

0441.4/27

电磁场理论

全 泽 松

7Y11111/19



• 1990 •

内 容 简 介

本书在物理学的基础上,系统地阐述了电磁场的基本理论,内容包括:静电场、静电场边值问题解法、恒定电流与恒定磁场、时变电磁场、电磁波的传播和辐射、狭义相对论以及运动电荷的辐射等,并有较多的例题和习题。

本书可作为电磁场工程、微波技术、电波与天线、无线电物理等专业电磁场理论课程的教材或教学参考书,也可供其他有关专业的教师、学生参考。

高等学校教学用书

电磁场理论

全 泽 松

*

电子科技大学出版社出版

(中国成都建设北路二段四号)

电子科技大学出版社印刷厂印刷

四川省新华书店经销

*

开本 787×1092 1/16 印张 21.375 字数 568千字

版次 1987年4月第一版 印次 1990年10月第二次印刷

印数 4701—6100册

中国标准书号 ISBN7-81016-218-7/TN·56

(15452·96)

定价: 6.60元

前 言

本书是以作者在成都电讯工程学院电磁场工程系讲授电磁场理论课程所编写的讲义为基础，根据1982年11月电子工业部电磁场与微波技术教材编审委员会，电磁场理论编审小组会议拟定的编写大纲编写的。

本书在物理学的基础上，系统地阐述了电磁场的基本理论，着重论述了电磁现象的基本物理概念和方法。全书共分八章：第一章静电场；第二章静电场边值问题解法；第三章恒定电流与恒定磁场；第四章时变电磁场；第五章电磁波的传播；第六章电磁波的辐射；第七章狭义相对论；第八章运动电荷的辐射。书中编选了较多的例题和习题，能使读者在学习过程中得到更多的启发和训练，这对提高电磁场问题的分析能力是有益的。书末有两个附录，以便读者查对。

本书所要求的数学工具主要是矢量分析和数学物理方法，要求读者在掌握这些数学知识的基础上进行学习，因此书中不再详细讨论数学问题。

本书适用于课堂教学为80学时，如果课堂教学不足80学时，可根据具体情况，对有关章节（特别是有“*”）的内容加以取舍。

在本书的编写过程中，谢处方教授、饶克谨教授和袁敬宏副教授，对全书进行了仔细的审阅，并提出了许多宝贵意见，值此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中的缺点和错误在所难免，希望使用本书的有关院校师生和广大读者批评指正。

全泽松

一九八五年十月

于成都电讯工程学院

绪 论

电磁场理论是在物理学的基础上系统地阐述电磁场的基本理论，它的研究对象是电磁场的基本性质、运动规律以及它与带电物质的相互作用。

在自然界、工业生产和科学技术中，广泛存在着与电磁场有关的问题。例如：电力系统、电磁探矿、粒子加速器、无线电技术、受控热核反应等都涉及到宏观电磁场理论的问题。因此，掌握电磁场的基本理论对学好专业课或对今后的生产实践和科学实验都具有重大意义。

电磁场理论是在人类对电磁现象进行的长期观察和进行生产活动的基础上，不断总结发展起来的。十八世纪中叶以后，在工业生产发展的推动下，人们开展了对自然科学的实际探索，使电磁学得到了较快的发展。人们研究了静电、静磁和电流等现象，积累了大量的实验资料，总结出了适用于各个特殊范围的、相互独立的实验定律，如库仑定律、毕奥-萨伐尔定律等。但是，电磁学的重大进展却是在人们认识到电现象和磁现象之间存在着密切的联系之后。1820年奥斯特发现了电流的磁效应，1831年法拉第发现了著名的电磁感应现象，至此，电和磁之间的内在联系才开始被人们所认识。这些研究成果后来广泛地应用于生产实践，推动了电磁理论的进一步发展。1864年麦克斯韦系统地归纳、推广了上述各个实验定律，用统一的理论概括了电磁场的运动规律，总结出了麦克斯韦方程组，并从理论上预言了电磁波的存在。1888年赫兹用实验方法产生了电磁波，证实了麦克斯韦的理论。人们在这些理论的指导下，通过进一步的实践，发明了无线电。到今天，电磁波的应用已广泛而深入地渗入科学的各个领域。这在物理学发展史上是从实践上升为理论，理论再指导实践的一个典型范例。

