微积分学
辞典

问题解法

责任编辑　李俊明
封面设计　姜品珠

问题解法
微积分学辞典
〔日〕笹部貞市郎　编
蒋　声　庄亚栋　译
上海教育出版社出版发行
(上海永福路 123 号)
各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32　印张 55　插页 4　字数 3,032,000
1989 年 2 月第 1 版　　1989 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—10,000 本

ISBN 7-5320-1397-9/Z·6　　定价：(精)26.00 元

出版说明

自明治维新以后，日本为了学习西方科学技术，在中小学数学教育上也刻意输入，大量地翻译了欧美有影响的课本．以后又自编教材和各种初等数学读物，逐渐地在初等数学教育的取材、编排、题选上形成了自己的特点．根据国内外的情况，日本数学教学也迭经改革，但仍然有着不同于欧美、苏联的地方．为了从一个方面了解这种特点，我们组织翻译了这一套题解辞典．

这几本辞典的题目及解答远不是数学教育的全部，但是由于它的写作年代较近，作者在编选题目时又比较注意立足日本中学数学教育所注重的东西．这些都可以供我国的数学教师了解借鉴．这几本辞典选择的题目有相当部分是初等数学所必需的基础训练题，当然更可以作为教学中的参考材料．

需要说明的是，这几本辞典卷帙浩大，各册各章的编写质量并不一致，错误、重复之处多有发现，我们在组织翻译时只纠正了发现的错误，删去了各册中的数学小史等，还删去了一些明显重复的题目，其他未作改动．希望读者能在使用中注意．

前　言

很久以前，我就有了想编写数学辞典的念头，但由于种种障碍，不易实现．好容易在距今25年前的1937年(昭和12年)3月，才由冈村书店出版了问题解法新编几何学辞典．可是，由于其后的战争，冈村书店付之一炬，这本辞典的纸型与凸版也都化为灰烬，一切成为乌有．

以后虽费尽各种心血，图谋再版，但毕竟正值战后的萧条岁月，不管哪个出版社，还是书店，竟爱莫能助，不得不束之高阁．但拚命作了的事，听凭付诸东流，未免可惜，所以想到自费出版．虽明知冒失，但除此别无他途．遂七拼八凑，勉强做成此事．这是在1956年(昭和31年)11月，距今六年前的事．

不言而喻，因为这只是出于个人爱好而做的，所以事先并不指望广泛流传，赢得好评．想不到它却吸引了相当多的读者，实在出乎意外．所以我继续着手出版了代数学辞典．这是在1958年(昭和33年)11月，距今四年前的事．

数学辞书，如果只限于几何与代数，是不能令人十分满意的，所以打算依次继续完成微积分、三角学、解析几何学辞典．但由于在以前的工作中心力交瘁，前后持续两次，被麻烦的脑溢血折磨着，不但四肢瘫痪，而且连说话都成了问题．本来就头脑迟钝，身体又越来越衰老，徒然焦虑，而工作毫无进展．转瞬之间，又过去了五年．

不知不觉地，我已76岁了，正所谓“日暮而途远”．照这种状况，能否在有生之年完成这项工作便成了问题，每念及此，只能喟然长叹．

不过，凡事听天由命．我一面颐然自养，一面一点点地写着书稿．去年春天到小仓先生家中拜访时，提起了这件事．先生照例露出了慈祥的笑颜，说：“你的想法实在有点冒失，居然要一个人干这桩工作，这是不可能的事．现在有很多优秀的年轻人，应当请他们协助你及早完成．”

说实话，直到那时为止，我想的是一个人孜孜不倦地干到哪儿算哪儿，死而后已．不过，这样一来就可能半途而废，无济于事．听到先生指教后，想想我逞能实在没有意思，所以考虑善后之策．正好，素日关系密切的、故乡冈山大学的片冈、北山、冈本三位先生，听说了我的窘状后，主动提出来帮助我，这真要感谢苍天帮忙．我立刻鼓起勇气，计划一口气完成．在下面所载的各位先生的鼎助下，终使本书脱稿．

本书的编写意图与方针等，与前面的几何学辞典、代数学辞典完全相

同．这里说几点不同之处．

全书分三编．

第一编主要以高中学生及大学入学考试应试生为对象．在这一编里收集了必要的问题并给出了详细的解答．第二编主要以大学生及一般的数学爱好者为对象，从大学教材中取材．比起第一编来，程度要高得多，涉及的范围也广得多．进一步，随着现代科学技术的迅速发展，为适应广大科学技术工作者的需要，特烦请后起之秀奥田博士编写了第三编“对现代科学的应用”，提供应用微积分所需的实际资料，并叙述现代产业中热门的电子计算机的理论与应用．最后是附录，叙述微积分的产生，重要公式，术语对照及其他．总之，无论是教师、学生还是社会人士都能利用本书．

再者，在本书出版之时，承蒙素日对本书刊行格外照顾、指导的小仓金之助先生赐给了周到而恳切的序言，真使我抑制不住由衷的感激．不料，本书印刷未就，先生突患重病而作古，竟未能亲见本书．抚今追昔，感慨无限，在此谨以本书捧献先生灵前，以表达感激之情，并祈先生冥福．

