广播电视大学辅导材料

高等数学学习指导

下　册

王正荣　冯泰　编

中国农业机械出版社

为了帮助电大学生学好高等数学这门重要基础课，编者根据多年教学实践中的一些体会，并参照新的教学大纲和新教材而编写的。本书分上下册共十六章。上册是一元微积分学部分；下册是空间解析几何、级数、傅里叶级数、多元函数的微分法、重积分、微分方程、场论等。同时为了配合教材每章分为：〔基本要求〕、〔重点〕、〔难点〕、〔学习指导〕、〔其他说明〕和〔练习题〕六个项目编写的。在编写中除了注意帮助学生牢固掌握基本概念外，特别注意了通过例题培养学生的运算能力。

广播电视大学辅导材料
高等数学学习指导
（下　册）
王正荣　冯　泰　编
*
中国农业机械出版社出版
北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号
北京市密云县印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
新华书店经售
*
850×1168 32开 16 5/8 印张 442千字
1985年7月北京第一版·1985年7月北京第一次印刷
印数：00,001—25,200·定价：4.10元
统一书号：7216·68

前　言

自一九八四年开始，广播电视大学理工类的高等数学课，采用了北京大学邵士敏同志所编写之教材《高等数学讲义》.

高等数学在高等工科院校各专业的教学计划中都是一门属于理论性的基础课程、在培养工程技术人员的过程中，高等数学起着奠基的作用. 高等数学所包括的数学知识，对于读者顺利地学习其他理论课(比如普通物理，理论力学，材料力学等)及专业课都是必不可少的. 通过学习数学课程所获得的运算能力、逻辑思维能力，空间想像能力以及分析和解决实际问题的能力，将使读者在自己的工作岗位上不仅能顺利地完成任务，而且有可能做出创造性的贡献. 作为数学课程的一个特点，仅仅掌握了概念是不够的，还必须通过足够的练习去培养和形成一定的技能和技巧，既要注重基础知识，又要注重基本训练；而基本训练是需要有适当的指导的，否则事倍功半. 由于电大是进行远距离教学，且电视授课时数有限，因此这种指导往往是不足的. 再加之电大学员多数缺乏严格的系统学习的训练，初等数学的知识也掌握得不甚牢固. 因而电大学员学习高等数学，比起一般大专院校的学生来说，是要困难一些的。为了帮助电大学员学好高等数学这门重要的基础课，编者根据教学实践中的一些体会，并参照新的教学大纲，编写了《广播电视大学高等数学学习指导》一书.

这本书，配合教材，以章为单元来编写，分为："基本要求"，"重点"，"难点"，"学习指导"，"其他说明"，和"练习题"这样六个项目，其中主要部分自然是"学习指导". 前两项，即基本要求和重点，是依据本课程的教学大纲来提的，它明确了对每一章内容应掌握的程度；难点的提出则是依据了教材本身的内在联系和教学中的经验，它告诉读者在学习这些内容时，应格外加以注意. 在"学习指导"一项内，则是对重要的基本概念和理论作进一步的分析，有时也做适当的引伸，以求得到深刻理解和牢固掌

握；对于难点则重新提出来加以剖析，抓住关键之处帮助读者顺利突破。针对工科教学（电大学员中工科学员占多数）的要求，我们特别注意了运算能力的培养；对于各种基本运算，就其主要的常用的方法，作尽可能完善一点的归纳总结；我们在运算上既强调基本技能的训练又注意引导读者去学会，那些为使运算简便而应掌握的技巧；对于典型问题，则归纳出解题的一般步骤；对于可能发生的常见性错误，则予以指出．书中配备了足够数量的例题和习题，其中主要是应该掌握的基础题，也有一些提高性的题．为了说明问题或为了开阔读者的思路，所举之例题中，个别题难度稍大一点．所选之题，力求具有典型性、代表性．且习题都给出了答案．除此之外，在“其他说明”一项中我们还就学习方法问题提出了一些建议，以供读者参考．

