经济最优规划

宋颂兴　赵德滋
徐志坚　强　莹　编

JINGJIZUIYOUGUIHUA

南京大学出版社

经济最优规划

赵德滋　宋颂兴
　　　　　　　　　编
徐志坚　强　莹

南京大学出版社

1991・南京

内 容 简 介

本书较全面、系统地讲解应用广泛、行之有效的经济最优规划方法，包括经济资源最优配置的线性规划问题、线性规划问题的单纯形解法、资源价格测算的对偶规划、最优化后分析和参数规划、物质调运方案的最佳选择、关于最大流与最小费用的网络规划、经济变量在整数条件下的规划问题、经济动态过程的最优规划、具有多种经济目标的规划问题等九章。可作为高等院校经济管理、管理工程类有关专业的教材，也可供实际经济管理工作者参考使用。

经 济 最 优 规 划

赵德滋 宋颂兴 徐志坚 强 莹 编

南京大学出版社出版
(南京大学校内)
江苏省新华书店发行 丹阳练湖印刷厂印刷
开本850×1168 1/32 印张10.25 字数317千
1991年4月第1版 1991年4月1次印刷
印数1—2000
ISBN 7-305-00981-4

F·139 定价6.50元
责任编辑：新 平

前　言

经济最优规划是运用运筹学中线性规划、整数规划、动态规划、网络规划、多目标规划等方法研究生产布局、资源配置、计划安排、价格测定、物资调运等经济管理问题，以取得最佳经济效益的一门新兴的边缘学科。近 30 年来，发展迅速、应用广泛。

我国经济管理工作者，用经济最优规划方法解决实际问题，已取得了明显的效果。目前，越来越多的人要求学习和掌握这门学科的理论、方法和应用技术；大专院校的经济管理、管理工程类专业都相继开设了有关课程。在这种写一情况下，编本取材得当、程度适中、学以致用的教材是十分需要的。

本书是我们多年讲授该课程实践的一个总结。具有三个特点：

1．内容选择上注重的广应用泛性和实用性；

2．内容讲解上注重经济涵义的明确性和清晰性；

3．内容安排上注意前后连贯性和相对独立性。

我们认为，这样既便于学生掌握和运用，又便于实际工作者有目的地学习有关内容。是否能如愿以偿，诚望读者评说。

本书由编写组成员集体讨论、分头执笔。具体分工为：赵德滋——第一、五章，宋颂兴——第二、三、四章，徐志坚——第六、九章，强莹——第七、八章。最后由赵德滋、宋颂兴总纂定稿。

本书在编写过程中，得到南京大学国际商学院以及经济决策系领导的关心和支持，谨此表示感谢。

编　者

1990 年 8 月

目　　录

第一章　经济资源最优配置的线性规划问题

§1　什么是线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支。它是研究在现有人力、财力和物力等资源条件下，合理调配和有效使用资源，以达到最优目标(产量最高、利润最大、成本最小、资源消耗最少等等)的一种数学方法。

为了便于了解线性规划的一般特征，先举两个简单的例子。

例 1.1　某工厂用 A，B，C 三种资源生产甲、乙两种产品，单位产品需消耗各种资源的数量、单位产品的收益以及各种资源的限有量如表 1.1 所示。问应生产甲、乙产品各多少，才能获得最大收益？

表 1.1

资　源	单位产品需消耗的资源		各种资源的限有量
	产品甲	产品乙	
A	9	4	360
B	4	5	200
C	3	10	300
单位产品的收益（百元）	7	12	

表中数据表示，生产一个单位甲种产品需消耗 9 个单位 A 种

资源、4 个单位 B 种资源和 3 个单位 C 种资源，而能收益 7 百元；生产一个单位乙种产品需消耗 4 个单位 A 种资源、5 个单位 B 种资源和 10 个单位 C 种资源，而能收益 12 百元。A，B，C 三种资源的限有量分别为 360 单位，200 单位，300 单位。