十九世纪中叶，当经典力学、热力学和电磁学的规律总结出来以后，人们以为物理学的发展已达到顶峰，一切基本原理都已解决，剩下的只是解方程的问题了。但这种看法接着就被新的实验事实所否定。十九世纪末到二十世纪初，人们在研究运动介质中的电磁现象时，发现经典的时空理论和牛顿力学在物体作高速运动时与事实不符。1905年，爱因斯坦在前人工作的基础上，分析了经典力学与电磁学实验之间的矛盾，提出了崭新的时空观念，建立了狭义相对论。从此电磁理论在新的时空观的理论基础上发展成更加完整的、适用于一切惯性参考系的理论。

另外，随着研究范围由宏观逐渐深入到微观世界，人们发现许多实验结果用经典电磁理论已不能解释，用经典电磁理论计算的结果也不能正确反映客观实际，因此产生了新的微观电磁理论——量子电动力学。可见，客观世界的变化运动永无止境，人们在实践中对于真理的认识也就不会完结。因而已发现的定律、方程等，仅是在一定范围和一定条件下起作用的相对真理，它们仅仅标志着整个认识过程中的一定发展阶段。

随着科学技术的不断发展，电磁学的应用前景必定会十分广阔，电磁学本身也将得到丰富和发展。

本书前六章是传统的电磁场理论，包括静电场、恒定磁场、随时间变化的电磁场等。其中前四章专门阐述麦克斯韦电磁理论的发展，随后的五、六两章应用麦克斯韦方程组来讨论宏观电磁现象；最后两章是相对论性带电粒子电动力学，包括狭义相对论、运动电荷的辐射等。

目 录

第一章 静电场

§ 1.1 库仑定律	(1)
§ 1.2 静电场的基本方程	(4)
§ 1.3 静电场的势及其微分方程	(5)
§ 1.4 静电场中导体的性质	(10)
§ 1.5 电容和部分电容	(11)
1.5.1 电容器和电容	(11)
1.5.2 部分电容	(12)
§ 1.6 电势的多极展开	(14)
§ 1.7 电荷体系在外电场中的能量	(19)
§ 1.8 介质的极化	(20)
§ 1.9 介质中静电场的基本方程	(22)
§ 1.10 静电场的边界条件	(24)
1.10.1 电感应强度 $\mathbf{D}$ 的法向分量的边界条件	(25)
1.10.2 电场强度 $\mathbf{E}$ 的切向分量的边界条件	(26)
* § 1.11 分子极化率与电极化率	(27)
* § 1.12 分子极化率的模型	(28)
§ 1.13 静电能量	(30)
1.13.1 电荷系统的能量	(30)
1.13.2 静电场能量	(32)
§ 1.14 静电力	(33)
1.14.1 导体上的力	(33)
1.14.2 介质体上的力	(35)

习 题

第二章 静电场边值问题解法

§ 2.1 静电场的唯一性定理	(41)
§ 2.2 分离变量法——直角坐标系中拉普拉斯方程的解	(44)
§ 2.3 分离变量法——圆柱坐标系中拉普拉斯方程的解	(54)
§ 2.4 分离变量法——球坐标系中拉普拉斯方程的解	(68)
§ 2.5 镜像法	(80)
2.5.1 平面镜像	(81)
2.5.2 球面镜像	(85)
2.5.3 柱面镜像	(91)
§ 2.6 格林函数法	(93)
2.6.1 格林函数	(93)

2.6.2	用格林函数表示边值问题的解	(94)
2.6.3	简单边界的格林函数	(95)
2.6.4	用格林函数求边值问题	
§ 2.7	复变函数法	(96)
2.7.1	复电势函数法	(100)
2.7.2	保角变换法	(106)
*2.7.3	施瓦兹变换	(112)
§ 2.8	有限差分法	(118)