1963年(昭和38年)3月

编写本书时，问题的收集、解答、校对以及其他方面，受到了刊载于下的诸位先生的大力协助，在此谨表谢意．

(按日文字母为序)

池田　富藏　(浦和西高中)
上野　敬子　(町田学校)
冈本　　勤　(冈山大学)
片冈　虎雄　(冈山大学)
久保　应助　(埼玉大学)
齐藤　忠彦　(笠冈高中)
团藤　恒雄　(笠冈高中)
丸山　滋弥　(东京工业大学)
上野　　正　(东京大学)
内田　虎雄　(高知大学)
奥田　节夫　(冈山大学)
北山　　毅　(冈山大学)
今野　　繁　(静冈大学)
高桥　　昇　(笠冈高中)
早川　康一　(东京工业大学)
吉泽　宽治　(浦和市立高中)

序

以前，笹部君著有几何学辞典，代数学辞典，给社会上学习数学的人带来了极大的方便，成了他们的好伴侣. 如今他又着手编集了微积分学辞典，并且把这本书的校样给我看.

我立刻浏览了一下，发现它是部超过一千五百页的庞大的著作，计有三编三十余节，四千多个问题，一一予以详尽解答.

而且，本书不只作为报考大学的参考书，还进而详述了大学课程范围的微积分对现代科学的应用，以及有关微积分的史实. 无论对高中、大学的学生，还是对一般的科技人员，作为学习参考书都是十分有益的

现在，我虽无暇探讨一个个问题的解法是否正确，取材是否恰当，但从笹部君历来的责任心以及舆论来看，我完全相信本书必定会给各方面的读者带来许多好处.

尤其是这次的编写工作中，有好几个正担任教师的、生气勃勃的后起之秀协力帮助笹部君，所以我确信这将使这部著作更加出色.

和我同辈，已入老境的笹部君，一面与病魔搏斗，一面向这件大事业锐意进取，竭尽全力，以莫大的勇气与热忱，同时发挥了多年积累的丰富经验，遂完成这部巨著. 对此我怀有非常深的敬意.

据笹部君所说，他正计划继续编集三角学，解析几何学等辞典.

当然，象这样的大部头学术著作，如果没有许多笃学之士同心协力，要完成是困难的. 为了我国的数学事业，我盼望各方面对笹部君以后的工作给予进一步援助.

理学博士　小 仓 金 之 助

1962 年 10 月 14 日

推　荐　书

东北大学名誉教授
理学博士　高须鹤三郎

我进中学的时间，是在1904年，日俄战争爆发的那一年．学校的课程有数学、博物、物理、化学、地文学、英语，当然还有习字、图画、作文，乃至于体操．对于各门功课，除认真学习指定的教科书而外，我还喜欢精读几本参考书，并加以整理．当时在数学方面，上野清、长泽龟之助著书向大众普及，被民间(?)称为两大家．其中，长泽先生编著出版了算术辞典、几何学辞典、代数学辞典、三角学辞典，按学科将定理命题收罗殆尽，并予以解说．我因精读整理已成习惯，对那套书视若珍宝，遍览无遗．

数年前，承笹部先生惠赠他的几何学辞典．与长泽先生的辞典相比，其资料之丰富精良，使人顿感惊讶．其后有代数学辞典问世，如今又出版了微积分学辞典．此书出自经验丰富的干练老将之手，更有年青人协力相助，不难想象，定能与几何学辞典媲美．目前我正忙于出国讲学，无暇细读，但是可以期望，正如当初我从长泽先生的好书里受益一样，现在的很多青年将从笹部先生的辞典中受益．学习成绩好的青年，在独立解决学校课本中的全部问题之后，便可满怀信心，通读笹部先生的辞典；成绩较差者只能独立解决课本中较容易的一部分问题，则可从笹部先生的辞典中学会其余问题的解法

一般说来，不能指望一本书中没有印错的地方．如果这本辞典里有错误，那么，发现错误并将它们纠正过来，这件事本身就是一个很好的练习．请将您发现的地方赐告作者．

推荐书

山形大学名誉教授　柳原 吉次

1937年，四分之一世纪以前，笹部先生出版问题解法新编几何学辞典之际，我曾撰一文推荐，不幸由于战祸而使纸型和发行所都化为灰烬.

笹部先生在战争期间及战后克服种种困难，重整旗鼓，于1956年出版了问题解法几何学辞典，继而于1958年出版了问题解法代数学辞典，都是一千多页的庞大著作.

笹部先生今年已76岁高龄，数年前患脑溢血，四肢瘫痪，以其坚强的毅力，加之得到多位能干的热心人协助，终于又出版了微积分学辞典．随后还拟出版解析几何学辞典、三角学辞典．在此，谨对他的旺盛意志表示由衷敬意.

