

〔苏〕A·H 吉洪诺夫 И·И 科斯托马罗夫 著

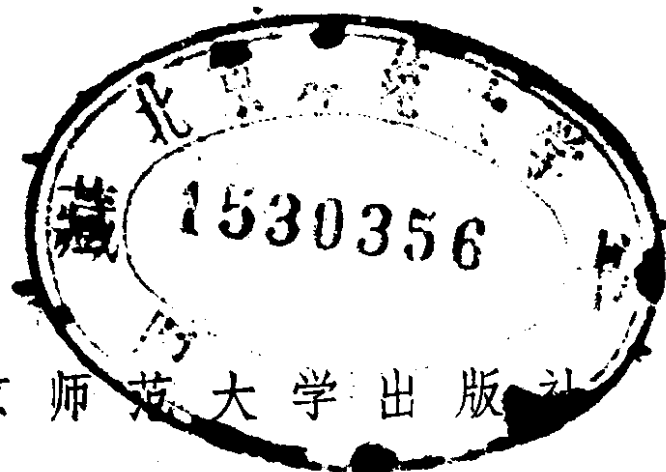
郑宏业 孔宪志 熊汉斌 译

现代应用数学基础

北京师范大学出版社

现代应用数学基础

【苏】A·H·吉洪诺夫 著
Д·П·科斯托马罗夫
郑宏业 孔宪志 熊汉斌 译



北京师范大学出版社

现代应用数学基础

[苏] A·H·吉洪诺夫 著
Д·П·科斯托马罗夫

郑宏业 孔宪志 熊汉斌 译

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

天津黎明印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张: 6.625 字数: 139千

1985年12月第1版 1986年12月第1次印刷

印数: 1—10,000

统一书号: 13243·119 定价: 1.00元

А.Н.ТИХОНОВ Д.П.КОСТОМАРОВ

**РАССКАЗЫ
О ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКЕ**

7410/1-2

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 9 7 9

内 容 提 要

本书以通俗的方式阐述了现代应用数学基础知识，重点放在构造研究对象的数学模型、计算算法和电子计算机等应用数学的三个基本方面，同时也深入浅出地介绍了方程的数值解法、最优化问题、线性规划、定积分及其数值解法以及微分方程等几个较为专门的应用数学问题。各章都从实际出发，从中学数学(包括微积分初步)中的内容入手，提出相应的应用数学问题，介绍数学模型的建立，描述问题的各种解法，并对不同解法加以比较，作出评价。

本书可供大中学生课外阅读，也可供数学教师参考。对于希望了解什么是应用数学以及数学如何应用的人，本书也是良好的读物。

前 言

二十世纪中叶电子计算机的创造，在某种意义上可与蒸汽机的发明、电的利用相媲美。然而，在人类这些最伟大的成就中，电子计算机却占有独特的地位：如果说普通的机器扩大了人的体力，那么，电子计算机则大大地提高了人的智能。数学方法和电子计算机的广泛应用为提高劳动生产率，进一步发展生产，改善管理开辟了新的途径。电子计算机为认识现实世界的规律并将其运用到人们的实践活动中去提供了行之有效的方法。

科学、技术、经济的数学化进程要求造就高度熟练的专门人才，他们能将计算机所提供的，直到现在远未完结的巨大可能性付诸实现。没有人的指导作用，计算机是不能工作的。运用计算机与构造所研究对象的数学模型和建立计算算法有关。计算机也应受到相应的“训练”，即为其装备通用和专用软件。

所有这些广泛问题的总体，都是应用数学专门人才的活动领域。为了造就这样的人才，许多大学都创办了专门的系、专业和教研室。

然而，在今天，除专业计算人员要用计算机外，还有其他方面的专家：工程师、物理学家、化学家和社会学家等等也都要用计算机。今后，能在自己生产实践领域里成功地运用数学方法和使用计算机的人员还要大大增加。

这正是作者编写此书的理由。书中以通俗的形式讲述了

现代应用数学以及应用数学方法和计算机研究在实际问题中碰到的现实的“非数学”问题的特征。

本书前三章介绍应用数学的三个基本部分：数学模型、计算算法和电子计算机。以后各章带有较为专门的性质：那里剖析了典型的应用数学问题并描述了它们的解法。每个题目的叙述都从包含在中学大纲里的问题开始，不过，问题的提法变换了角度，使之易于转化为应用数学的现实问题。

在第三章的编写中，Л.Н.科罗列夫 (Л.Н.Королев) 和Р.Л.斯米杨斯基 (Р.Л.Смелянский) 给予作者很大帮助。Н.Н.叶菲莫夫 (Н.Н.Ефимов) 对第一章，В.Г.卡尔马诺夫 (В.Г.Карманов) 对第六章都提出了一系列重要的意见和建议。对此，作者表示诚挚的谢意。