习 题

第三章 恒定电流与恒定磁场

§ 3.1	恒定电流	(126)
3.1.1	电流密度矢量	(126)
3.1.2	电荷守恒定律	(127)
3.1.3	欧姆定律	(128)
3.1.4	焦耳定律	(129)
*3.1.5	弛豫时间	(129)
3.1.6	恒定电场	(130)
3.1.7	恒定电流场的边界条件	(130)
3.1.8	恒定电流场与静电场的对比	(131)
§ 3.2	毕奥-萨伐尔定律 安培定律	(133)
§ 3.3	恒定磁场的基本方程	(136)
§ 3.4	恒定磁场的矢势及其微分方程	(138)
§ 3.5	矢势的多极展开	(143)
§ 3.6	电流分布在外磁场中的能量	(145)
§ 3.7	物质的磁化	(146)
§ 3.8	介质中恒定磁场的基本方程	(148)
§ 3.9	恒定磁场的边界条件	(150)
3.9.1	磁场强度 $\mathbf{H}$ 的切向分量的边界条件	(150)
3.9.2	磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的法向分量的边界条件	(150)
§ 3.10	恒定磁场的标势及其微分方程	(154)
§ 3.11	法拉第感应定律	(159)
§ 3.12	电感	(161)
§ 3.13	静磁能量	(164)
3.13.1	电流回路系统的能量	(164)
3.13.2	静磁场能量	(165)
§ 3.14	磁力	(166)
3.14.1	电流回路上的力	(166)
3.14.2	介质体上的力	(168)

习 题

第四章 时变电磁场

§ 4.1	麦克斯韦方程组	(176)
-------	---------	-------

4.1.1 位移电流 麦克斯韦方程组	(176)
4.1.2 介质的电磁性质关系	(178)
4.1.3 洛伦兹力公式	(179)
§ 4.2 不同媒质分界面上的边界条件	(179)
§ 4.3 电磁场的波动方程	(180)
§ 4.4 电磁场的矢势和标势	(183)
4.4.1 用势描述电磁场	(183)
4.4.2 规范变换和规范不变性	(184)
4.4.3 达朗贝尔方程	(185)
§ 4.5 达朗贝尔方程的求解 推迟势	(187)
§ 4.6 电磁场的能量 坡印廷定理	(188)
* § 4.7 电磁场的动量 动量守恒定律	(193)

习 题

第五章 电磁波的传播

§ 5.1 非导电媒质中的电磁波	(197)
§ 5.2 波的偏振	(200)
§ 5.3 电磁波在介质分界面上的反射和折射	(202)
5.3.1 反射、折射的基本规律	(203)
5.3.2 反射波振幅、折射波振幅与入射波振幅之间的关系	(204)
5.3.3 功率反射系数和功率透射系数	(206)
5.3.4 布儒斯特角	(208)
5.3.5 全反射 临界角	(208)
§ 5.4 色散	(211)
5.4.1 介质的色散	(211)
5.4.2 导体的色散	(212)
5.4.3 等离子体的色散	(213)
§ 5.5 导电媒质中的电磁波	(214)
§ 5.6 电磁波在导体面上的反射和透射	(217)
§ 5.7 群速度	(221)
* § 5.8 等离子体的介电张量 等离子体中的电磁波	(223)
* § 5.9 铁氧体的磁导率张量 铁氧体中的电磁波	(228)
5.9.1 磁导率张量	(228)
5.9.2 铁氧体中的电磁波	(231)
§ 5.10 有界空间中的电磁波 谐振腔	(234)
5.10.1 理想导体的边界条件	(234)
5.10.2 谐振腔内的电磁场	(235)
5.10.3 谐振频率	(238)
5.10.4 品质因数	(239)
§ 5.11 波导管	(239)
5.11.1 矩形波导中的电磁波	(240)
5.11.2 截止频率	(242)

5.11.3 波导中的传输功率	(244)
5.11.4 衰减	(245)

习 题

第六章 电磁波的辐射

§ 6.1 推迟势的多极展开	(250)
§ 6.2 电偶极场和电偶极辐射	(253)
§ 6.3 磁偶极辐射和电四极辐射	(257)
6.3.1 磁偶极辐射	(257)
6.3.2 电四极辐射	(258)
§ 6.4 线天线辐射	(260)
6.4.1 天线上的电流分布	(260)
6.4.2 半波天线	(260)
6.4.3 天线阵	(262)
§ 6.5 电磁波的衍射	(264)
6.5.1 衍射问题	(264)
6.5.2 基尔霍夫公式	(265)
6.5.3 小孔衍射	(266)

