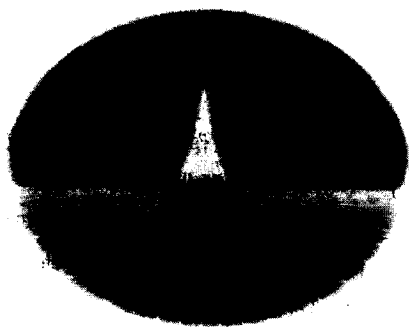




走近科学皇后

——数学趣谈

张景中 任宏硕 著

中国少年儿童出版社

封面设计:周建明

责任编辑:陈效师

图书在版编目(CIP)数据

走近科学皇后:数学趣谈/张景中,任宏硕著. —北京:
中国少年儿童出版社,1997.5

(爱科学、学科学、跨世纪科普丛书)

ISBN 7-5007-3570-7

I. 走… I. ①张…②任… III. 数学—青少年读物 IV.
01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 07956 号

走近科学皇后——数学趣谈

★

中国少年儿童出版社出版发行

廊坊人民印刷厂印刷 新华书店经销

★

787×1092 1/32 10.375 印张 232 千字

1997 年 9 月北京第 2 次印刷

印数 10001—14000 定价 9.80 元

ISBN7-5007-3570-7

凡有印装问题,可向承印厂调换

目 录

第一章 从计算机说起

计算机的“绝活”是什么?	(1)
计算机是怎样工作的?	(3)
数学的野心	(6)
不当数学家	(9)
关于科普读物	(12)

第二章 数是什么

古代的数字	(17)
记数法	(18)
有没有更简单的记数法	(21)
负数	(22)
度量衡与分数	(23)
无理数的诞生($\sqrt{2}$ 之谜)	(24)
虚数不虚	(26)
数系巡礼	(29)
实数连续性的奥秘	(31)

第三章 运算的规律

什么是运算	(34)
为什么 $-(-a) = a$	(35)
能交换与不能交换	(36)
代数运算的三个级别	(36)

第四章 怎样才能算得快

两位数加减法的心算	(38)
两位数平方的速算	(39)
两位数乘法的速算	(41)
接近 10、100、1000、10000 的数的乘法速算	(42)
除法的速算	(44)

第五章 对数、算尺与算图

用尺子算加减法	(46)
尺子也能做乘除法	(47)
对数的发现	(48)
形形色色的算图	(51)

第六章 恒等式与方程

等式不一定真的相等	(54)
千变万化的 0	(55)
鸡兔同笼与二元一次方程	(56)
用消元法解多元一次方程组	(58)
用二元一次方程解一元二次方程	(59)
卡丹公式的故事	(60)
两位早逝的天才——阿贝尔与伽罗瓦	(62)

求代数方程根的数值方法	(65)
地下水管的检修与方程求根	(67)
代数基本定理与数学王子高斯	(68)
贾宪三角	(70)
小高斯的算法	(71)
推垛计算与高阶等差数列求和	(72)
废钢铁回收与等比数列求和	(73)
恒等式能举例证明吗?	(75)

第七章 不等式与近似计算

近似与精确	(77)
不等式的妙用	(78)
不等式与连分数	(79)
连分数与闰年	(84)
定位	(85)
洗衣服与平均不等式	(87)
平均不等式种种	(90)

第八章 几个重要的数

圆周率 π	(94)
复利计算与自然对数的底 e	(98)
奇妙的黄金数—— ϕ	(100)

第九章 不定方程与同余式

百钱买百鸡	(104)
元旦是星期几? ——同余式	(105)
韩信点兵与中国剩余定理	(106)

中国剩余定理帮了电脑的忙	(108)
勾股数	(113)
费尔玛大定理——会生金蛋的鸡	(114)
第十章 集合的概念与运算	
集合——无所不在的角色	(117)
“白马非马”与“不能吃水果”	(118)
集合的并——“ $1 + 1 \neq 2!$ ”	(119)
集合的交——花生米上的球面曲线	(120)
笛卡儿积——扑克牌与电影票	(121)
“屈指可数”是多少？——有限集的子集	(123)
包含与排除的公式(容斥原理)	(124)
补集与对偶律——盘查库存就知道消耗	(126)
第十一章 关系、映射与等价	
什么是关系	(128)
关系和图	(129)
有序和无序	(132)
映射与分类	(136)
抽屉原则	(137)
拉姆赛理论	(138)
第十二章 无穷集的神秘	
伽里略的难题与康托的回答	(140)
希尔伯特的旅店	(141)
分数排队	(142)
实数比有理数多	(143)

一截线段上的点和整个空间的点一样多·····	(144)
------------------------	-------

第十三章 逻辑与推理

命题——不是错的,就是对的·····	(147)
只有0与1的算术和代数·····	(148)
推理的法则·····	(150)
逻辑代数与开关电路·····	(152)