以问题解法为中心的数学辞典，自1904年左右开始，数年间陆续刊行过长泽龟之助先生的一套书．而笹部先生的这些辞典则将数学辞典大型化、现代化，并且十分注意战后学制改革引起的各科内容变化．特别是这本微积分学辞典，第一编的题材主要适合准备报考大学的程度；第二编程度略高，以大学生及一般数学爱好者为对象；第三编介绍对近代科学的应用，以科技工作者为对象；书末并有附录，内容丰富，使用价值甚高.

恳切希望笹部先生珍惜身体，以能完成其预期的编写计划.

目　录

第　一　编

第一章　基本概念

§1. 实数的性质 ……1
§2. 数学归纳法 ……2
§3. 各种数列 ……26
A. 二项式定理 ……26
1. 二项式的展开 ……26
2. 系数 ……30
3. 中间项，最大项 ……33
4. 证明题 ……36
5. 其他 ……41
B. 多项式定理 ……43
C. 差分数列 ……47
1. 通项(一) ……47
2. 通项(二) ……49
3. 和 ……52
4. 杂题 ……53
D. 各种数列 ……54
§4. 数列的收敛、发散 ……75
A. 基本问题 ……75
B. 各种数列的收敛、发散 ……82
C. 递推式 ……93
§5. 级数、数列的各种性质 ……119
A. 无穷等比级数 ……119
B. 各种无穷级数 ……129
C. 与三角函数有关的问题 ……149
D. 与图形有关的问题 ……162
§6. 各种函数 ……191
A. 基本知识 ……191
B. 证明题 ……194
C. 其他 ……200
§7. 函数的连续性 ……205
A. 连续和不连续 ……205
B. 证明题 ……218
C. 其他 ……221
§8. 函数的极限 ……225
A. 极限 ……225
B. 不定式的极限 ……235
C. 证明题 ……255
D. 与三角函数有关的问题 ……260
E. 与图形有关的问题 ……274
F. 其他 ……284

第二章　微分及其应用

§1. 导数，导函数 ……296
A. 基本概念 ……296
B. 函数的和、差、积、商的微分法 ……314
C. 复合函数与隐函数的微分法 ……321
D. 三角函数的微分法 ……333
E. 反函数的微分法 ……338
F. 幂函数与指数函数、对数函数的微分法 ……346
1. 极限 ……346
2. 微分法 ……348
G. 用参变量表示的函数的微分法 ……358
H. 用微分法证明等式及其他 ……361
I. 应用题 ……366
J. 中值定理及其应用 ……373
§2. 高阶导函数 ……385
§3. 凹凸与拐点 ……407
§4. 导函数的应用 ……425
A、切线，法线 ……425
B. 速度 ……460
§5. 函数的增减与极值 ……481
A. 函数的增减 ……481
B. 极大与极小 ……497
C. 最大值和最小值 ……555
1. 已知函数的最大值和最小值 ……555
2. 长度或角的最大值和最小值 ……569
3. 面积的最大值、最小值 ……588
4. 体积的最大值、最小值 ……609
5. 其他 ……624
§6. 近似值的计算 ……630
A. 近似值与误差(之一) ……630

B．近似值与误差(之二) ……………642
C．近似值与误差(之三) ……………658

第三章 积分法及其应用

§1．分割求积法 ……………………675
A．分割求积法 ……………………675
B．分割求积法的应用 ……………682
§2．不定积分 ………………………688
A．基本的不定积分 ………………688
B．利用部分分式(分项分式)变形 ……………………………698
C．有理整函数的积分法 …………706
D．换元积分法 ……………………708
E．分部积分法 ……………………715
F．三角函数的不定积分 …………722
G．各种函数的不定积分 …………735
H．应用题 …………………………743
§3．定积分 …………………………748
A．定积分的基本计算(之一) ………748
B．定积分的基本计算(之二) ………769
C．极大，极小 ……………………797
D．最大，最小 ……………………811
E．极限 ……………………………830
F．判断大小 ………………………846
G．三角函数的定积分 ……………848
§4．近似值的计算 …………………862
§5．定积分的应用 …………………874
A．面积 ……………………………874
1．坐标轴与曲线所围的面积………874
2．直线与曲线所围的面积…………902
3．两条(或几条)曲线所围的面积 …………………………………948
4．自身相交的曲线所围的面积……976
B．体积 ……………………………998
1．直线形形成的旋转体……………998
2．球体 ……………………………1001
3．抛物线形成的旋转体 …………1006
4．椭圆(或双曲线)形成的旋转体 …………………………………1022
5．其他 ……………………………1028
C．物理问题 ………………………1045
1．距离和速度 ……………………1045
2．流体 ……………………………1059
3．其他 ……………………………1071