习 题

第七章 狭义相对论

§ 7.1 伽利略变换和经典时空观	(271)
§ 7.2 洛伦兹变换	(273)
7.2.1 间隔不变性	(273)
7.2.2 洛伦兹变换	(274)
§ 7.3 相对论的时空性质	(276)
7.3.1 时空结构	(276)
7.3.2 因果律和相互作用的最大传播速度	(277)
7.3.3 同时的相对性	(278)
7.3.4 运动时钟的延缓	(279)
7.3.5 运动尺缩短	(280)
7.3.6 速度变换公式	(280)
§ 7.4 物理规律协变性的数学形式	(282)
7.4.1 三维空间的正交变换	(282)
7.4.2 物理量按空间变换性质的分类	(284)
7.4.3 洛伦兹变换的四维形式	(285)
7.4.4 四维矢量和张量	(286)
7.4.5 张量代数	(289)
7.4.6 四维矢量微商算符	(290)
7.4.7 物理规律的协变性	(291)
§ 7.5 电磁规律的相对论形式	(291)
7.5.1 四维电流密度矢量	(291)
7.5.2 四维势矢量	(292)

7.5.3	电磁场张量	(293)
7.5.4	麦克斯韦方程组的协变形式	(294)
7.5.5	电磁场的变换	(295)
*7.5.6	四维洛伦兹力密度、电磁场的能量、动量守恒方程的协变形式	(298)
* § 7.6	相对论力学	(300)
7.6.1	四维动量	(300)
7.6.2	质量和能量的关系	(301)
7.6.3	动量和能量的关系	(302)
7.6.4	相对论力学方程	(302)
7.6.5	洛伦兹力	(303)
习 题		
*第八章 运动电荷的辐射		
§ 8.1	运动带电粒子的势和电磁场	(307)
8.1.1	李纳-维谢尔势	(307)
8.1.2	任意运动带电粒子的电磁场	(308)
8.1.3	匀速运动带电粒子的电磁场	(311)
§ 8.2	加速运动带电粒子的辐射	(313)
8.2.1	低速运动情形	(313)
8.2.2	高速运动(即相对论性运动)情形	(314)
§ 8.3	带电粒子的电磁场对粒子的反作用	(316)
8.3.1	电磁质量	(316)
8.3.2	辐射阻尼	(317)
§ 8.4	电子对电磁波的散射	(318)
8.4.1	自由电子对电磁波的散射	(318)
8.4.2	束缚电子对电磁波的散射	(320)
§ 8.5	经典电磁理论的适用界限	(321)
习 题		
附录一	矢量与张量	(323)
附录二	国际单位制和高斯单位制中的主要公式对照表	(327)

第一章 静电场

我们从静电场开始讨论电磁场理论。静电场通常是指相对于观察者静止的电荷在其周围空间所激发的电场，它不随时间变化。

本章从实验定律——库仑定律出发，建立描述真空中静电场性质的基本方程。在引入电势及其微分方程之后，紧接着研究电多极子、介质中场的基本方程以及边界条件。静电场的边值问题在第二章讨论。本章最后两节研究静电场的能量和力。

§ 1.1 库仑定律

库仑定律是静电场理论的基础，它是实验材料的概括。这一定律指出：真空中两个静止的点电荷之间的相互作用力 $\mathbf{F}$ 的大小与它们的电量 q' 和 q 的乘积成正比，与它们之间的距离 R 的平方成反比，作用力的方向沿两者间的连线；两个点电荷同号时为斥力，异号时为吸力。设 $\mathbf{F}_{q' \rightarrow q}$ 代表 q' 给 q 的力， $\mathbf{r}'$ 是电荷 q' 的位置矢量， $\mathbf{r}$ 是电荷 q 的位置矢量，则 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 表示由 q' 到 q 的距离矢量，用 $\mathbf{R}$ 表示之，即 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ，如图 1.1.1 所示。于是，库仑定律表示为如下形式

$$\mathbf{F}_{q' \rightarrow q} = k \frac{q'q}{R^2} \mathbf{R} \quad (1.1.1)$$

式中 $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ ， k 为比例系数，它的数值取决于式中各量的单位。在 MKSA 单位制中，由于其中所有物理量的单位都已选定（电量的单位为库仑，距离的单位为米，力的单位为牛顿），所以比例系数 k 的值为 $1/4\pi\epsilon_0$ ，则式(1.1.1)为

$$\mathbf{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{R} \quad (1.1.2)$$

