电磁理论中的并矢格林函数

戴振铎 鲁述 著

本书研究电磁理论中的并矢格林函数方法、基本理论及其在矩形、圆柱、劈、圆球、圆锥等典型边界和平面分层媒质、不均匀媒质、运动媒质等电磁场问题中的应用。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY
武汉大学出版社

电磁理论中的并矢格林函数

戴振铎　鲁　述　著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁理论中的并矢格林函数/戴振铎,鲁述著. —武汉:武汉大学出版社,1995.11

ISBN 7-307-02128-5(平)

ISBN 7-307-02129-3(精)

Ⅰ. 电…

Ⅱ. ①戴… ②鲁…

Ⅲ. 电磁理论—并矢格林函数 ②电磁场—边值问题

Ⅳ. O 441.4 O 451

武汉大学出版社出版

(430072 武昌 珞珈山)

湖北省京山县印刷厂印刷

(431800 湖北省京山县新市京源大道58号)

新华书店湖北发行所发行

1995年11月第1版 1996年12月第2次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:11.75 插页:5

字数:301千字 印数:5201—7200(内含精装200册)

ISBN 7-307-02128-5/O·157 定价:13.40元(平)

ISBN 7-307-02129-3/O·158 定价:19.40元(精)

格林函数一负

前　言

在求解电磁理论中各类边值问题时，并矢格林函数方法是一种有效的方法. 我在这方面的第一本专著是在 1971 年由国际教科书出版公司出版的. 在那本书中，有几个问题处理得不适当. 例如，关于并矢格林函数的分类，以及在各类并矢格林函数的本征函数展开中奇异项的遗漏. 作为一本经常为学术界所引用的书籍，有必要进行再版，第二版于 1994 年完成，并由电机电子工程学会印刷局出版.

在第二版完成之前，我还写了一本矢量和并矢分析方面的新书，并在 1992 年由电机电子工程学会印刷局出版. 书中介绍了表示散度及旋度的两个新算符. 但是，由于墨守原来的吉布斯符号，在那本书中我没有采用新的算符. 那本书出版之后，从一些非常认真的读者的反应可以清楚地看到，我们早就应该使用新的算子符号，那样将有助于消除以往在矢量分析中的混淆和习染. 目前，我正在准备该书的第二版，以完成这项使命.

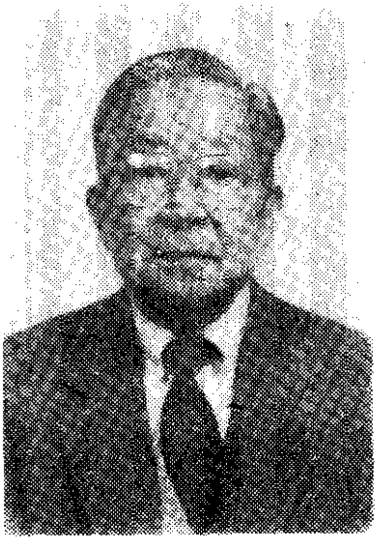
我在编写并矢格林函数专著第二版(英文版)时，曾想出版一本这方面的中文专著，以飨国内的青年学者. 武汉大学鲁述教授和他的同事们也有这种建议. 后来，我们决定出版现在的这一本书. 与英文版相比，除在内容上有所扩展，在编排上试图更适合国内的读者之外，这本书最主要的特点是采用了我提出的矢量分析的新算符. 我以为新算符的使用对于以后的学生的电磁理论及相关学科的学习将是非常有益的，为了方便读者、本书专门用一节的篇幅介绍新的符号矢量方法.

参加本书编著工作的还有武汉大学鲁述、徐鹏根、孙霞宇、柯亨玉和中国科学院电子所宋文淼研究员．武汉大学出版社史新奎副总编为本书的出版做了大量工作．我非常高兴和他们一起在相当短的时间内完成本书的出版．

戴振铎

一九九五年六月

于密执安大学



戴振铎 男，1915年12月生，江苏省吴县人。1937年清华大学毕业，1944年在美国哈佛大学获硕士学位，1947年在哈佛大学获博士学位并留校任研究员。历任斯坦福研究院高级研究工程师，巴西航空工程学院教授，俄亥俄州立大学教授，瑞典皇家工学院教授，日本东北大学访问教授，美国天线与电波传播学会主席。1964年后一直任密执安大学教授。现为美国电机电子工程学会终身会士，密执安大学荣休教授。长期致力于天线理论、电磁理论和应用数学方面的研究，有大量学术著述。曾获密执安大学杰出成就奖、美国电机电子工程学会百年奖、天线与电波传播学会杰出成就奖等。

鲁述　男，1934年11月生，湖南省宁乡县人。1958年武汉大学物理系毕业，留校任教，1988年任教授，1984—1986年在加拿大马尼托巴大学任访问教授。长期从事电磁场理论、电磁散射、天线等领域的教学和科研工作，著有专著二本，论文数十篇，曾获国家教委科技进步二等奖、航天工业部科技进步二等奖等多项奖励。

目　　录

第一章　电磁理论基础

历史上，麦克斯韦的电磁理论是根据当时已有的基本实验定律创立的，他的主要贡献是引入了位移电流项，修改了安培定律，使其符合电流连续性方程和高斯定律.本章不准备按照原来的历史发展过程来叙述这个理论，我们的叙述将着重于区别麦克斯韦方程组中的独立方程与非独立方程，并了解限定形式不同于非限定形式的重要意义.另外，还将用旋度定理导出电场和磁场的边界条件，并温习一下以后各章所需的基础知识.