现设生产甲种产品 x_1 个单位，乙种产品 x_2 个单位，则可得到的总收益 Z 为：

$$Z=7x_1+12x_2 \tag{1-1}$$

我们的目标是要使总收益达到最大，于是记成

$$\max Z=7x_1+12x_2 \tag{1-2}$$

Z 是 x_1，x_2 的线性函数，称为目标函数；$\max Z$ 表示求目标函数的最大值。

另一方面，由于各种资源的数量是有限的，不管如何安排产量 x_1 和 x_2，都应满足下列三个条件：

$$9x_1+4x_2\leqslant 360 \tag{1-3}$$

$$4x_1+5x_2\leqslant 200 \tag{1-4}$$

$$3x_1+10x_2\leqslant 300 \tag{1-5}$$

此外，产量不能为负值，即

$$x_1,\ x_2\geqslant 0 \tag{1-6}$$

(1-3)～(1-5)的三个线性不等式和(1-6)式的变量非负条件一起，称为约束条件。

根据上述讨论，我们所要解决的问题可简述为：在满足约束条件下，求出变量 x_1，x_2（称为决策变量）的值，使目标函数达到最大。它的数学模型写为：

$$\max Z=7x_1+12x_2$$

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 360 \\ 4x_1+5x_2\leqslant 200 \\ 3x_1+10x_2\leqslant 300 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-7}$$

这就是例 1.1 的线性规划模型。

例 1.2 某冶金企业，为了满足市场需要，每年至少需生产 A36 吨、B16 吨、C60 吨；而这三种产品可从甲、乙两种原料中提炼，该两种原料每百吨的单价以及能提炼 A,B,C 的数量如表 1.2 所示。问如何配置原料，既能满足产品的市场需要，又能使总成本最小？

表 1.2

产　　品	百吨原料能提炼的产品数（吨）		市场最少需求量
	原 料 甲	原 料 乙	（吨）
A	6	4	36
B	2	2	16
C	6	12	60
百吨原料单价（百元）	40	32	

表中数据表示，使用百吨甲种原料，可提炼出 6 吨 A 种产品、2 吨 B 种产品和 6 吨 C 种产品，而成本为 40 百元；使用百吨乙种原料，可提炼出 4 吨 A 种产品、2 吨 B 种产品和 12 吨 C 种产品，而成本为 32 百元。A,B,C 三种产品的市场最少需求量分别为 36 吨、16 吨、60 吨。

现设使用甲种原料为 x_1，乙种原料为 x_2（x_1,x_2 以百吨为单位），则总成本 Z 为：

$$Z=40x_1+32x_2 \tag{1-8}$$

我们要求它达到最小，于是记成

$$\min Z=40x_1+32x_2 \tag{1-9}$$

与上例类似，这里的 Z 是目标函数，它是 x_1,x_2 的线性函数；而 min 表示求目标函数的最小值。

另一方面，根据市场需要，使用甲、乙两种原料所提炼出来的 A,B,C 三种产品数量应满足下列三个条件：

$$6x_1+4x_2\geqslant 36 \tag{1-10}$$

$$2x_1+2x_2\geqslant 16 \tag{1-11}$$

$$6x_1+12x_2\geqslant 60 \tag{1-12}$$

此外，使用的原料数量不能为负值，即

$$x_1,\ x_2\geqslant 0 \tag{1-13}$$

(1-10)～(1-12)三个线性不等式和(1-13)式的变量非负条件，构成了约束条件。

本例所要解决的问题可简述为：在满足约束条件下，求出决策变量 x_1，x_2 的值，使目标函数达到最小。它的数学模型可写为：

$$\min Z=40x_1+32x_2$$

$$\begin{cases}6x_1+4x_2\geqslant 36\\2x_1+2x_2\geqslant 16\\6x_1+12x_2\geqslant 60\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases} \tag{1-14}$$

这就是例 1.2 的线性规划模型。

上述两个例子是比较简单的，都只含有两个变量。在很多实际问题中，会出现多个变量。同时，约束条件还会出现“等式”的形式；也可能在同一个线性规划问题中，“$\leqslant$”、“$\geqslant$”、“$=$”三种形式的约束条件一起出现。

根据这些情况，可以归纳出线性规划问题有以下三个共同特征：

(1) 每一个问题都有一组决策变量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，这组变量的一组定值就代表一个具体的规划方案。通常要求变量的取值是非负的。

(2) 都有一个目标函数，它是决策变量的线性函数。按研究问题的不同，要求目标函数达到最大值，或者最小值。

(3) 存在一定的限制条件(除变量非负条件外的约束条件)，它们都可以用线性不等式或线性等式来表达。

由于所要求的是规划方案 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而它的目标函数

和约束条件都是决策变量的线性表达式，故称线性规划。它的数学模型的一般形式为：

$$\max(\text{或}\ \min)Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1(\text{或}\geqslant b_1,\ \text{或}=b_1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2(\text{或}\geqslant b_2,\ \text{或}=b_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m(\text{或}\geqslant b_m,\ \text{或}=b_m) \\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