本书分为上、下两册，共十六章．上册是一元函数微积分学部分，包括函数，极限与连续性，导数与微分，中值定理，导数的应用，不定积分，定积分和定积分的应用等八章；下册包括空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，场论初步，级数，傅里叶级数和常微分方程等八章．凡书中加星号的内容与习题，读者可选学，选做，不作必学要求．

本书除可以作为电大理工科学员学习高等数学的参考书之外，还可以作为电大面授教师的教学参考资料；也可以作为职工大学，夜大学等的学生以及自学高等数学者之辅导材料．本书对于一般高等工科院校的数学教师和学生也具有参考价值。

本书在编写过程中，一些问题曾得到了北京师范大学数学系赵慈庚教授的热情指导，林国付教授对本书作了全面的审阅也提出了宝贵意见，在此向他们表示衷心的感谢．

全书除下册中的《重积分》，《级数》，《傅里叶级数》和《常微分方程》等四章由冯泰同志执笔外，其余各章均由王正荣同志执笔．限于编者的水平，再加之时间仓促，错误和不妥之处恐怕不少，敬请读者批评指正．

编者　　一九八四年七月于北京

目　　录

第九章　空间解析几何

【基本要求】

掌握空间直角坐标系、矢量、矢量的坐标、矢量的数量积、矢量的矢量积等基本概念及其运算，熟练掌握平面与空间直线的几种常用的方程，搞清楚平面与平面、直线与直线、平面与直线间所存在的种种关系．能辨别二次曲面的标准方程．会作平面及一些简单二次曲面的图形．逐步熟悉空间曲面与曲线，提高空间想象能力．

【重　　点】

空间中的直线与平面及其相互关系．几种常见的二次曲面的标准方程和图形．

【难　　点】

矢量的矢量积；确定空间中的直线与平面之方程；空间图形的描绘．

【学习指导】

空间解析几何与平面解析几何类似，也是用代数的方法来研究几何图形．所不同的是：在这里要建立空间坐标系，通过它把空间的几何图形与数或解析表达式联系起来，在空间使数与形相结合，研究数与形的对立统一．空间解析几何，一方面可以将空间图形几何性质的研究转化为对相应的数或解析表达式的代数性质的研究；另一方面又能使许多抽象的代数问题得到直观的几何解释和具体的形象描述．这一章的教学在培养学生空间想象能力

方面，有着特别的作用；并为进一步学习多元微积分和线性代数等知识打下良好的基础.

矢量概念及其在高维空间的推广，已经成为近代的代数学和几何学中最基本的数学工具. 在研究解析几何，特别是在研究空间解析几何时，矢量代数的知识将给我们带来很大方便，也就是说，它是一个得力的工具.

一、矢量代数

1. 矢量的基本概念和公式

（1）矢量概念　只有大小就能确定的量称为数量（也称为标量或纯量）. 例如温度、时间、质量、面积、体积、压强、能量和电位等都是标量. 不仅需要大小，而且还需要方向才能完全确定的量称为矢量. 例如力、速度、力矩、加速度、角速度、动量、位移和电场强度等都是矢量.

在几何中的有向线段就是一个直观的矢量. 一般用空间中的有向线段 AB 来表示矢量. 用长度 $|AB|$ 表示大小，用端点的顺序 A 至 B 表示方向. A 称为起点（或始点），B 称为终点，这个矢量记作 $\overrightarrow{AB}$、或用黑正体字母 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示（用于印刷品中）. 矢量的大小（或长度）的数值称为它的模或绝对值，用记号 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 表示.

矢量按其效能可分成三类：

具有确定的大小和方向而无特定位置的矢量称为自由矢量. 例如力偶.

沿直线作用的矢量称为滑动矢量. 例如作用于刚体的力.

作用于一点的矢量称为束缚矢量. 例如电场强度.