国立莫斯科大学计算数学与控制论系

院士 А.Н. 吉洪诺夫

教授 Д.П. 科斯托马罗夫

目 录

序言 科学技术的进步与数学	(1)
第一章 数学模型	(6)
§ 1 如果已知	(6)
§ 2 数学模型与研究对象相符合 实践的标准	(9)
§ 3 数学模型的发展和精确化	(13)
第二章 计算的算法	(25)
§ 1 算法的概念	(25)
§ 2 求平方根的算法	(28)
§ 3 数 π 及其计算	(37)
第三章 电子计算机	(47)
§ 1 从十个手指到电子计算机	(47)
§ 2 电子计算机是怎样工作的	(50)
§ 3 电子计算机的分期和人与计算机的交往问题	(57)
§ 4 电子计算机的应用	(70)
第四章 方程的数值解法	(75)
§ 1 公式法解方程仅是特例并非常规	(75)
§ 2 方程的定性研究 连续函数的根的存在定理	(77)
§ 3 夹叉法 (等分法)	(81)
§ 4 迭代法 (逐项逼近法)	(87)
§ 5 切线法 (牛顿法)	(92)
§ 6 结束语	(97)
第五章 最优化问题	(100)
§ 1 “最好的罐头”问题	(101)

§ 2	一维最优化问题	(104)
§ 3	一维最优化问题 (续)	(107)
§ 4	偏导数及多元函数的梯度	(113)
§ 5	多维最优化问题	(116)
第六章	线性规划	(125)
§ 1	假如我是经理	(125)
§ 2	线性规划问题的数学提法	(134)
§ 3	单纯形法	(139)
§ 4	重新回到“椅子”问题	(142)
第七章	定积分 数值积分	(147)
§ 1	怎样计算非匀速运动的路程和变力所作的功	(147)
§ 2	牛顿—莱布尼兹公式	(151)
§ 3	定积分的概念	(152)
§ 4	单调函数的可积性	(154)
§ 5	数值积分的算法	(161)
第八章	微分方程	(172)
§ 1	关于探照灯的镜面 摆的振动问题以及某些其它 问题	(172)
§ 2	一阶微分方程	(177)
§ 3	欧拉折线法	(182)
§ 4	高阶微分方程和微分方程组	(188)
§ 5	关于单摆振动问题	(190)
§ 6	考虑空气阻力时炮弹轨道的计算	(194)
§ 7	怎样向月球发射宇宙飞船	(196)

序 言

科学技术的进步与数学

数学方法和电子计算机在人类活动的各个领域内的广泛应用是我们时代的一个重要特征。诸如“电子计算机诊断”、“设计师的合作者”这样的标题，不时地出现在当今的报纸上。五十年代，在电子计算机出现并迅速完善以后，科学技术以及国民经济的数学化进程有了蓬勃发展，于是，现代应用数学便应运而生，它包括了与运用数学方法和计算技术有关的各种问题。在苏共二十四、二十五次代表大会的决议中，对于这一科学发展方向给予了高度重视。二十五大决议提出，苏联科学的一个极为重要的任务就是“扩大理论数学和应用数学的研究，发展旨在创立和有效地应用电子计算技术于国民经济的科学工作”。

本书的目的是以通俗的形式向广大读者，特别是青年学生讲述应用数学，探讨运用数学方法和计算技术去研究自然规律及人类实践活动的思想、方法和困难。

数学是最古老的科学之一。早在人类文明的初期，数学就在实践需要的影响下开始萌芽。建筑、土地面积的丈量、航海、货物的计数以及国家的管理都需要会进行算术运算并掌握一定的几何知识。后来，数学发展为严密的逻辑体系，成为科学知识整体的一个组成部分。自然科学、技术以及人类的一切实践活动常常对数学提出新的问题，并刺激数学的

发展。反过来，数学的进步又创造出更加有效的数学方法，并扩大了它的应用范围，从而进一步促进整个科学技术的发展。

在人类活动的不同领域和不同时期里，数学的作用具有质的差别。这是历史所造成的，而起决定作用的因素则是数学工具的发展水平和关于被研究对象的知识的成熟程度，即用数学概念和方程的语言描述所研究对象的最本质的特征和性质的能力，或如现在所说，作出所研究对象的“数学模型”的能力。

数学模型来自于对被研究对象的某种简化和理想化，它不能等同于对象本身，而只是对象的一种近似反映。然而，正是由于用了与之相适应的模型去代替实际的对象，才有可能把所研究的问题表述为数学问题，并使用与对象的具体性质完全无关的、万能的数学工具去分析处理。数学能够统一地描写范围广泛的事实与观测，并对它们进行详细地数量分析，预告在各种不同条件下对象本身的性状，即预报未来的观测结果。须知，预告一向是一个困难的问题，而一个正确的预告对于任何科学来说都是一件引以为荣的事情。