第 二 编

第一章 微分及其应用

§1．无穷级数，函数的展开 ………1075
A．实数的性质 ……………………1075
B．数列的极限 ……………………1077
C．无穷级数 ………………………1090
D．正项级数 ………………………1094
E．交错级数 ………………………1100
F．绝对收敛 ………………………1101
G．幂级数 …………………………1105
H．一致收敛 ………………………1110
I．函数的展开 ……………………1113
§2．偏导函数 ………………………1122
A．二元函数的极限、连续 ………1122
B．偏导函数 ………………………1125
C．高阶偏导函数 …………………1130
D．复合函数的微分法 ……………1135
E．隐函数 …………………………1143
F．全微分 …………………………1148
G．变量代换 ………………………1151
H．极大和极小 ……………………1159
I．泰勒展开式 ……………………1173
§3．曲线与曲面 ……………………1175
A．切线和法线 ……………………1175
B．两条曲线的切触阶 ……………1192
C．曲率和曲率圆 …………………1196
D．渐屈线和渐伸线 ………………1204
E．渐近线 …………………………1210
F．奇点 ……………………………1219
G．包络 ……………………………1227
H．曲线的描绘 ……………………1232
I．曲面 ……………………………1242
J．切平面与法线 …………………1243
K．空间曲线 ………………………1249

第二章 积分及其应用

§1．不定积分 ………………………1253
A．有理函数积分法 ………………1253

B. 无理函数积分法 ……1261
C. 超越函数的积分法 ……1274
D. 其他 ……1287
§2. 定积分 ……1291
A. 定积分的定义与基本定理 ……1291
B. 广义积分的定义与基本定理 ……1298
C. 含参数积分, B 函数, Γ 函数 ……1308
D. 应用题 ……1316
§3. 重积分 ……1324
A. 重积分的定义 ……1324
B. 换元积分法, 变更积分次序 ……1332
C. 体积 ……1339
D. 表面积 ……1343
E. 重心, 转动惯量 ……1346
F. 线积分, 面积分, 高斯定理, 斯托克司定理 ……1349

第三章　微分方程

§1. 一阶微分方程 ……1353
A. 次数, 阶数 ……1353
B. 建立微分方程的方法 ……1354
C. 缺少一个变量的方程 ……1357
D. 变量分离方程 ……1357
E. 齐次方程 ……1364
F. 非齐次的一次方程 ……1369
G. 全微分方程 ……1372
H. 非全微分型的方程 ……1376
I. 线性方程 ……1381
J. 常数变易法 ……1386
K. 伯努利方程 ……1386
L. 克莱罗方程 ……1389
M. 达朗贝尔方程 ……1391
N. 拉格朗日方程 ……1392
O. 待定系数法 ……1393
P. 一阶高次微分方程 ……1393
Q. 黎卡提方程 ……1403
§2. 二阶微分方程 ……1405
§3. 微分方程组 ……1416
§4. 高阶微分方程 ……1421
§5. 偏微分方程 ……1425
§6. 特殊的微分方程的解法 ……1427
A. 常系数线性微分方程 ……1427
B. 特殊类型的高阶常微分方程 ……1442
C. 级数解法 ……1448
D. 偏微分方程 ……1456

第四章　集, 向量, 复数

§1. 集 ……1461
§2. 向量 ……1467
§3. 向量与复数 ……1475

第　三　编

第一章　对自然科学的应用(I)

§1. 运动学 ……1531
§2. 受到阻力的运动 ……1538
§3. 万有引力与在万有引力场中的运动 ……1544
§4. 简谐振动 ……1548
§5. 动量 ……1553
§6. 约束运动 ……1555
§7. 重心与转动惯量 ……1558
§8. 刚体运动 ……1566
§9. 解析力学 ……1572
§10. 材料力学 ……1578
§11. 杂题 ……1581

第二章　对自然科学的应用(II)

§1. 流体力学 ……1584
§2. 弹性力学 ……1586
§3. 热力学 ……1587
§4. 波动 ……1591
§5. 光学 ……1593
§6. 电磁学 ……1595
§7. 电工学 ……1604
§8. 分子, 原子 ……1611
§9. 化学 ……1619
§10. 其他 ……1621

第三章 数值计算

§1. 插值法 ……1624
§2. 最小二乘法 ……1634
§3. 方程的根 ……1639
§4. 根的近似计算 ……1647
§5. 简略算法 ……1653
§6. 根的精度较高的近似值 ……1655
§7. 近似计算 ……1659
§8. 误差 ……1664
§9. 泰勒定理及其应用 ……1675
§10. 积分的近似计算 ……1683

第四章 级数论

§1. 基本问题 ……1687
§2. 数学归纳法 ……1690
§3. 一致收敛 ……1696
§4. 逐项积分 ……1703
§5. 逐项微分 ……1707
§6. 傅立叶级数 ……1708
§7. 展开成傅立叶级数 ……1710
§8. 正交函数系 ……1728
§9. 傅立叶级数的应用 ……1729
§10. 发散级数 ……1730

附 录

重要定理与公式 ……1733
补遗 关于第二编第二章§2、§3 ……1745

第 一 编

（高中程度）

第一章 基 本 概 念

注 微积分学中处理的数，主要是实数，因而本书中单独说到数时，都是指实数。实数的定义及数的分类已在代数学辞典上册第1页中讲过，此处略去。

§1. 实数的性质

1. 什么是实数的连续性？

解 整数和分数叫做有理数，而象$\sqrt{3}$、π这样的数叫做无理数。有理数和无理数总称为**实数**。设有一个包含有限个或无限个实数的集合，如果存在常数A，使得对于属于此集合的任何数m，都有$m\leqslant A$，就说这个集合**上方有界**，并称A为其**上界**。