我们所讨论的矢量、都是指自由矢量，就是说，所有方向相同，长度相等的矢量，不管其起点位置如何，都看作相同的矢量.

模等于零的矢量称为零矢量，记作 $\mathbf{0}$，它是始点和终点重合的矢量，因此方向完全是不确定的. $\mathbf{0}$ 在矢量等式中的意义，类似于数量 0 在普通代数中的意义.

模与矢量 α 的模相等而方向相反的矢量称为 α 的负矢量，记作 $-\alpha$.

在空间直角坐标系中，始点与原点 O 重合而终点位于一点 M 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的矢径（或向径），记作 $\mathbf{r}$，原点称为极点．显然，空间中的任一自由矢量都唯一地对应着一条矢径，这条矢径是与它完全相同的.

两矢量相等必须同时满足三个条件：

1）两矢量的长度相等；

2）两矢量平行或同在一直线上；

3）两矢量的指向（由起点到终点的方向）相同．因此在确定一个矢量等式（即等号两端是两个矢量）是否成立时，必须分别考虑这三个条件是否都满足．这是矢量相等不同于标量相等的地方，要特别注意．顺便指出，矢量间不能比较大小，因此不存在矢量不等式，式子 $\mathbf{a}>\mathbf{b}$ 是没有意义的.

（2）单位矢量与矢量的坐标表示．模等于1的矢量称为单位矢量．矢量 α 的单位矢量记为 α°，显然有

$$\alpha^\circ=\frac{\alpha}{|\alpha|}$$

一个矢量的单位矢量给出了这个矢量的方向．对于两个矢量来说，只有当它们的方向相同时，才具有同一个单位矢量．方向各异的矢量其单位矢量也不同．我们常用单位矢量来表示方向.

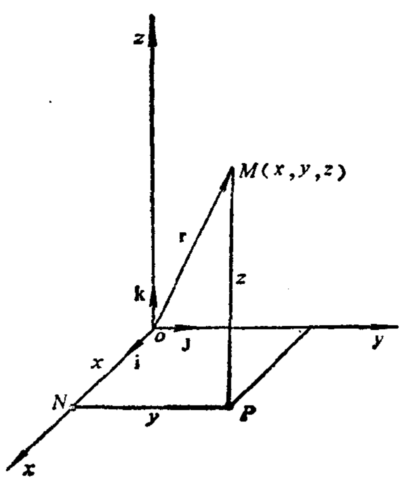

图 9-1

在空间直角坐标系下，特别重要的单位矢量是其方向分别为坐标轴 x，y，z 的正向的单位矢量，我们把它们分别记作 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$．如图 9-1 所示．称为坐标单位矢量（或基本矢量）.

设N、P、M分别是点（x，0，0），（x，y，0），（x，y，z），则根据矢量与数的乘法有

$$\overrightarrow{ON}=x\mathbf{i}$$
$$\overrightarrow{NP}=y\mathbf{j}$$
$$\overrightarrow{PM}=z\mathbf{k}$$

再根据矢量加法就有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM},$$

即

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OM}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

向量$x\mathbf{i}$，$y\mathbf{j}$，$z\mathbf{k}$分别称为矢量$\mathbf{r}$在x轴，y轴，z轴上的分矢量.

矢量在轴上的投影是一个数量而不是一个矢量，也不是指一个线段. 矢量α在坐标轴上的投影x，y，z叫做矢量α的坐标，记为

$$\alpha=\{x,y,z\}$$

它表示坐标为x，y，z的矢量α. 设矢量$\overrightarrow{AB}$的坐标为x，y，z，即$\overrightarrow{AB}=\{x, y, z\}$，再设点$A$的坐标为（$a_1$，$a_2$，$a_3$），点$B$的坐标为（$b_1$，$b_2$，$b_3$），如图9-2所示. 则矢量的坐标与矢量的起点及终点的坐标间有如下关系：