由于研究对象可能非常复杂，所以，构造和研究数学模型也就非常复杂。数学方法早就成功地应用到力学、物理学、天文学等这些研究物质运动的最简单形式的科学中去了，数学成了这部分“精确”科学的语言。在技术中，数学也起着相当大的作用。直到不久以前，能广泛地应用数学方法的范围也还仅限于此。然而，计算机的出现却使这种情况发生了根本的改变。这是因为：在数学中常常会碰到一些问题，它们的解（即未知量）不能用含有已知量的公式表出。

这时，我们说这些问题没有显式解。为了解这样的问题，就要尽量去找一个收敛于所求答案的无限过程。如果这样的过程已经指出，那么，执行了一定步数之后停止运算（当然不可能无限地持续下去），我们便得到了问题的近似解。这种程序与按照严格确定的规则系统执行运算有关，而这个规则系统由过程的特征所确定，称这一规则系统为算法。

解决数学问题的这种方法，还在计算机出现以前就已经知道，只是由于计算量太大而很少使用。当勒威耶在书桌上靠“笔尖”发现了新的行星（海王星），并根据天王星轨道的摄动计算出这颗新星的轨道之后，这一科学功绩便永久地载入了科学史册。然而，在大多数情况下，研究者却极力避免大量的计算。因此，对于不能给出公式解的复杂的数学模型，或者不去研究，或者用补充假设的方法加以简化。简化模型降低了模型与所研究对象相适应的程度，关于研究对象所得到的结果不那么精确，甚至会导致错误，因而也不大受欢迎。

一个有经验的计算员，每进行一次算术运算平均要用半分钟，而现代电子计算机每秒钟能完成几百万次运算。这样，在不长的时间里，仅三十年来，就因计算机而使运算速度提高了近一亿倍。这样的飞跃，在人类的全部历史中，在人类活动的任何领域里，都是空前的。

由于计算机的使用，允许人们对数学问题进行详尽的分析，因而数值方法的运用范围也从本质上扩大了。现在，在构造某个对象的数学模型时，研究者已经无需像以前那样为得到显式解而对问题进行简化了，他的注意力主要应放到正确地估计被研究对象的最本质的特征，并把这些特征反映到

数学模型上去。模型做出以后，就要制定解决相应数学问题的算法并实现上机运算。因此，计算机从研究方法上改变了数学应用的途径，使许多早已形成的数学方向发生了改变，同时又发展了一系列新的方向。今天，计算机已经成为科学技术进步的决定性因素之一。计算机的使用可以加速国民经济主要部门的发展，从原则上为大大缩短复杂系统设计的研制和投产时间提供了新的可能性，保证优选生产操作过程的最佳方式以及创造改善管理和提高劳动生产率的条件。如果说普通的机器在生产劳动中代替了人的体力功能并使之更强大了的话，那么，计算机则帮助了人的思维，并使之更加聪明。计算机是把科学变成我们社会的直接生产力的一个重要因素。没有计算机，现代许多巨大的科学技术方案（宇宙研究、原子动力学、超音速航行等等）根本无法实现。

电子计算机不仅使现代自然科学迅速地数学化，而且使社会科学迅速地数学化。在经济领域应用数学方法具有重要意义。数学模型开始广泛地应用于化学、地质学、生物学、医学、心理学、语言学，有效地使用计算机开发出了巨大的可能性，培养能把这种可能性变成现实性的熟练干部的工作受到了高度重视。许多大学和学院都创办了应用数学系或计算数学系。马克思的下述观点无疑是正确的，用拉法格的话来说就是：“一种科学，只有在它成功地运用数学时，才算达到了尽善尽美的地步”。

最后，我们扼要地说明本书的梗概。前三章介绍了应用数学的三个基本部分：数学模型、计算算法和电子计算机。这几章给出了有关现代应用数学的一般概念。

其后各章带有较为专门的特点，那里剖析了应用数学的

各种典型问题及其解法。各章彼此独立，可按任何次序来学（但必须先读完前三章）。不过，我们认为本书所选择的顺序符合先易后难的原则，是比较自然的。

每章的叙述都是从大家所熟悉的，并在某种程度上包括在中学数学大纲中的那些问题开始的，只是变换了提法的角度，使之易于由教科书中的问题转化为应用数学的实际问题。

当然，本书不能包括应用数学的一切方面，这一方面是受篇幅的限制，另一方面也考虑到本书是以熟悉中学大纲范围的数学的读者为对象的。在选择材料时，由于作者的职业兴趣，主观因素起了一定作用。特别是书中对电子计算机的讲述就非常简略，而程序设计问题实际上还没涉及。这些题目还可以单独成书。