例如，考虑下列各数组成的集合：

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -2,\ \frac{2}{3},\ -3,\ \frac{3}{4},$$
$$-4,\ \frac{4}{5},\ \cdots \qquad ①$$

其中各数都小于1，所以1是这个集合的上界。又若B是大于1的任意数，则①中各数都小于B，因而B也是①的上界。故得如下结论：

若A为某实数集合的上界，则任何大于A的数B都是这个集合的上界。

在上面的例子中，第$2n-1$个数为$-n$，第$2n$个数为$\dfrac{n}{n+1}$(n为自然数)。因而1和大于1的数都是这个集合的上界，小于1的数不是上界。象1这样的上界A叫做这个集合的**上确界**，或称**最小上界**。

有限个实数所成的集合，其中的最大数就是上确界。而象①那样的由无限个实数组成的集合，其中没有最大数。这时，虽有上界，却不清楚是否有最小的上界，即上确界。在中学范围内不能从理论上解决这个问题，只能作下面的规定：

上方有界的实数集合必有上确界。

类似地可定义下界和下确界。就是说，设有一实数集合，若其中各数都不小于常数A'，就说这个集合**下方有界**，A'叫做它的下界。下界中若有最大的，就称之为**下确界**，或**最大下界**。

设有一上方有界的实数集合，将它的每个实数都变号，所得各数的集合就是下方有界的。因为上方有界的实数集合必有上确界，所以下方有界的实数集合必有下确界。上方或下方有界的实数集合分别具有上确界或下确界，这就叫做**实数的连续性**。

2. 什么是实数的无限性？

解 直线没有端点，可向两边无限延长。对于实数来说，它的绝对值的大小也没有限制，无论a是怎样大的正数，总存在正数x，使得

$$a<x,\ -x<-a.$$

这就叫做实数的**无限性**。

3. 什么是实数的稠密性？

解 在直线上，点的分布是无限稠密的。换句话说，不管取怎样邻近的两点，它们之间总存在着无穷多个点。这对应于数的下述性质：

对于两个不同的实数a、b，设$a<b$，则必存在无穷多个数x，使得

$$a<x<b.$$

这叫做实数的**稠密性**。

4. 什么是实数的收敛性？

解 设有一点在直线上沿一方向不停地运动，但其速度递减，使它不能越过某个定点，那么动点或者无限趋近于这个定点，或者无限趋近于动点与该定点之间的另一定点。例

如，在直线上有定点 A，取任意点 P，再取线段 PA 的中点 P_1，线段 P_1A 的中点 P_2，线段 P_2A 的中点 P_3，…，线段 $P_{n-1}A$ 的中点 P_n，则点 P_n 无限趋近于 A，但不能越过 A. 关于数也有类似情形。就是说，若有某数 x 不断地变大或不断地变小，但不越过常数 a，则 x 必无限趋近于某个常数（不一定等于 a）。这叫做实数的收敛性。

§2. 数学归纳法

5．什么是数学归纳法？

解 对于一个关于自然数 n 的命题（包括等式、不等式），第一步，证明这命题当 $n=1$ 时成立；第二步，设此命题当 $n=k$ 时成立，证明当 $n=k+1$ 时也成立。证明了这两步，就知道这命题对任何自然数 n 都成立了。

通过上述两步来证明某个命题对一切自然数都成立的方法叫做**数学归纳法**.

在下列各题中，将作出详细的具体的说明。

6．有一个关于自然数 n 的命题 $P(n)$。如果假定对于任一自然数 k，命题 $P(k)$ 成立，就能推出 $P(k+1)$ 也成立，那么命题 $P(n)$ 还不一定成立。试举出一些不同情形的具体例子加以说明。

解 例如：(1) 设命题 $P(n)$ 是"5^n 都是偶数"。

假定 5^k 是偶数，那么

$$5^{k+1}=5^k\times5=(\text{偶数}).$$

所以对于这个命题 $P(n)$，只要假定 $P(k)$ 成立，就能推出 $P(k+1)$ 成立，但 $P(n)$ 显然不成立。

(2) 命题 $P(n)$ 是"对于一切自然数 n，都有 $n!>2^n$."

假定 $P(k)$ 成立，即 $k!>2^k$。

两边同乘以 $k+1$，得

$$(k+1)!>2^k(k+1)\geqslant2^k\times2=2^{k+1},$$

因而 $P(k+1)$ 也成立。

但是当 $n=1, 2, 3$ 时，$P(n)$ 都不成立。

由此可见，如果不证明 $P(1)$ 成立，就可能发生错误。

7．在下列各情形中，关于整数 n 的等式 $E_n=0$ 对于哪些整数成立？

例：$E_1=0$ 成立；设 $E_r=0$ 成立，则 $E_{r+1}=0$ 也成立。

［答］ $n=1, 2, 3, \cdots$

(1) $E_{100}=0$ 成立；设 $E_r=0$ 成立，则 $E_{2r}=0$ 也成立。

(2) $E_2=0$ 成立；设对于满足 $1<r<m$ 的任何 r，$E_r=0$ 都成立，则 $E_m=0$ 也成立.（m 为整数）

(3) $E_1=0$ 成立；设 $E_r=0$ 成立，则 $E_{r-1}=0$ 和 $E_{r+1}=0$ 都成立。

解 (1) ［答］ $n=2^m\times100$. $(m=1, 2, 3, \cdots)$

(2) ［答］ 满足 $n\geqslant2$ 的整数 n.

