B)$。B是第n层公式；

b）$A=(B\wedge C)$。其中B,C分别为第i层和第j层公式，且$\max(i,j)$② $=n$；

c）$A=(B\vee C)$。其中B,C层次同b)；

d）$A=(B\veebar C)$。B,C同b)；

e）$A=(B\to C)$。B,C同b)；

f）$A=(B\leftrightarrow C)$。B,C同b)。

3）称公式A是K层的，是指A的最高层次为K。

为了书写简便，我们约定：公式$(\neg A)$的括号及任一公式最外层括号都可以省略。

在以上两个定义中，我们引进了A,B,C这几个符号，它们表示的是任意的公式，而不是某个具体的公式，这些符号称作**元语言符号**。而符号p,q，$p\to q$等表示的是具体的命题形式即具体的公式，称它们为对象语言符号。所谓**对象语言**是指用来描述研究对象(此处是命题逻辑)的语言，而**元语言**是指用来描述对象语

① 这里使用的符号=，意义同数学中惯常用法，不再另给定义，下同。

② $\max(i,j)=n$是指i,j中较大的那个值为n，下同。

言的语言，它们是不同研究层次上的语言。

对于含有命题变项的命题形式，只有对它的每个命题变项指定确定的真值之后，命题形式的值才能确定。

定义1.9 令 A 为命题形式，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在 A 中的所有命题变项。给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 指定一组真值，称作对 A 的一个**赋值**。

定义1.10 命题形式 A 在其所有可能的赋值下取得的值列成的表，称作 A 的**真值表**。

构造真值表的步骤如下：

1）找出给定命题形式中所有的命题变项 $p_1,p_2,\cdots,p_n(n\geqslant 1)$。列出所有可能的赋值。对于有 n 个命题变项的命题形式来说，不同的赋值有 2^n 个。

2）按照从低到高的顺序写出命题形式的各层次。

3）对应每个赋值，计算命题形式各层次的值，直到最后计算出整个命题形式的值。

例1.4 命题形式 $p\vee(q\wedge\neg r)$ 的真值表如表1.1.从表1.1可

表 1.1

p q r	$\neg r$	$q\wedge\neg r$	$p\vee(q\wedge\neg r)$
0 0 0	1	0	0
0 0 1	0	0	0
0 1 0	1	1	1
0 1 1	0	0	0
1 0 0	1	0	1
1 0 1	0	0	1
1 1 0	1	1	1
1 1 1	0	0	1

以看出，$p\vee(q\wedge\neg r)$ 的值有时真有时假。有的命题形式，如

$p\vee\neg p$，对于所有的赋值都为真；而有的命题形式，如$p\wedge\neg p$，对于所有的赋值都为假。

定义1.11 命题形式A称作**重言式（或永真式）**，是指在每个赋值下它都真；命题形式A称作**矛盾式（或不可满足式）**，是指在每个赋值下它都假；命题形式A称作**可满足式**，是指至少有一个赋值使得它为真。

从真值的角度来看，命题形式可分为三类：重言式，矛盾式和可满足式。其中重言式尤为重要，因为命题逻辑形式系统中的公理、定理都是重言式。另外，在自然推理中，一个正确推理的形式结构也必须是重言式，这些，我们将在后面陆续介绍。

命题形式的数目是无穷多的。不过，在命题变项数目确定之后，真值不相同的命题形式的个数却是有限的。例如，$p\to q$ 和 $\neg p\vee q$ 就是真值相同的命题形式，虽然它们的“形式”不相同。

定义1.12 一个 n **元真值函数**是指$F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$，（$n\geqslant 1$），即此函数以 n 个命题变项为变元，其定义域和值域均由真、假两值构成。

对于 n 个命题变项，可能的赋值有 2^n 个。对于每个赋值，真值函数的取值又有真、假两种可能。因此，对于 n 个命题变项来说，它们可以构成的不同的真值函数有 2^{2^n} 个。

例1.4

1）含有 1 个命题变项 p 的不同的真值函数如表 1.2，其中

表 1.2

p	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$F_i(1\leqslant i\leqslant 4)$即为含有 1 个命题变项 p 的真值函数。每个 F_i 都可以用命题形式表示出来。例如，F_1 可以写成 $p\wedge\neg p$，F_2 可以写成 p，F_3 为$\neg p$，F_4 为 $p\vee\neg p$。事实上，每个真值函数都可以用

无穷多种命题形式表示。例如，F_1 可以写成 $p\wedge\neg p, p\wedge(p\wedge\neg p), (p\vee p)\wedge\neg p, (p\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg p), \cdots$ 等多种形式。

2）含有 2 个命题变项 p,q 的真值函数如表 1.3。在表1.3

表 1.3

p	q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

中，含有 2 个命题变项的真值函数有 16 种。其中 F_1 为矛盾式，F_{16} 为重言式，其它的都是可满足式。进一步分析可以发现：F_2 对应合取关系，可写成 $p\wedge q$；F_8 对应析取关系，可写成 $p\vee q$；F_7 对应异或关系，可写成 $p\overline{\vee}q$；而 F_{10}, F_{14} 则分别对应等价关系和蕴涵关系。

对于任一给定的命题形式，判断它是重言式还是矛盾式，还是可满足式，这样的问题称作**判定问题**。在命题逻辑中，由于对任一给定的命题形式，总可以在有限步内构造出它的真值表，确定它的类型，因此，判定问题是可解的。

习 题 一

1．判断下列语句是否为命题。