第十四章 变量与函数

变量和常量·····	(154)
函数概念——算得出与算不出·····	(155)
长度、面积与体积·····	(157)
一个孩子怎能拉住一头牛·····	(158)
振动与波·····	(160)
正弦函数面面观·····	(161)
初等函数类·····	(163)
表示函数的方法·····	(164)
函数的脾气·····	(166)

第十五章 极限与连续性

无穷小之谜·····	(168)
捕捉无穷小——严格定义它·····	(169)
数列的极限·····	(171)
函数的极限·····	(173)
你为什么认识你的朋友——函数连续性·····	(175)
连续函数的介值定理·····	(176)
两块蛋糕的平分问题·····	(178)

第十六章 微分及其应用

飞矢不动与瞬时速度·····	(180)
切线的奥妙——一个点怎样决定直线·····	(182)
节约的数学与导数·····	(184)
求函数导数的方法·····	(187)
函数值的计算——台劳公式·····	(189)

第十七章 积分及其应用

面积之谜·····	(191)
抛物线下的面积·····	(192)
从割圆术到不可分量·····	(194)
定积分——用极限概念代替不可分量·····	(196)
体积的计算与祖暅原理·····	(198)
圆锥的体积·····	(200)
牛顿——莱布尼兹公式·····	(201)
求体积的万能公式——拟柱体公式·····	(203)

第十八章 直尺和圆规

理想化了的作图规则·····	(207)
规尺作图不可能问题之一——立方倍积·····	(209)
用蔓叶线解立方倍积问题·····	(211)
规尺作图不可能问题之二——三等分角·····	(214)
用蚌线解决三等分角问题·····	(216)
规尺作图不可能问题之三——圆代方·····	(218)
圆规直尺能干些什么? ·····	(220)
等分圆周与正多边形作图·····	(222)

规尺作图的限制与推广.....	(224)
单规作图.....	(225)
生锈的圆规.....	(230)
第十九章 数学推理的常用方法	
构造法——百闻不如一见.....	(242)
反证法——以子之矛,陷子之盾	(244)
数学归纳法——顺藤摸瓜,由近及远	(246)
枚举法——尽掘七十二疑冢.....	(250)
相似法——按图索骥,了如指掌	(252)
第二十章 形形色色的悖论	
毕达哥拉斯悖论.....	(255)
芝诺悖论.....	(256)
伽里略悖论.....	(256)
公孙龙悖论.....	(256)
先有鸡还是先有蛋.....	(257)
贝克莱悖论.....	(258)
秃头悖论.....	(259)
说谎者悖论.....	(260)
理发师悖论.....	(261)
预言家悖论.....	(263)
理查德悖论.....	(264)
意外的考试.....	(264)
第二十一章 概率与统计	
概率与统计.....	(266)

抛掷硬币的游戏——如何寻找概率·····	(267)
新弹坑与旧弹坑——独立事件·····	(269)
“碰运气”的骗局——随机变量与数学期望·····	(271)
为什么答案不同——条件概率·····	(273)
关于弦长的概率怪论·····	(276)
事件空间与概率的公理化定义·····	(277)
平均年龄的笑话·····	(280)
苹果的味道如何——抽样检验·····	(281)
池塘里有多少鱼? ·····	(283)
“中立原理”的谬误·····	(284)
概率论与情报·····	(286)
秘书问题——停止规则·····	(287)
保险数学·····	(289)

第二十二章 密码学

什么是密码? ·····	(291)
密码方案·····	(292)
破译密码·····	(294)
公钥密码·····	(297)
同余类·····	(305)
单向函数·····	(310)
RSA 体制 ·····	(314)

第一章 从计算机说起

计算机的“绝活”是什么？

现在计算机已经普及了。许多小朋友都会操作计算机。没有操作过的也都看过别人怎样操作计算机。最幼小的孩子也都听说过计算机的本领。计算机会加减乘除，会自动解题，还会画画；如果把计算机安在机器人的头上，他还会干活；如果把计算机安在导弹的头上，它还会自动寻找目标……计算机的确了不起。

那么，计算机为什么会有这么大的本领呢，它真正的奥秘是什么？我们的回答是：计算机的奥秘就是一个“快”字。听了这个回答，许多人不以为然，觉得“快”算不得什么真本领。马比人跑得快，可是马的本领没有人大。

下面，让我们举个例子说明，“快”就能做出惊人的事。一个学生叫李明。他带了300元钱到市场上去买光盘。别人告诉他，这个市场上小偷很多。于是他始终谨慎地把手插在裤兜里握着钱。走着走着，一只小虫子碰了他的眼角一下，李明抬手揉一下眼睛的功夫，兜里的钱没了。李明此行虽然没有买到光盘，却体验了“快”的威力。