(3) ［答］ 一切整数 n.

8．用数学归纳法证明：若 n 为正整数，则 x^n-y^n 能被 $x-y$ 整除。

解 当 $n=1$ 时，$x-y$ 能被 $x-y$ 整除。

其次，设 $n=k$ 时，命题成立，即 x^k-y^k 能被 $x-y$ 整除。令 $n=k+1$，变形得

$$x^{k+1}-y^{k+1}=x(x^k-y^k)+y^k(x-y).$$

由假定知右边第一项能被 $x-y$ 整除，而第二项显然能被 $x-y$ 整除，所以 $n=k+1$ 时命题也成立。故此命题对于一切自然数 n 都成立。

9．设 n 为正整数，且 $n\geqslant2$，证明 $x^2-nx+(n-1)$ 能被 $(x-1)^2$ 整除。

解 当 $n=2$ 时，$x^2-nx+(n-1)$ 成为

$$x^2-2x+1=(x-1)^2,$$

能被 $(x-1)^2$ 整除。

设当 $n=k\ (k\geqslant2)$ 时能整除，即存在整式 $Q(x)$，满足

$$x^k-kx+(k-1)=(x-1)^2Q(x).\quad ①$$

当 $n=k+1$ 时，先变形，再利用 ① 式，得

$$\begin{aligned}&x^{k+1}-(k+1)x+k\\&=x[x^k-kx+(k-1)]+kx^2-2kx+k\\&=x(x-1)^2Q(x)+k(x-1)^2\\&=(x-1)^2[xQ(x)+k],\end{aligned}$$

上式也能被 $(x-1)^2$ 整除。所以对于大于或等于 2 的一切自然数 n，$x^n-nx+(n-1)$ 都能被 $(x-1)^2$ 整除。

别解 令

$$f(x)=x^n-nx+(n-1),\quad ①$$

则

$$f'(x)=nx^{n-1}-n.\quad ②$$

由①，②，得

$$f(1)=0,\ f'(1)=0,$$

故 $f(x)$ 有二重根 $x=1$，因而 $f(x)$ 能被 $(x-1)^2$ 整除。

10. 用数学归纳法证明：若 $n\geqslant 2$，则 $x^n-na^{n-1}x+(n-1)a^n$ 能被 $(x-a)^2$ 整除。

解 (i) 当 $n=2$ 时，原式为

$$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2,$$

显然能被 $(x-a)^2$ 整除。

(ii) 假定当 $n=k\,(k\geqslant 2)$ 时，

$$x^k-ka^{k-1}x+(k-1)a^k$$

能被 $(x-a)^2$ 整除，设上式除以 $(x-a)^2$ 所得的商为 Q，则

$$x^k-ka^{k-1}x+(k-1)a^k=Q(x-a)^2,$$

$$\therefore\quad x^k=ka^{k-1}x-(k-1)a^k+Q(x-a)^2.$$

$$\therefore\quad x^{k+1}=ka^{k-1}x^2-(k-1)a^kx+Q(x-a)^2x.$$

因而

$$\begin{aligned}&x^{k+1}-(k+1)a^kx+ka^{k+1}\\&=ka^{k-1}x^2-(k-1)a^kx+Q(x-a)^2x\\&\quad-(k+1)a^kx+ka^{k+1}\\&=ka^{k-1}x^2-2ka^kx+ka^{k+1}+Q(x-a)^2x\\&=ka^{k-1}(x-a)^2+Q(x-a)^2x\\&=(Qx+ka^{k-1})(x-a)^2,\end{aligned}$$

故当 $n=k+1$ 时命题也成立。因而对于满足 $n\geqslant 2$ 的一切自然数 n，已知多项式总能被 $(x-a)^2$ 整除。

11. 设 n 为正整数，且 $n\geqslant 3$，证明

$$2x^n-n(n-1)x^2+2n(n-2)x-(n-1)(n-2)$$

能被 $(x-1)^3$ 整除。

解 当 $n=3$ 时，原多项式为

$$2x^3-6x^2+6x-2=2(x-1)^3,$$

显然，能被 $(x-1)^3$ 整除。

设当 $n=k$ 时能整除，即存在整式 $Q(x)$，满足

$$2x^k-k(k-1)x^2+2k(k-2)x-(k-1)(k-2)=(x-1)^3Q(x).\quad ①$$

当 $n=k+1$ 时，先将多项式变形，再利用①式，得

$$\begin{aligned}&2x^{k+1}-k(k+1)x^2+2(k+1)(k-1)x-k(k-1)\\&=x[2x^k-k(k-1)x^2+2k(k-2)x\\&\quad-(k-1)(k-2)]+k(k-1)x^3\\&\quad-3k(k-1)x^2+3k(k-1)x-k(k-1)\\&=x(x-1)^3Q(x)+k(k-1)(x-1)^3\\&=(x-1)^3[xQ(x)+k(k-1)],\end{aligned}$$