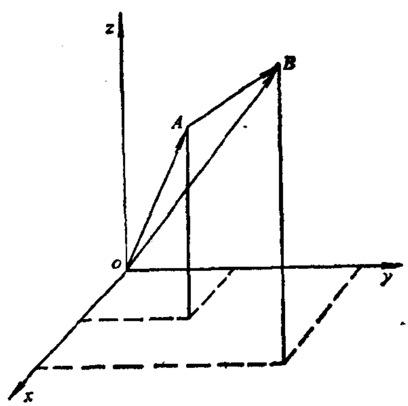

图 9-2

$$x=b_1-a_1,\quad y=b_2-a_2,\quad z=b_3-a_3.$$

这就是说，矢量在某轴上的坐标，等于矢量的终点在该轴上的坐标减去矢量的起点在该轴上的坐标. 因而有

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1)\mathbf{i}+(b_2-a_2)\mathbf{j}+(b_3-a_3)\mathbf{k}.$$

特别是如果矢量的起点与坐标系的原点重合，即这个矢量为空间某点的矢径时，则有$a_1=0$，$a_2=0$，$a_3=0$而得出

$$x=b_1,\quad y=b_2,\quad z=b_3$$

这表明，当矢量为某点的矢径时，则矢量的坐标便与该点的坐标在数值上相等，这里必须注意到两者在概念上是不同的，前者是矢量的坐标，而后者却是点的坐标．由于空间的任一自由矢量都唯一地对应着某点的矢径，这条矢径与它完全相同，因此任一矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标都可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\\ &= \{a_x,\ a_y,\ a_z\},\end{aligned}$$

其中 a_x，a_y，a_z 是矢径终点的坐标，也是该矢量在坐标轴上的投影，即矢量的坐标，要注意它们是数量，而 $a_x\mathbf{i}$，$a_y\mathbf{j}$，$a_z\mathbf{k}$ 才是矢量．

显然，零矢量和基本单位矢量的坐标可表示为

$\mathbf{0} = \{0, 0, 0\}$，（方向不确定）

$\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}$，

$\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}$，

$\mathbf{k} = \{0, 0, 1\}$．

$\boldsymbol{\alpha}$ 的长度即模为

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

这就是说，矢量的模的平方等于它在坐标轴上的各投影的平方的和．

若矢量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ 与坐标轴 ox，oy，oz 的正向间的夹角顺次为 α、β、γ，则角 α，β，γ 叫做这矢量的方向角，而 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做这矢量的方向余弦．易知（图 9-1）

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned} \tag{1}$$

这就是矢量的方向余弦用这矢量在坐标轴上的投影来表示的公式．

显然有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

即任何矢量的方向余弦的平方和恒等于1.

与方向余弦成比例的一组实数m，n，p，叫做方向数．即有

$$\frac{m}{\cos\alpha}=\frac{n}{\cos\beta}=\frac{p}{\cos\gamma}$$

令上面等式的比值为K，则

$m=K\cos\alpha$， $n=K\cos\beta$， $p=K\cos\gamma$.

$$\begin{aligned}m^2+n^2+p^2&=K^2\cos^2\alpha+K^2\cos^2\beta+K^2\cos^2\gamma\\&=K^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\\&=K^2.\end{aligned}$$

或

$$K=\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}.$$

因而有

$$\cos\alpha=\frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{p}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

上式中应同时取正号或同时取负号．在讨论空间直线时，经常要用方向数来确定它的方位．

因为从矢量的方向余弦计算公式（1）可得到

$$\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma},$$

所以矢量的坐标x、y、z正是该矢量的一组方向数．

应该知道，由某矢量的方向余弦所组成的矢量$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$必定是该矢量的单位矢量．这是因为矢量$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$的模为1.

例1 已知点A为(4，0，5)，点B为(7，1，3)，求具有矢量$\overrightarrow{AB}$之方向的单位矢量$\overrightarrow{AB}^{\circ}$.