当然这个例子是个玩笑，可是玩笑中往往包含着许多道

理。下面是一位物理学家的玩笑。他说“快”可以让历史重演。大多数人听了都会觉得这位物理学家是在侃大山，吹牛皮。不过在责怪他之前，我们最好先听听他的故事。

譬如我们现在想看看古代原始人的居住环境和生活动态，怎么办呢？原始人并不知道现代的商店里可以买到摄像机，他们也就没有为我们后代留下一个镜头。时至今日，到哪里去为原始人拍摄镜头呢？

摄像机拍摄景物的过程是这样的：先由太阳（或其它光源）把光线射到景物（房屋，人体）上，经过反射，景物上的反射光线到达摄像机的胶片上，于是在胶片上留下了明暗和色彩各异的图像。当时，原始人的面前虽然没有架着一台摄像机，而从他们身上反射出来的光线总还是有的，而且这些反射光在太空中沿着直线一直还在传播着。如果某个记者拥有一艘超光速的飞船，派他去追赶那些光线，跑到那些光线的前面，架起像机，就能把古代原始人的镜头摄下来。通过电台一播放，大家就可以重新看到我们老祖宗当时的生活片断了。

这也是一个玩笑。因为人类至今还没有发现比光更快的速度，更谈不到造一艘超光速的飞船了。但这至少让我们品味到“快”会产生许多我们意想不到的结果。

下面举一个走迷宫例子。人家给你设计了一个迷宫，也许你走了一个多钟点还走不出来，甚至整整走了一天，由于过度的疲劳而认输。但是，计算机却可以在几秒钟内就走通。计算机是怎么走的呢？随便你怎么画迷宫，画出来的通道和

叉口总是有限的。计算机用的是最笨的方法：它把所有可能的叉口和路径都走了一遍，最后终于从某条路径走通了。表面上，计算机给人的印象是有“灵”性（即智能性）。当它宣告胜利的时候，知根知底的人并不佩服它的聪明，但是佩服它的速度。

通过这些故事和例子，也许在你的脑子里已建立起一个新概念：只要速度快到一定的程度，天下许多难事也是有希望解决的。

计算机是怎样工作的？

小朋友一定很想具体知道一台计算机究竟是怎样利用“快”而工作的？

虽然计算机的速度非常快，但它毕竟是个死的东西，要它干活，你就必须告诉它怎么干。例如一台电脑的屏幕横向有 640 个点，纵向有 400 个点。若把屏幕看作直角坐标系的第一象限，为了与通常的直角坐标系完全一致，我们把原点定在左下角处。屏幕的最下面一行叫做第 0 行，最上面一行叫做第 639 行；屏幕最左列叫做第 0 列，最右列叫做第 399 列。现在想画一个圆周的四分之一部分，圆心定在左下角的原点处，其坐标是 $(0, 0)$ ，半径定为 80 个点，颜色定为红色。要画这样的圆周，你就得告诉计算机，在屏幕的第几行第几列的交叉点处显示一个红点，至少你得告诉它近 120 个点的位置。

如果我们有功夫跟计算机说 120 句话,恐怕我们自己用圆规早就把这个圆周画出来了。计算机显亮点的动作虽然快,整体上似乎有劲使不上。它老得在那里等着我们说话。能不能把计算机速度快的特点进一步利用起来,把我们跟它说的 120 句话也由计算机来替我们说呢?

设圆周上点的坐标是 (a, b) , 假定现在从圆周的北极点逆时针方向画一小段圆周。首先北极点的坐标为 $(0, 80)$, 即 $a = 0, b = 80$, 此时 a, b, r (半径), 它们适合勾股定理:

$$a^2 + b^2 - r^2 = 0, \quad 0^2 + 80^2 - 80^2 = 0.$$

下一步让横坐标增加 1, 即 a 从 0 变到 1, 根据勾股定理,

$$b = \sqrt{r^2 - a^2},$$

此时, $b = \sqrt{6400 - 1} = \sqrt{6399}$. 要让计算机自己算出 6399 的平方根的近似值也不困难, 但是没有必要那样精确, 因为屏幕上的点坐标只能取整数值, 所以也只能为 b 选取一个合适的整数。