也能被 $(x-1)^3$ 整除。所以，对于大于或等于 3 的一切自然数 n，

$$2x^n-n(n-1)x^2+2n(n-2)x-(n-1)(n-2)$$

都能被 $(x-1)^3$ 整除。

别解 令

$$f(x)=2x^n-n(n-1)x^2+2n(n-2)x-(n-1)(n-2),\quad ①$$

则

$$f'(x)=2nx^{n-1}-2n(n-1)x+2n(n-2),\quad ②$$

$$f''(x)=2n(n-1)x^{n-2}-2n(n-1).\quad ③$$

由①，②，③，得

$$f(1)=0,\ f'(1)=0,\ f''(1)=0,$$

因而 $f(x)$ 有三重根 $x=1$。故 $f(x)$ 能被 $(x-1)^3$ 整除。

12. 证明 $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ 可表示成 $x+\dfrac{1}{x}$ 的 n 次整式。

解 当 $n=1$ 时，$x^n+\dfrac{1}{x^n}=x+\dfrac{1}{x}$，命题成立。

当 $n=2$ 时，

$$x^n+\frac{1}{x^n}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$$

因而命题仍成立。

若 k 为自然数，设命题对于 $n=k-1$ 及 $n=k$ 都成立，由于

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right),$$

所以 $x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}$ 是 $x+\dfrac{1}{x}$ 的 $k+1$ 次整式，故命题当 $n=k+1$ 时成立。因而对于一切自然数 n，命题都成立。

13. 设 h 是正的常数，则对于不等于 1 的自然数 n，下述不等式成立：

$$(1+h)^n>1+nh.$$

(1) 利用二项式定理证明；

(2) 利用数学归纳法证明。

解 (1) 把 $(1+h)^n$ 展开，得

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2!}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}h^3+\cdots+h^n.$$

但 h 为正数，故展开式各项都是正的，因而第三项 $\frac{n(n-1)}{2!}h^2$ 以下都是正的.

$$\therefore\quad (1+h)^n>1+nh.$$

(2) 当 $n=2$ 时，

左边 $=(1+h)^2=1+2h+h^2$，

右边 $=1+2h$

$\therefore$ 左边 $-$ 右边 $=(1+2h+h^2)-(1+2h)=h^2>0$，

因而原式成立.

设当 $n=k$ 时原式成立，即

$$(1+h)^k>1+kh.$$

两边同乘以 $(1+h)$，因为 $h>0$，有

$$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2.$$

而 $h>0$，$k\geqslant 2$，所以 $kh^2>0$.

$$\therefore\quad 1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h.$$

$$\therefore\quad (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h.$$

因而当 $n=k+1$ 时原式也成立. 所以原式对于满足 $n\geqslant 2$ 的一切自然数 n 都成立.

14. 设 n 为正整数，$0<h<1$，试用数学归纳法比较 $(1-h)^n$ 与 $1-nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$ 的大小.

解 令

$$P=(1-h)^n,\ Q=1-nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

当 $n=1$ 时，　$P=Q=1-h$.

当 $n=2$ 时，　$P=Q=1-2h+h^2$.

当 $n=3$ 时，　$P=1-3h+3h^2-h^3$，

$Q=1-3h+3h^2$，

因为 $h>0$，所以这时 $P<Q$.

设当 n 为某个自然数 k 时，$P\leqslant Q$ 成立，即

$$(1-h)^k\leqslant 1-kh+\frac{k(k-1)}{2}h^2.$$

因为 $h<1$，所以 $1-h>0$，上式两边同乘以 $(1-h)$，得

$$(1-h)^{k+1}\leqslant\left[1-kh+\frac{k(k-1)}{2}h^2\right](1-h)$$

$$=1-(k+1)h+\frac{(k+1)k}{2}h^2-\frac{k(k-1)}{2}h^3.$$

这里 $k\geqslant 1$，$h>0$，因而

$$-\frac{k(k-1)}{2}h^3\leqslant 0.$$

$$\therefore\quad (1-h)^{k+1}\leqslant 1-(k+1)h+\frac{(k+1)k}{2}h^2,$$

即当 $n=k+1$ 时也有 $P\leqslant Q$. 所以对于一切自然数 n，都有

$$(1-h)^n\leqslant 1-nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

其中等号仅当 $n=1, 2$ 时成立.

15. 用数学归纳法证明下面的不等式：

$$(1+\alpha)^n>1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2.$$

$$(n\geqslant 3,\ \alpha>0)$$

解 当 $n=3$ 时，

左边 $=(1+\alpha)^3=1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3$，

右边 $=1+3\alpha+3\alpha^2$.

因为 $\alpha>0$，所以左边 $>$ 右边，原不等式成立.