解： $\vec{AB}=\vec{B}-\vec{A}$

$$\overrightarrow{AB}=(7-4)\mathrm{i}+(1-0)\mathrm{j}+(3-5)\mathrm{k}$$
$$=3\mathrm{i}+\mathrm{j}-2\mathrm{k}.$$

为了求与矢量$\overrightarrow{AB}$同方向的单位矢量$\overrightarrow{AB}^{\circ}$，应当把矢量$\overrightarrow{AB}$除以矢量$\overrightarrow{AB}$的模$|\overrightarrow{AB}|$，即

$$\overrightarrow{AB}^{\circ}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}。$$

而 $$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$$

因此，所求单位矢量为：

$$\overrightarrow{AB}^{\circ}=\frac{3}{\sqrt{14}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{14}}\mathrm{j}-\frac{2}{\sqrt{14}}\mathrm{k}.$$

例2 矢量α与三条坐标轴的夹角相等，即$\alpha=\beta=\gamma$，求它的方向余弦。

解：

由$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，且$\alpha=\beta=\gamma$，有

$$3\cos^2\alpha=3\cos^2\beta=3\cos^2\gamma=1$$

因此α的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

或 $$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

注意，矢量的方向角α,β,γ，其取值范围规定为：

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\gamma\leqslant\pi.$$

作为练习，请读者思考下面的问题：设矢量的方向余弦满足下列条件：

1）$\cos\alpha=0$　在0zy面内

2）$\cos\beta=1$　⊥ 0xz面　x轴∥

3）$\cos\alpha=\cos\beta=0$　z轴∥

指出这些矢量与坐标轴或坐标平面的关系。

2. 矢量的运算　要注意矢量的代数运算和普通数量的代数运算是有本质区别的. 矢量间的运算都是以力学中有方向的量间的相当的计算,作为具体模型而抽象概括得到的. 例如,矢量的加法和减法对应着力的相加和相减. 矢量间的两种乘法运算：两矢量的数量积与两矢量的矢量积，分别对应着求力在某段路程上所作的功，和对应着求力关于某点的力矩. 认识到这一点，将使我们更好地理解和掌握矢量运算的特性，从而更好地将矢量理论应用于数学、力学、物理以及其他许多学科之中. 下面我们将矢量的代数运算加以归纳总结，读者应该明确每一种运算的定义并注意它们所具有的一些基本性质.

（1）加法：若 $\mathbf{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$,

$$\mathbf{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\},$$

则
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\}.$$

把矢量的始点移到原点 O，以 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 为边作平行四边形,由原点作出的对角线就表示和矢量 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$，这种作法称为平行四边形法则，见图 9-3. 这种平行四边形法则，是大家所熟悉的，力学中力的合成，速度的合成都是按平行四边形法则进行的. 还可以把二矢量首尾相接，由始点到终点的矢量即为和矢量 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$，此种方法称为三角形法则，见图 9-4. 显然三角形法则与平行四边形法则是等价的.

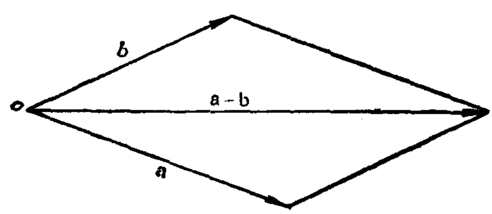

图 9-3

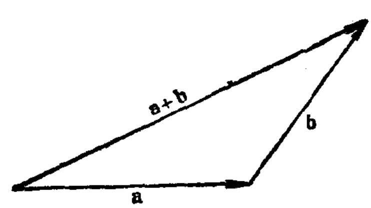

图 9-4

空间中多个矢量的加法，可按下列方法来做：将第一个矢量

放好，然后依次把下面一个矢量的起点放在前一个矢量的终点上.最后，从第一个矢量的起点到最末一个矢量终点的有向线段即为这些矢量的和，见图9-5.这个方法称为矢量的多边形加法法则.