式中 ϵ_0 称为真空的电容率或真空的介电常数，它的值为 8.85418×10^{-12} 法/米(库仑²/牛顿·米²)。

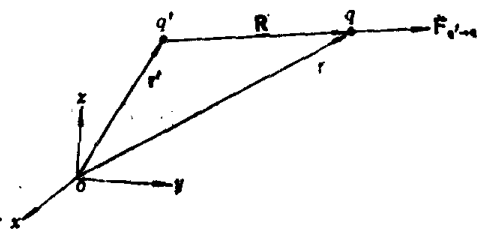


图 1.1.1

设有 N 个点电荷 q_1' 、 q_2' 、 $\dots$ 、 q_N' 分别位于 $\mathbf{r}_1'$ 、 $\mathbf{r}_2'$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{r}_N'$ 处，它们同时作用在位于 $\mathbf{r}$ 处的点电荷 q 上的力，可根据库仑定律，并应用力的迭加原理求得为

$$\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{q_i' \rightarrow q} = \sum_{i=1}^N \frac{q q_i' \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i' \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} \quad (1.1.3)$$

式中 $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i'$ 是从 q_i' 到 q 的距离矢量， $\mathbf{r}_i'$ 是 q_i' 的位置矢量， $\mathbf{r}$ 是 q 的位置矢量。上式表明， N 个点电荷 q_1' 、 q_2' 、 $\dots$ 、 q_N' 同时作用在点电荷 q 上的力等于各电荷单独作用在它上的力的矢量和。

对于在一个体积 V 内连续分布的电荷，作用在点电荷 q 上的力，可仿照上面点电荷系的

作法, 将体积 V 细分为很多个小体积元 dV' , 其中的电荷为 dq' 。这些电荷 dq' 同时作用在 q 上的力等于各元电荷单独作用在它上的力的矢量和。于是, 在一个小体积元 dV' ① 内的电荷为 $dq' = \rho(r')dV'$, 其中 $\rho(r')$ 是单位体积内的电荷, 称为体电荷密度。因此, 连续分布电荷作用在点电荷 q 上的力为

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')\mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (1.1.4)$$

上式积分遍及电荷分布的体积 V 。

同理, 在一些场合下电荷可以理想化为在表面上的分布。引入面电荷密度 σ , 定义为单位面积上的电荷, 即 $dq' = \sigma(r')dS'$ 。于是, 连续分布面电荷作用在点电荷 q 上的力则为

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')\mathbf{R}}{R^3} dS' \quad (1.1.4a)$$

同理, 电荷沿一根线连续分布时, 可引入线电荷密度 λ , 定义为单位长度上的电荷, 即 $dq' = \lambda(r')dl'$ 。于是, 连续分布线电荷作用在点电荷 q 上的力则为

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(r')\mathbf{R}}{R^3} dl' \quad (1.1.4b)$$

应当指出, 人们曾经对库仑定律作出不同的解释。一种观点认为两个点电荷之间的作用力是直接的超距作用, 即一个点电荷把作用力不通过中间媒质直接施加于另一点电荷上; 另一种观点则认为两点电荷之间的相互作用力是通过一种中间媒介物质——电场来传递。实践证明, 后者是正确的。每一个电荷都在自己的周围空间激发电场, 该电场对在其中的电荷都有作用力, 这个力称为静电力或电场力。若把正的试验电荷 q 在电场中某点受到的作用力 $\mathbf{F}$ 与该电荷量的比值定义为该点的电场强度, 即

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1.1.5)$$

则根据库仑定律可得点电荷 q' 所激发的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q'\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (1.1.6)$$

从式(1.1.6)可知, 电场强度与点电荷 q' 成线性比例关系。所以, 在若干个点电荷的电场中, 某点的电场强度 $\mathbf{E}$ 等于各个点电荷分别在该点产生的电场强度的矢量和, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_N = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \quad (1.1.7)$$

这就是静电场的迭加原理。

连续分布体电荷的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')\mathbf{R}}{R^3} dV' \quad (1.1.8)$$

同理, 我们也可以写出连续分布的面电荷、线电荷的电场强度表达式。

点电荷密度的数学表示——狄拉克 δ 函数简介

① 所谓小体积元 dV' 的意思是: 在宏观上(实验室尺度)是小的, 在微观上(原子尺度)是大的, 所以它包含有很多原子或分子。

点电荷可以视为一个体积很小而密度很大的带电球体的极限。先看一个带单位电荷的小球体。设其中心在坐标原点，球的半径为 a ，则它的电荷密度 $\rho(x, y, z)$ 在 $r < a$ 的区域具有很大的值，而在 $r > a$ 的区域等于零。当 $a \rightarrow 0$ 时，在 $r < a$ 的范围内， $\rho(r) \rightarrow \infty$ ，而总电荷保持为1个单位，这样的密度分布函数 $\rho(x, y, z)$ 用符号 $\delta(x, y, z)$ 表示，称为 δ 函数。