我们希望本书能引起读者对数学及其广泛应用的兴趣，帮助你们用新观点去理解当前在学校中学习的那些范围十分广泛的数学思想和概念，学会更好地把这些知识运用到实践中去。我们也估计到你们之中会有一些人希望成为这个非常有趣的领域中的专家。莫斯科大学计算数学和控制论系以及我国其他许多院校同类的系都在期待着你们，欢迎你们。

第一章 数学模型

§ 1 如果已知……

在叙述定理和数学问题的条件时，通常总是明显或不明显地以这类词语开头，然后就用严格定义的数学概念的语言把初始前提完整地表述出来。任何一个数学家，只要他是相应领域的行家，就都会对这种表述取得完全一致的理解。

应用问题的情形就不同了。在应用问题中，直接给出的是现实的“非数学”的对象：自然现象，生产过程，机构，管理系统，经济计划等等。在研究工作开始的时候，要把研究对象形式化，做出相应的数学模型，即抽出研究的本质特征和性质，并用数学方程加以刻画。只有在做出数学模型，即给问题以数学形式表述之后，我们才能用数学方法对它进行研究。

数学模型这个术语，虽然以前可能还没碰到过，但大家对它并不陌生。比方说，我们要确定房间的面积，或者更准确地说是房间地板的面积。为完成这个任务，就要测量房间的长和宽，并把所得的数乘起来。这个基本程序实际上是用抽象的数学模型（矩形）去代替实际的对象（房间的地板）。矩形被测量出的长与宽代替，而矩形的面积则近似地当作所求地板的面积。

再回想一下物理学中的问题。在这类问题中，通常总是

给定某个物理系统及其所处的条件，这时，我们就应当对这个物理系统做出可能的理想化假设（例如，把某一实物看作质点），选择在研究这个问题时必须注意到的物理定律，并将它们写成数学方程的形式。这就是所研究的物理系统的数学模型。

作为例子，我们讨论下面的力学问题。假使地球上的物体具有初速度 v_0 、其方向与地面成 α 角，求物体的运动轨迹，并计算起点到终点的距离。

为使问题比较具体，我们假定所说的物体就是由弹射器抛出的石块。这就明确了物体的大小、重量和可能的初速度。对于给定的情形，我们做出基于下述假定的数学模型：

- 1) 地球——惯性参考系统；
- 2) 自由落体的加速度 g 为常量；
- 3) 地球的曲率可以忽略不计，把地面看作平面；
- 4) 空气对石块运动的影响可以忽略不计。

这里仅列举了几条最重要的假设，涉及太多会偏离我们的目标。

引进坐标系：原点设在弹射器处， x 轴指向石块运动的水平方向， y 轴垂直向上。在所作的假设下，石块将沿 x 轴匀速运动，其速度为 $v_x = v_0 \cos \alpha$ 。在垂直方向上，石块以加速度 $a_y = -g$ ，初速度 $v_y = v_0 \sin \alpha$ 作匀加速运动。于是，石块运动的特征由公式：

$$x = t v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$y = t v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

确定。这些公式给出了问题在假设 1) —— 4) 下的数学模

型。

这样得到的模型非常简单，同时，用它很容易求出所给问题的答案。由公式(1)，以横坐标 x 表示 t ：

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha},$$

将其代入(2)式，就得到石块的轨迹方程：

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (3)$$

它代表了一条抛物线（参看图1）。这条抛物线与 x 轴交于两

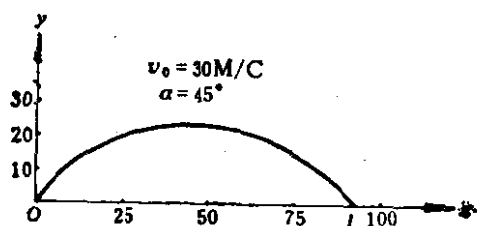


图1 石块运动的抛物线轨迹

点： $x=0$ 和 $x=l$ ，这里：

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (4)$$

第一点是轨迹的起点，石块由弹射器从这里抛出。第二点对应于石块在地球上的落点。在所采用的模型范围内，公式(4)确定了所求距离 l 。这个公式是大家所熟悉的，在八年级的物理教材中就导出并详细地讨论过这个公式。

在实际问题中，建立数学模型是整个工作最复杂和最重要的阶段之一。经验证明，在许多情况下，正确地选择模型意味着问题解决了一大半。这个阶段的困难是要把数学和专门知识结合起来。在解物理课本习题时，你们既当物理学