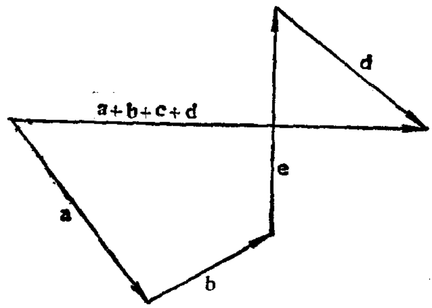

图 9-5

矢量的加法具有下列性质：

1）$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$（交换律）；

2）$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$（结合律）；

3）$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$；

4）$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

这些就是矢量加法的基本规律. 它们说明，矢量加法可以象实数加法那样去演算.

（2）减法：若 $\mathbf{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$，

$\mathbf{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$，

则 $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\{a_x-b_x,\ a_y-b_y,\ a_z-b_z\}$

把矢量 b 的负向量与矢量 a 相加，得差矢量 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$，见图 9-6. 矢量的减法是矢量加法的逆运算，从矢量 a 减去矢量 b 得到的矢量规定为 a 与 b 的反矢量（负矢量）"$-\mathbf{b}$" 之和：

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$$

简言之，减法就是变号相加，类似于数量间的减法运算.

对任意两个矢量 a 和 b 成立三角形不等式

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqslant|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|,$$

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\geqslant||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||.$$

（3）数乘　以实数 λ 乘矢量a称为数乘，记作$\lambda\mathbf{a}$. 当 $\lambda>0$ 时，a 的模伸缩 λ 倍，方向保持不变；当 $\lambda<0$ 时，a 的模伸缩 $|\lambda|$倍，而方向与 a 相反，见图 9-7. 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\mathbf{a}$ 是一个模为零的矢量，即零矢量 $\mathbf{0}$. 在力学问题中、当力的方向不变，而

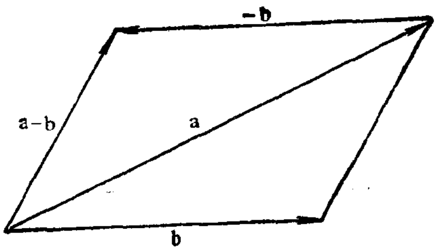

图 9-6

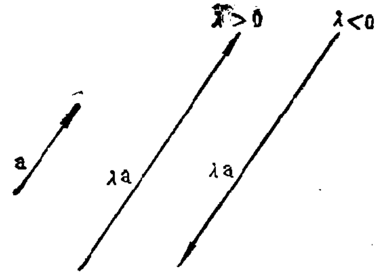

图 9-7

只是大小增大或缩小时，则属于数乘的运算。

如果 $\mathbf{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$，则

$$\lambda\mathbf{a}=\{\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z\}$$

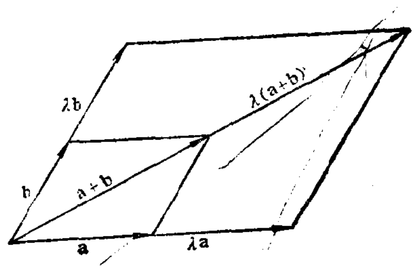

图 9-8

设 λ，μ 为两实数，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 为两矢量，则数乘运算适合下列规律：