如果单位点电荷的位置不在坐标原点而在 (x', y', z') 处，则它的密度分布函数，即 δ 函数表示为

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad (1.1.9)$$

它是一个除 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 点外处处为零的函数，并具有下列性质

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0 & (\mathbf{r} \neq \mathbf{r}') \\ \infty & (\mathbf{r} = \mathbf{r}') \end{cases} \quad (1.1.10)$$

$$\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} 0 & (\mathbf{r}' \text{ 不在 } V \text{ 内}) \\ 1 & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 内}) \end{cases} \quad (1.1.11)$$

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV = \begin{cases} 0 & (\mathbf{r}' \text{ 不在 } V \text{ 内}) \\ f(\mathbf{r}') & (\mathbf{r}' \text{ 在 } V \text{ 内}) \end{cases} \quad (1.1.12)$$

式中 $f(\mathbf{r})$ 是任意标量函数，且在 $\mathbf{r}'$ 处连续。上式表明， δ 函数具有某种挑选作用，即将 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 与任意函数相乘并积分时(积分区域应包含 $\mathbf{r}'$)，即可挑选出 $f(\mathbf{r})$ 在 $\mathbf{r}'$ 处的值。

若在 $\mathbf{r}'$ ，即在 (x', y', z') 处的点电荷，不是单位点电荷，而具有电量 q ，则电荷密度分布表示为

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.1.13)$$

对于分离的 N 个点电荷，则电荷密度分布表示为

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.1.14)$$

上式表示位于 $\mathbf{r}_i$ 点的 N 个点电荷 q_i 的分布。将上式代入式(1.1.8)，并利用 δ 函数的性质，即得点电荷系的总电场强度的表达式(1.1.7)。

例 有一半径为 a 的均匀带电球壳，如图1.1.2所示。设球壳面上所带的电荷面密度为

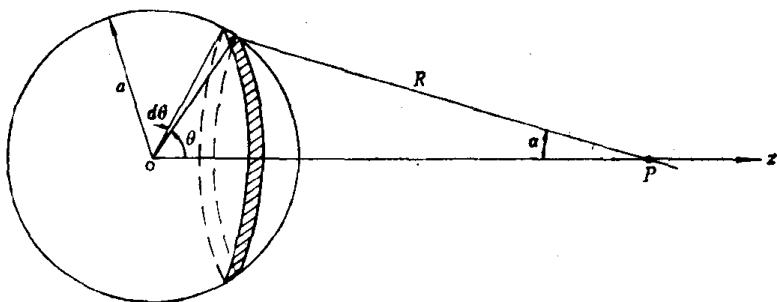


图 1.1.2

σ ，求极轴上任一点 P 的场强。

解 选取球心在原点的球坐标系。为了计算极轴上任一点 P 的场强，我们取半径为 $a \sin \theta$ 、宽度为 $a d\theta$ 的圆环，如图1.1.2所示。由于圆环对 z 轴的对称性，因而电荷分布也对 z 轴对称，故电场强度只有轴向分量。圆环面积 $dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ ，其上的电荷 $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ 。根据式(1.1.8)，这个元电荷 dq 在 P 点产生的场强为

$$dE_z = \frac{2\pi a^2 \sigma \sin \theta \cos \alpha dq}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

由图可知， $\cos \alpha = (z - a \cos \theta)/R$ ， $R = (z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{1/2}$ ，所以

$$dE_z = - \frac{q(z - a \cos \theta) d \cos \theta}{8\pi\epsilon_0(z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{3/2}}$$

式中 $q = 4\pi a^2 \sigma$ ，即球壳所带的总电荷。在 P 点的总电场为

$$E_z = - \int_0^\pi \frac{q(z - a \cos \theta) d(\cos \theta)}{8\pi\epsilon_0(z^2 + a^2 - 2az \cos \theta)^{3/2}} \\ = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & (z > a) \\ 0 & (z < a) \end{cases}$$