本书关于矢量分析的内容都采用戴振铎教授提出的“符号矢量”方法.为了让读者对“符号矢量方法”的意义有所了解，并作为以后各章所需矢量分析知识的基础，本章将首先介绍电磁理论中的“符号矢量”方法，这一方法可用于任何工程学科和物理学科.

§1.1　电磁理论中的“符号矢量”方法

矢量场论在电磁理论的教学和研究中是最基本的数学工具.1873年，当麦克斯韦的名著《电磁理论》发表的时候[1]，他只在著作中部分地采用哈密顿于1843年建立的四元数论表达方式，并引入哈密顿算子∇以表达场的聚度(散度的负值)和旋度.在麦克斯韦的理论形成若干年后，矢量场论开始发展起来，其中吉布斯和海维赛作了开创性的工作[2~3].他们的理论脱离了四元数论的思想和表述方式，奠定了矢量分析的基础.由于矢量在物理上的直观

性以及矢量分析在数学表述上的简洁明晰，使得矢量场论在物理学的各个分支均得到广泛应用，几乎凡是涉及到场的学科都要用到矢量分析，故而有关这门学科的书籍很多.从矢量分析建立至今的一百多年中，各种文字和版本的书已不下百种.一般认为矢量分析已是一门成熟了的学科，因为像梯度、散度和旋度等基本函数定义明确，高斯定理、斯托克斯定理等基本定理已经建立，其基本公式也都正确且有表可查.但是实际上，矢量分析这门学科中还有不少问题有待揭示和解决.因为在绝大多数情况下，其基本函数和基本定理以及运算都是通过▽算子及其与其它算子的组合表达的.而对于▽算子的运算法，电磁理论以及数学书籍中都难以找到系统的阐述和严格的论证，几乎所有的书籍和叙述都是在▽算子现有含义(海维赛和威尔逊[4]等最初所赋予的含义)下写成的，从而导致▽算子在运算中出现许多矛盾和错误.历史上有不少数学家和物理学家也发现了其中的一些矛盾和错误，并在符号运算法上作过努力，如美国数学家穆恩和斯宾塞[5]发现“虽然▽可以流利地处理矢量分析这门学科，但因为它经常给出不正确的结果，是一个不可靠的工具”，他们在著作中用文字叙述方式取代用▽算子方式表达散度和旋度；又如中国著名数学家华罗庚[6]、前苏联著名数学家希洛夫[7]、柯青[8]等都在符号运算法则上作过努力，但没有能系统解决这一问题.

戴振铎教授对矢量场论作了全面的历史回顾，指出了至今仍存在于矢量分析中的混淆和错误，找到了产生错误的根源，并通过“符号矢量”方法，系统全面地建立起一套完善的矢量场的符号运算理论，澄清了矢量分析学科中长期存在的问题[9~12].

1.1.1 ▽ 算子理论中的问题

众所周知，在笛卡儿坐标系中，▽ 算子的定义如下

$$\nabla=\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.1}$$

式中 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 代表沿三个正交坐标轴方向上的单位矢量，若用 x_1、x_2、x_3 取代坐标变量 x、y、z，用 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$ 取代单位矢量 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$，则上式可表为

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.2}$$

在目前通用的矢量分析中，都是利用上述 ∇ 算子表述矢量场的散度和旋度的，表达形式如下：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i \times \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}. \tag{1.4}$$

在上述表示及演算中，首先是认为矢量的散度和旋度是算符 ∇ 与矢量形式的点乘(FSP)和形式的叉乘(FVP)，从以后的讨论可知这是错误的；其次，“$\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot$”和“$\frac{\partial}{\partial x_i}\times$”都是没有意义的算符组合. 此外，认为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 是标量算子，因而可以越过点乘和叉乘符号，直接作用于矢量之上，这一步骤是没有理论根据的，因为数学上不存在 $\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot=\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_i}\times=\times\frac{\partial}{\partial x_i}$ 这样的命题.

笛卡儿坐标系中上述表示方式所造成的错误过去无人指出，以为结果没有问题. 实际上，结果是凑出来的，不是经推算而得到的. 如果这个错误很明显，则将散度和旋度看成是 ∇ 与矢量的点乘和叉乘的概念也不会流传如此之久. 但是，当散度和旋度在其它坐标系中用 ∇ 算符表达时，这种概念造成的错误便会逐渐暴露出来. 众所周知，从物理意义上讲，矢量的散度和旋度是不依赖于坐标系的选择的，算符“∇”和矢量符号“$\boldsymbol{F}$”的形式可用于任何坐标系中. 也就是说，如果 FSP 和 FVP 的概念正确，那么在任何坐标系中都可以将矢量的散度和旋度表示成算子 ∇ 和矢量 $\boldsymbol{F}$ 之间的点乘和叉乘.