（1-15）

通常可简写为：

$$\max(\min)Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\ (\geqslant b_i,\ =b_i),\ (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0,\ (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

（1-16）

有时为了便于理论上的讨论，将它表达成矩阵和向量形式：

$$\max(\min)Z=CX$$

$$\begin{cases} AX\leqslant b \quad (\geqslant b,\ =b) \\ X\geqslant 0 \end{cases}$$

（1-17）

其中，

$$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n) \tag{1-18}$$

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \tag{1-19}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1-20}$$

$$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T \tag{1-21}$$

§2　资源最优配置的线性规划模型

运用线性规划方法研究经济资源的最优配置，首先要建立它的数学模型。通过上一节的两个简单例子，我们对如何建立线性规划模型已经有了一定的了解。但是，实际问题往往是复杂的，所提出的要求和给定的条件是多种多样的。必须经过周密的考虑和仔细的分析，才能建立正确的模型。本节通过各种不同有关资源最优配置的实例，讲述其线性规划问题的建模过程。

一、生产计划问题

例 1.3　某工厂计划生产四种产品；各种产品每件所需消耗的各类资源定额，计划期内各类资源的总量限制和各种产品的单位价格如表 1.3 所列。问工厂应如何安排生产，使计划期内所得的总收益最大？

表　1.3

各类资源	每件产品所需消耗的资源				资源总量限制
	产品Ⅰ	产品Ⅱ	产品Ⅲ	产品Ⅳ	
工时（小时）	2	3	1	2	60
原料（吨）	4	2	2	0	100
机时（小时）	1	1	1	1	40
产品单价（万元）	3	1	$\frac{3}{2}$	2	

本例和例 1.1 极为类似，只是这里有了四种产品。可设决策变量 x_1, x_2, x_3 和 x_4 分别表示产品Ⅰ，产品Ⅱ，产品Ⅲ和产品Ⅳ的产量，仿照例 1.1 的分析，可建立其线性规划模型为：

$$\max Z = 3x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4\leqslant 60 \\ 4x_1+2x_2+2x_3\leqslant 100 \\ x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 40 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-22}$$

二、饲料混合问题

例 1.4 某畜牧场所用饲料是由四种饲料混合而成的，其中包括玉米、苜蓿、大麦及黄豆。各种饲料每单位所含营养成份及价格，所配饲料每单位的营养标准(为简化起见，只考虑各种营养成份的最低含量要求)如表 1.4 所列。问按何种配比混合饲料可使单位成本最小?

表 1.4

营养成份	各种饲料每单位中营养成份含量(克)				每单位混合饲料营养成份最低含量
	玉米	苜蓿	大麦	黄豆	
蛋白质	0.082	0.19	0.11	0.48	0.21
纤维	0.022	0.17	0.076	0.028	0.05
脂肪	0.036	0.023	0.017	0.005	0.04
铁	0.0006	0.016	0.0057	0.0024	0.015
钙	0.0022	0.0007	0.0012	0.0019	0.004
各种饲料单价（元）	0.25	0.30	0.28	0.35	

设 x_1,x_2,x_3,x_4 分别表示混合饲料中所含玉米、苜蓿、大麦及黄豆的比例，单位为百分数。再设每单位混合饲料的成本为 Z，则由表列数据可得：

$$Z=0.25x_1+0.30x_2+0.28x_3+0.35x_4$$

我们的目标是要求它达到最小，仿照例 1.2，记成

$$\min Z=0.25x_1+0.30x_2+0.28x_3+0.35x_4$$

另一方面，每单位混合饲料中各种营养成份的最低含量是有

要求的；而这些营养成份是由玉米、苜蓿、大麦和黄豆等饲料提供的。根据表 1.4 的数据，应满足下列条件：

$$0.082x_1+0.19x_2+0.11x_3+0.48x_4\geqslant 0.21$$
$$0.022x_1+0.17x_2+0.076x_3+0.028x_4\geqslant 0.05$$
$$0.036x_1+0.023x_2+0.017x_3+0.005x_4\geqslant 0.04$$
$$0.0006x_1+0.016x_2+0.0057x_3+0.0024x_4\geqslant 0.015$$
$$0.0022x_1+0.0007x_2+0.0012x_3+0.0019x_4\geqslant 0.004$$