§ 1.2 静电场的基本方程

根据式(1.1.8)，我们可以导出描述静电场性质的基本方程。为此，利用关系 $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\mathbf{R}}{R^3}$ ，则式(1.1.8)变成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV' \quad (1.2.1)$$

两端取散度，有

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) dV'$$

再利用关系 $\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ，上式变成

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'$$

再应用 δ 函数的挑选性质，有

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \quad (1.2.2)$$

这个方程称为高斯定理的微分形式，是静电场的一个基本方程，上式表示空间某一点 $\mathbf{E}$ 的散度与该点的电荷密度 ρ 有关，而与其它点的电荷分布无关。应当指出， $\mathbf{E}$ 的散度与 $\mathbf{E}$ 本身是有原则区别的，某点的 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 与其它点的电荷分布无关，并不说明该点的 $\mathbf{E}$ 也与其它点的电荷分布无关。

在体积 V 内，将上式积分，有

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

上式左端利用散度定理，可得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (1.2.3)$$

这就是高斯定理的积分形式，它表明电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 穿过任意闭合面 S 的电通量等于这个闭合面 S 所包围的总电荷与 ϵ_0 之比。利用高斯定理积分形式可求得电荷分布有某些对称性时的电场分布。

下面我们来导出 $\mathbf{E}$ 的另一个基本方程，即 $\mathbf{E}$ 的旋度方程。为此，我们将式(1.2.1)改写成

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1.2.4)$$

两端取旋度, 有

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV'$$

由于任何一个连续的标量函数的梯度的旋度恒等于零, 所以上式变为

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.5)$$

上式为静电场的第二个基本方程, 它表明静电场具有这样一个基本特性, 即电场强度的旋度处处为零。

如果把式(1.2.5)在任意闭合环路 C 界定的面 S 上积分, 即

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.2.6)$$

利用斯托克斯定理

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

这样式(1.2.6)变为

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.2.7)$$

上式就是式(1.2.5)的积分形式。它表明, 在静电场中 $\mathbf{E}$ 沿任意闭合环路 C 的线积分等于零。具有这种性质的场称为保守力场或势(位)场, 从而可以引出电势(位)的概念。

例 在半径为 a 的球体内, 均匀分布着电荷, 总电量为 q , 求各点的电场强度, 并计算电场强度 $\mathbf{E}$ 的散度和旋度。

解 由高斯定理可求得电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad (r > a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \mathbf{r} \quad (r < a)$$

在 $r < a$ 的区域内

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \nabla \times \mathbf{r} = 0$$

在 $r > a$ 的区域内

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$$

从此例看出, 无论球内、球外都有 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 因为它是静电场的普遍规律; 但在球内, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, 而在球外, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, 这说明电场强度 $\mathbf{E}$ 的散度的局域性质, 即某点 $\mathbf{E}$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 只是与该点的 ρ 有关, 在球外, 虽然通过一包围电荷的包围面 S 的电通量不为零, 但由于 $\rho = 0$, 所以 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 。

§ 1.3 静电场的势及其微分方程

在 § 1.2 我们建立起了静电场的基本方程, 即

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.1)$$

这是一组数目较多的微分方程组。原则上,给定空间中电荷的分布时,可直接求解式(1.3.1)得到 $\mathbf{E}$ 的分布。但是解一数目较多的微分方程组,在数学上是十分繁锁的,而更多的情况是行不通的,因此这一方法是不适用的。

现在我们来介绍式(1.3.1)的一般解法。由矢量分析知道,任何一个无旋场均可引入一个标量函数来描述该矢量场。而静电场正好是一个无旋场,所以必定存在一个标量函数 ϕ 使

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (1.3.2)$$

总是满足 $\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\phi = 0$ 。这个标量函数 ϕ 称为静电场的标量势(位)函数,简称势(位)函数。从而电场可以通过电势 ϕ 来描述。必须指出,式(1.3.2)中的负号,并非矢量分析要求,而是根据传统,静电场强度矢量 $\mathbf{E}$ 的指向与电势梯度的方向相反而出现的。

上面我们已用式(1.3.2)定义了一个标量势函数 ϕ ,而求解一个标量函数,一般说来要比求解一个矢量函数容易得多。因此,为了使静电问题得到简化,往往把求解 $\mathbf{E}$ 归结为求 ϕ 。下面我们来导出电势函数所满足的微分方程。将式(1.3.2)代入式(1.3.1)的第一式,可得