设当 $n=k$ 时原不等式成立，即

$$(1+\alpha)^k>1+k\alpha+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^2.$$

由于 $\alpha>0$，上式两边同乘以 $1+\alpha$，得

$$(1+\alpha)^{k+1}>\left[1+k\alpha+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^2\right](1+\alpha)$$

$$=1+(k+1)\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\alpha^2+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^3.$$

而 $k\geqslant 3$，$\alpha>0$，所以

$$\frac{k(k-1)}{2}\alpha^3>0.$$

$$\therefore\quad 1+(k+1)\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\alpha^2+\frac{k(k-1)}{2}\alpha^3>1+(k+1)\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\alpha^2.$$

$$\therefore\quad (1+\alpha)^{k+1}>1+(k+1)\alpha+\frac{k(k+1)}{2}\alpha^2.$$

所以当 $n=k+1$ 时，原不等式也成立. 因而原不等式对于满足 $n\geqslant 3$ 的一切自然数 n 都

成立.

16. 证明四个连续正整数的积能被4!整除.

解 设四个连续正整数的积为

$P=n(n+1)(n+2)(n+3)$. (n为自然数)

当$n=1$时, $1\cdot2\cdot3\cdot4=4!$, 命题成立.

设当$n=k$时, P能被4!整除, 则存在正整数p, 满足

$$k(k+1)(k+2)(k+3)=4!p.$$

其次, 有

$$\begin{aligned}&(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\\&=k(k+1)(k+2)(k+3)\\&\quad+4(k+1)(k+2)(k+3)\\&=4!p+4(k+1)(k+2)(k+3).\end{aligned}$$

上式中$(k+1)(k+2)(k+3)$是三个连续正整数的积, 三数中至少有一个是3的倍数, 至少有一个是2的倍数. 因而存在正整数q, 满足

$$4(k+1)(k+2)(k+3)=4!q.$$

$$\therefore\quad (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)=4!(p+q).$$

因而当$n=k+1$时命题也成立. 所以对于一切自然数n, $n(n+1)(n+2)(n+3)$都能被4!整除.

17. 设p是素数, n是与p互素的整数. 用数学归纳法证明$n^{p-1}-1$能被p整除.

解 由于n与p互素,

$$n^p-n=n(n^{p-1}-1),\qquad ①$$

如果能证明n^p-n能被p整除, 本题就得到证明了.

当$n=1$时, $n^p-n=1^p-1=0$, ①式左边能被p整除.

设当$n=k$时命题成立, 则存在整数t, 满足

$$k^p-k=pt.$$

其次, 有

$$\begin{aligned}&(k+1)^p-(k+1)\\&=k^p+C_p^1k^{p-1}+\cdots+C_p^{p-1}k+1-(k+1)\\&=(k^p-k)+C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}\\&\quad+\cdots+C_p^{p-1}k\\&=pt+C_p^1k^{p-1}+C_p^2k^{p-2}+\cdots+C_p^{p-1}k.\end{aligned}$$

而p为素数, 所以$C_p^i(i=1,\cdots,p-1)$能被p整除. 因而当$n=k+1$时, ①式左边也能被p整除. 所以对于一切自然数n, $n^{p-1}-1$都能被p整除.

注 本题结论称为费马定理.

18. 设直角三角形的两条直角边长为a, b, 斜边长为c. 证明: 对于满足$n\geqslant3$的一切自然数n, 都有

$$c^n>a^n+b^n.$$

解 $c^2=a^2+b^2$,

$$\therefore\quad c^3=ca^2+cb^2.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &c^3-(a^3+b^3)=ca^2+cb^2-a^3-b^3\\&=a^2(c-a)+b^2(c-b)>0,\end{aligned}$$

因而当$n=3$时原不等式成立.

设当$n=k$时原式成立, 即

$$c^k>a^k+b^k.$$

上式两边同乘以c, 得

$$c^{k+1}>ca^k+cb^k>a^{k+1}+b^{k+1},$$

$$(\because\quad c>a,\ c>b).$$

所以对于满足$n\geqslant3$的一切自然数n, 都有

$$c^n>a^n+b^n.$$

19. 用数学归纳法证明: 若平面上有n条直线两两相交, 但每三条都不交于同一点, 则它们把平面分成$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$个部分.

解 1条直线把平面分成2部分, 2条直线把平面分成4部分, 3条直线把平面分成7部分. 所以, 当$n=1, 2, 3$时, 都是把平面分成$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$个部分, 命题成立.

其次, 设k条两两相交, 但每3条不共点的直线把平面分成$\frac{1}{2}(k^2+k+2)$个部分. 现在再添一条直线, 于是在原来那些部分的基础上, 又增加了在这直线一侧的半平面被原有k条直线分成的$k+1$个部分. 而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(k^2+k+2)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k^2+3k+4)\\&=\frac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)+2],\end{aligned}$$

这正是$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$当$n=k+1$时的值. 所以若$n=k$时命题成立, 则$n=k+1$时命题也成立. 而$n=1, 2, 3$时命题成立, 所以当n为任意自然数时命题成立.

20. 有n个通过同一点的平面, 其中任何