此外，各种饲料的百分比之和应等于 1，且各种饲料的百分比均为非负，即

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0$$

综上所述，该饲料混合问题的线性规划模型为：

$$\min Z=0.25x_1+0.30x_2+0.28x_3+0.35x_4$$
$$\begin{cases}0.082x_1+0.19x_2+0.11x_3+0.48x_4\geqslant 0.21\\ 0.022x_1+0.17x_2+0.076x_3+0.028x_4\geqslant 0.05\\ 0.036x_1+0.023x_2+0.017x_3+0.005x_4\geqslant 0.04\\ 0.0006x_1+0.016x_2+0.0057x_3+0.0024x_4\geqslant 0.015\\ 0.0022x_1+0.0007x_2+0.0012x_3+0.0019x_4\geqslant 0.004\\ x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}\tag{1-23}$$

三、合理下料问题

例 1.5 用统一规格的原材料切割成 m 种零件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的毛坯，而每一单位原材料上可有 n 种不同的下料（切割）方式 $B_1,B_2,\cdots,B_n$。每种下料方式可得到的各种毛坯个数 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 及每种零件的需要量 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 如表 1.5 所示。问应怎样安排下料方式，使得既能满足需要，而用的原材料又最少。

表 1.5

零件名称	下料方式				各零件需要量
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_2
⋮	…	…	…	…	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m

通过例 1.1～1.4，我们对线性规划问题的建模过程已有了一定的了解。从本例开始，在不难理解的情况下，将简化叙述。

设用 B_j 方式下料的原材料数为 x_j，则该问题的线性规划模型为：

$$\min Z=\sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant a_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0，\text{且为整数} \quad (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1-24}$$

x_j 是以各种方式下料时所用的原材料数，当然应该非负且是整数。

四、农作物生产布局问题

例 1.6 农场要在 n 块土地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 上，种植 m 种农作物 $A_1, A_2, \cdots, A_m$；各种土地的面积 $b_j(j=1,2,\cdots,n)$，各种作物的计划播种面积 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$，各种作物在各块土地上的亩产量 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 如表 1.6 所示。问应如何合理进行生产布局，使既能完成各种作物的播种计划，又能使农作物的总产量最多。

表 1.6

农作物	土		地		各种作物播种面积
	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
各块土地面积	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

为简化起见，不妨假定各种作物计划播种总面积等于土地总面积，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1-25}$$

设 x_{ij} 为土地 B_j 上种植作物 A_i 的面积$(i=1,2,\cdots m; j=1,2,\cdots,n)$，则该作物布局问题的线性规划模型为：

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1-26}$$

五、生产进度问题

例 1.7 某工厂生产的一种产品，其需求具有季节性，假定只能在夏季前后的四个月内进行生产和销售。生产可以按正常工作时间进行，也可以加班。前三月的月产量可以大于当月的销售

量而将多余的产品存贮，但要付出存贮费；而在第四个月月末要将产品全部售完。

设产品在正常工作时间生产，每月最多能生产100单位，单位成本为15元。在加班时间生产，每月最多能生产30单位，单位成本为20元。每月生产量及平均成本不一定要相等。存贮费每月每单位0.2元。四个月的需求量分别为50,130,150及100单位。

试建立线性规划模型，以确定每月在正常时间及加班时间各生产多少产品，使总成本最小。

为使模型清晰起见，我们设三套变量 x_i, y_i, z_i：

x_i——在第 i 月正常时间内生产的产品数，$i=1,2,3,4$；

y_i——在第 i 月加班时间内生产的产品数，$i=1,2,3,4$；

z_i——在第 i 月末存贮的产品数，$i=1,2,3$。

我们的目标是总成本最小，即

$$\min Z=15(x_1+x_2+x_3+x_4)+20(y_1+y_2+y_3+y_4)+0.2(z_1+z_2+z_3)$$

生产能力约束为：

$$x_i \leqslant 100 \quad (i=1,2,3,4)$$
$$y_i \leqslant 30 \quad (i=1,2,3,4)$$

产品需求约束为：

$$x_1+y_1-z_1=50$$
$$x_2+y_2+z_1-z_2=130$$
$$x_3+y_3+z_2-z_3=150$$
$$x_4+y_4+z_3=100$$

变量均为非负，即

$$x_i, y_i, z_i \geqslant 0$$

综上所述，该问题的线性规划模型为：

$$\min Z=15(x_1+x_2+x_3+x_4)+20(y_1+y_2+y_3+y_4)+0.2(z_1+z_2+z_3)$$