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.3.3)$$

可见,电势 ϕ 满足著名的泊松方程。它表明了静电场中某点的电势与该点的电荷体密度之间的关系。如果在所求解的空间内没有体电荷存在,即处处都有 $\rho=0$,则泊松方程简化为拉普拉斯方程,即

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (1.3.4)$$

式(1.3.3)和(1.3.4)是求解静电问题的基本方程,即静电问题变为求解泊松方程或拉普拉斯方程。第二章将结合静电问题的特点把最主要的几种解法逐一介绍给读者。

泊松方程的一个特解是

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1.3.5)$$

式中 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$ 。可见,在观察点 $\mathbf{r}$ 处的电势 ϕ 是诸元电荷 dq 贡献的标量电势之迭加。为了证明上式确实满足泊松方程(1.3.3),我们将拉普拉斯算符作用于上式的两端,有

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

可见,式(1.3.5)确实满足泊松方程(1.3.3)。利用式(1.1.13)和(1.3.5),可以得点电荷 q 的电势为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.3.6)$$

它在所有 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R \neq 0$ 的点均满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$, $R=0$ 是它的一个奇点,这样在 $\mathbf{r}'$ 点的点电荷 q 的电势 ϕ 所满足的泊松方程可以写成

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.3.7)$$

它对点电荷所在点 $\mathbf{r}'$ 也成立。事实上, 我们只要对点电荷的势的表达式(1.3.2)的两端取拉普拉斯算符即得

$$\nabla^2 \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = -\frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

下面我们对势函数 ϕ 的性质进行讨论。首先讨论任意两点 P 、 Q 之间的电势差。由式(1.3.2), 有

$$-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{l}$$

将上式沿任意路径 C 由 P 点到 Q 点积分得

$$\phi_P - \phi_Q = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3.8)$$

可见, P 、 Q 两点间的电势差 $\phi_P - \phi_Q$ 等于电场强度 $\mathbf{E}$ 沿任意路径 C 从 P 点到 Q 点的线积分值, 也可以解释为在静电场 $\mathbf{E}$ 中, 把一个单位点电荷从 P 点沿任意路径 C 移动到 Q 点的过程中, 电场力所作的功。 P 、 Q 两点间的电势差 $\phi_P - \phi_Q$, 在电路理论中称为电压, 常用 V 表示。

其次, 由式(1.3.2)所定义的势函数 ϕ 并不唯一, 可以相差一个常数 C 。为了用单值的势函数来描述电场, 可以通过选择电势的参考点来使电场中每一点都有一个而且只有一个确定的电势值与之对应。所谓电势的参考点是指选取该点的电势为零。原则上讲, 电势参考点的选取是任意的。如选 Q 点为电势参考点, 则式(1.3.8)变成

$$\phi_P = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3.9)$$

一般说来, 电势参考点的选取所遵循的原则是: (1) 要使势的表达式有意义; (2) 要使势的表达式尽可能简单; (3) 同一个问题只能选一个参考点。当电荷分布在有限区域(是指无穷远处的电荷密度为零)时, 通常将无穷远处选作电势的参考点, 则

$$\phi_P = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3.10)$$

当无穷远处的电荷分布不为零时, 则不能选取无穷远处作电势参考点, 如何选取要根据具体问题而定。

例1 求均匀场强 $\mathbf{E}_0$ 的电势分布。

解 要求空间任一点 P 的电势 ϕ_P , 可任选一点 o 作为坐标原点, 如图 1.3.1 所示。

由式(1.3.5), 有

$$\phi_P - \phi_o = \int_P^o \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_0 \cdot \int_P^o d\mathbf{r} = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$$

对于均匀电场不能选无穷远处作电势的参考点。若选 o 点为电势参考点, 则 $\phi_o = 0$, 于是, 上式变成

$$\phi_P = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \quad (1.3.11)$$

例2 求均匀带电圆盘的电势。

解 设圆盘半径为 a , 不计厚度, 面电荷密度为 σ , 求圆盘轴上任一点 P 的电势。设圆盘位于 xy 平面上, 圆心在坐标原点, 如图1.3.2所示。在圆盘上任取一面元 $dS' = r'd\varphi'dr'$,

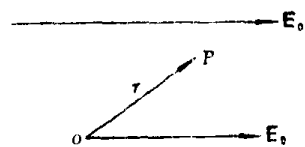


图 1.3.1