1）$\lambda(\mu\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$（结合律）；

2）$(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$（分配律）；

3）$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$（分配律）。

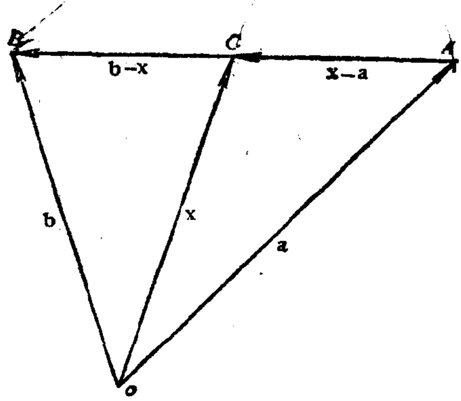

图 9-9

1），2）两条规律易从数乘的定义推出。至于规律 3），可用相似图形来予以说明：设 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 有一个共同起点，则 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 就是以 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 为边的平行四边形的对角线矢量。当 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 和 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 各乘以 λ 时，便得到一个与原来平行四边形相似的平行四边形（图 9-8），并且 $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 就是以 $\lambda\mathbf{a}$ 和

$\lambda\mathbf{b}$ 为两边的这个平行四边形的对角线矢量，所以

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}.$$

例3 解矢量方程

$$\mathbf{b}-\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{a}.$$

解：

应用加法法则，有

$$\mathbf{x}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

这个解有一个简单的几何解释，如图 9-9 所示，$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，及$\overrightarrow{OC}=\mathbf{x}$，点$C$位于使$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$处．换言之，$C$是$AB$的中点．这里，

$$\overrightarrow{AC}=\mathbf{x}-\mathbf{a},$$
$$\overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{x}.$$

例4 如果 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k}$，求 $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$，$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$以及矢量 $3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的单位矢量．

解：

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+2\mathbf{b}&=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}+2(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})\\&=8\mathbf{i}+7\mathbf{j}-8\mathbf{k},\\\mathbf{a}-\mathbf{b}&=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}-(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})\\&=-\mathbf{i}-5\mathbf{j}+7\mathbf{k},\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|&=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+7^2}\\&=\sqrt{75}=5\sqrt{3}.\end{aligned}$$

矢量 $3\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的单位矢量是 $\dfrac{3\mathbf{a}-\mathbf{b}}{|3\mathbf{a}-\mathbf{b}|}$，而

$$\begin{aligned}3\mathbf{a}-\mathbf{b}&=3(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k})-(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})\\&=3\mathbf{i}-7\mathbf{j}+11\mathbf{k},\end{aligned}$$
$$|3\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{3^2+(-7)^2+11^2}=\sqrt{179},$$

所以

$$\overrightarrow{[3\mathbf{a}-\mathbf{b}]}^0=\frac{3\mathbf{i}-7\mathbf{j}+11\mathbf{k}}{\sqrt{179}}.$$

例5 证明四面体中相对棱的中点的连线相交且互相平分.

证明：

取任意点 O 为原点，并设 A、B、C、D 是四面体的顶点，如图 9-10 所示，$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$，$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$，$\overrightarrow{OD}=\mathbf{d}$. 如果 E 和 F 是 AB 和 CD（四面体的一对相对的棱）的中点，我们先来证明

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

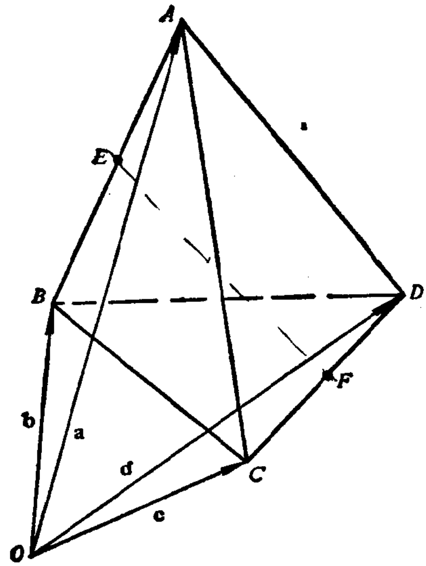

图 9-10

因为

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE},$$

并且，由于 E 是 AB 的中点，

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}).$$

利用 $\overrightarrow{BE}$ 的这个表达式，得到

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

根据 F 是 CD 的中点，同样有

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}).$$