从北极点出发, 当 a 增加时, b 应该减少, 但是从上面的算式中可以看出, 当 a 增加了 1, b 并不一定减少 1, 实际上, b 只减少了零点零几。那么 b 取原来的值 80 好呢, 还是取 $b = 79$ 好呢? 此时存在两种可能的选择, 应该让计算机自己把 b 的两种可能的值 80, 79 分别代入勾股公式中算一算:

$$(1^2 + 80^2) - 80^2 = 1$$

$$(1^2 + 79^2) - 80^2 = -158$$

显然前者误差小, 后者误差大, 此时计算机自己就知道 b

该选那个值了。

当 a 再增加 1 时, 即 $a = 2$ 时, 仍然要判断一下, 采用原来的 b 好呢还是让 b 减少 1 好呢, 再次算一算:

$$(2^2 + 80^2) - 80^2 = 4$$

$$(2^2 + 79^2) - 80^2 = -155$$

计算机照样能判断, 还是 b 保持原数好! 即 $a = 2$ 时, $b = 80$ 。

就这样, 计算机每次亮完一个点, a 就自动增加 1, 接着计算机就把原来的 b 和 $b - 1$ 代入勾股公式中算一算, 看看哪一个结果误差小, 就选用哪一个 b 。

依此进行下去, 计算机画完一个点, 它自己就会判断下一个点应该画在哪里。无须有人在一旁絮絮叨叨说个没完。

细心的小朋友一定还会问两个问题: 第一, 计算机会算这些算式吗? 第二, 嘱咐计算机的话它能听得懂吗? 这个问题说来话长, 我们打算在此细细讨论, 只是粗略地告诉大家。第一个问题, 我们从日常见到的掌上计算器里已经看到, 计算机做加减乘除可是个行家, 你不必为它担心。第二个问题, 计算机可以听懂一百多个机器语汇, 只须你把嘱咐的话尽可能数学化之后, 它就能听懂了。关键的问题是你得有相当的数学水平。如果连你自己都不知道如何运用勾股定理, 更无法叫机器去画圆了。

还是那句老话: 马跑得再快也没有人的本事大。

古代一位国王, 在一次庆典大会上观看赛马时宣布: 谁的马跑得快将奖以十两黄金。当两名赛手甲和乙出场之后, 甲

暗暗地想：自己的马比乙的马跑得快，准能获胜。这次是国王亲自牵来了他们的马。比赛的炮声响过之后，正当大家期望着奔腾飞越的场面出现的时候，却发现乙根本没有勒紧缰绳让马跑。原来国王把他们的马牵错了，甲骑的是乙的马，而乙骑的是甲的马，最后是甲先到目的地，但是黄金却奖给了乙的马。这场比赛，最终还是以智取胜，不以快取胜。

虽然“快”是一个很得意的工具，但是最使人着急的却是如何利用这个“快”，在不同的场合有不同的使法，运用得才可取胜。大自然本身就一个大迷宫，但是它的通道和叉口有无限多个，要指望计算机这个大笨蛋走遍所有的路径就会让人大失所望。譬如天气预报，破译密码，……人们总嫌计算机干得太慢，甚至三维动画我们都觉得现在的计算机还不能完全胜任。科学家正从两个方面着想，一方面继续提高计算机的速度，另一方面研究和探讨更好的算法。前者给人类提供的便利是相对的，而后者给人类提供的便利是永恒的！真正驾驭计算机的还是数学。

数学的野心

上面我们说到，要真正驾驭计算机得具备相当的数学水平。但是学数学并不单单是为了开发计算机。在计算机诞生之前，数学在科学事业上的贡献早就已经为人类所叹服。正因为此，作为天文学家，物理学家和数学家的高斯才敢言：数学是科学的皇后。

1781 年以前,人类只知道六颗行星:水星,金星,地球,火星,木星和土星。后来天文学家对这些行星与太阳的距离,经过一些数学变换之后作排队时发现:在火星和木星之间存在一个跳档,预测应该还有中间的行星。经过 20 年的寻找,终于找到了第一颗小行星:谷神星。到现在,人类已经从这个跳档中找到了 2000 多颗小行星。

1886 年德国化学家温克勒尔找到了一种新的化学元素——锗,他用实验测出锗的原子量、比重和其它一些属性。而在 15 年以前,俄罗斯化学家门捷列夫在他的化学元素周期表上,早已经对这个尚未出世的新元素准确地计算出它的有关数据。从此人们有目的地把一大群在周期表上露了面却又不被人类所知晓的元素发掘出来。

1864 年物理学家麦克斯韦发表了电磁场理论,麦克斯韦的理论实际上就是一组数学方程式,用麦克斯韦方程组可以推断出:光也是一种电磁波。当时的物理学家很少有人能认同他的学说,在晚年听他讲课的只有二名研究生。20 多年之后,也就是在麦克斯韦去世十年后,赫芝才用实验证实了电磁波的存在。

1905 年和 1915 年爱因斯坦相继发表了他的狭义相对论和广义相对论。从他的一堆数学公式中可以算出,光线经过太阳旁边射到地球时,光线将因太阳的引力作用而偏离原直线轨道 1.75 秒。从 1919 年开始,科学家就不断地利用日蚀机会实地观测,所测到的平均值是 1.89 秒,到 1964 年,才有科学家用雷达实验的方法作出最精确的测量。而爱因斯坦预