在正交坐标系中，假定矢量的散度是一个点积，则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \left(\sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial v_i} \right) \cdot \boldsymbol{F} = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial F_i}{\partial v_i}. \tag{1.5a}$$

式中，$\nabla = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial v_i}$. (1.5b)

h_i 是度量系数，$\hat{u}_i$ 是 i 坐标轴上的单位矢量，v_i 是相应的坐标变量. 对于球坐标系，$\hat{u}_i = (\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\varphi)$，$v_i = (r, \theta, \varphi)$，$h_i = (1, r, r\sin\theta)$，则 ∇ 算符与矢量 $\boldsymbol{F}$ 的点乘积(标量积)为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial r}(F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\varphi). \tag{1.6}$$

而球坐标系中矢量 $\boldsymbol{F}$ 的散度用正确的方法求得为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\varphi). \tag{1.7}$$

显然，$\nabla \cdot \boldsymbol{F} \neq \mathrm{div}\boldsymbol{F}$. 同样的运算也可说明 $\nabla \times \boldsymbol{F} \neq \mathrm{rot}\boldsymbol{F}$. 莫尔斯等[13]在寻求正交曲线坐标系中散度和旋度算子的微分表达式时发现，若要用点乘和叉乘表达散度和旋度，则在正交曲线坐标系中，同一个算符 ∇ 表示梯度和散度，必须具有不同的形式，才能得到正确的结果. 即

$$\nabla = \sum_i \frac{\hat{u}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial v_i} \quad \text{(对于梯度)}, \tag{1.8a}$$

$$\nabla = \sum_i \frac{1}{\Omega} \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i} \right) \quad \text{(对于散度)}. \tag{1.8b}$$

式中 $\Omega = h_1 h_2 h_3$. 而且要按下述计算步骤才能得到正确的散度结果，即

$$\left[\frac{1}{\Omega} \sum_i \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i} \right) \right] \cdot \boldsymbol{F} \to \frac{1}{\Omega} \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i} \hat{u}_i \cdot \boldsymbol{F} \right).$$

上述这些现象说明，不能用 ∇ 算符的同一形式(1.8a)式而只能用由公式(1.8b)表示的另一形式，而且还要加上没有根据的规则才能得到散度表达式的正确结果. 更不可思议的是，根本找不到适合于正交曲线坐标系中旋度的 ∇ 算子表达式. 此外，按 FSP 和

FVP 的概念，还要对含 ∇ 的表达式规定一些运算方法和规则，用以推导和证明矢量恒等式或作必要的运算．可是，问题在于通过这些运算虽然有时可以得到正确结果，但这不等于从数学上证明了这些运算规则的正确性，而且有时会出现错误结果．下面的例子就可说明这一问题：

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \\
&= (\nabla \cdot \boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A}_c - (\nabla \cdot \boldsymbol{A}_c)\boldsymbol{B} \\
&\quad - (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_c.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

式中下标 c 是表示该矢量对算子而言是常矢量．

上面第一步运算是把 ∇ 看成矢量，利用矢量恒等式得到；第二步是把 ∇ 看成微分符号，根据两函数乘积的微分法则得出．从所得结果看，$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$ 不是 $(\mathrm{div}\boldsymbol{B})A$ 而是 $(\nabla \cdot \boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A} + (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A}_c$．其次，按规定 $\boldsymbol{B}_c$ 是常矢量，那么 $\nabla \cdot \boldsymbol{B}_c = 0$，结果是错误的．在传统的矢量分析中，为了避免这一错误，不得不规定算子 ∇ 必须作用于变矢量，故将 $(\nabla \cdot \boldsymbol{B}_c)\boldsymbol{A}$ 改为 $(\boldsymbol{B}_c \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}$，这种处理虽然可以得到正确结果，但无合理的解释．

1.1.2　新算符 $\nabla\!\!\!\!\cdot\;$ 和 $\nabla\!\!\!\!\times$ 的引入

戴振铎教授通过分析 ∇ 算子应用于矢量场论中出现的问题，发现其错误的根源在于 ∇ 只是梯度算子，散度和旋度算子根本就不是 ∇ 与其它算子的复合．也就是说，散度和旋度算子与梯度算子 ∇ 是相互独立的．戴振铎教授引入了两个新符号 $\nabla\!\!\!\!\cdot\;$ 和 $\nabla\!\!\!\!\times$ 分别表示散度和旋度算子[9]．在笛卡儿坐标系中，原有的梯度算子 ∇ 和引入的散度及旋度新算子分别定义为

$$\nabla = \sum_i \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.10}$$

$$\nabla\!\!\!\!\cdot\; = \sum_i \hat{x}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.11}$$

$$\nabla\!\!\!\!\times = \sum_i \hat{x}_i \times \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.12}$$