

# 数学思维 与 数学方法论

侯敏义 主编

东北师范大学出版社

SXSWY  
SXFFL

# 数学思维与数学方法论

侯敏义 主编

东北师范大学出版社

## 数学思维与数学方法论

SHUXUE SIWEI YU SHUXUE FANGFALUN

侯敏义 主编

---

责任编辑：李殿国      封面设计：王劲涛      责任校对：侯敏义

---

东北师范大学出版社出版  
(长春市斯大林大街110号)  
(邮政编码：130024)

吉林省新华书店发行  
长春大学印刷厂制版  
长春大学印刷厂印刷

---

开本：787×1092 毫米 1/32

1991年5月第1版

印张：8.375

1991年5月第1次印刷

字数：180千

印数：0 000 1—4 000 册

---

ISBN 7-5602-0552-6/O·57

(压膜) 定价：4.00元

JY1/178/04

## 前 言

数学发展的历史表明，许多重大科学问题的提出和解决，常常是与研究方法上获得一定的突破分不开的。一些杰出贡献的数学家都十分注重数学思想和方法在数学发现、数学创造中的作用。著名数学家彭加勒 (Poincare)、希尔伯特 (Hilbert)、柯朗 (Courant)、乔治·波利亚 (G. Polya)、华罗庚、徐利治等人都发表过关于数学思想和方法的精辟论述。他们有一个共同的显著特点，就是都积极倡导数学成果获得“发现”、“创造”过程和方法，为我们树立了光辉的典范。

当前，深入开展数学思想与方法的研究，并探讨其产生与发展的规律，对于改变中学数学教学中的弊病，即重知识轻能力，不善于引导学生掌握汲取知识、形成知识的数学思想和方法，不注意启发学生的创造性思维以及如何去发现真理、寻找真理的倾向；对于更新观念，端正思想，提高数学教师素质，以适应现代数学教育以发展学生的智能为其基本特点，培养“创造”、“发现”型人材的需要，都有重要意义。随着数学教育改革的深入，数学思想和方法的研究势必愈来愈受到数学教育界有识之士的重视。

为此我们结合自己学习、工作的经验和体会，参考国内外有关资料，尝试性编写了《数学思维与数学方法论》一书。希借此能引起读者对数学思维和数学方法探索的兴趣，

能对当前数学教学改革有所补益。

本书由侯敏义主编，参加编写的有侯敏义、徐兆环、盖雁、徐国森、刘淑中。

本书可作为中学数学教师继续教育和高等师范院校数学系开设相应课程的教材或参考书，也可供广大中学数学教师、数学教学研究人员、大学和中学数学爱好者参考。

由于水平有限，在这本书的有限篇幅里，想较为系统地  
对数学思维和数学方法作以论述，实在力不从心，况且数学  
方法论作为一门课程，尚还在研究探讨之中。因此本书难免  
会有许多缺点和错误，衷心希望读者批评指正。

侯敏义

1990年11月定稿

# 目 录

第一章	数学方法论概述	( 1 )
§ 1	数学方法论的研究对象	( 1 )
§ 2	数学方法论是一门综合性的独立学科	( 7 )
§ 3	研究数学方法论的途径和意义	( 8 )
第二章	数学思维	( 13 )
§ 1	数学思维及其结构	( 13 )
§ 2	数学思维方式	( 15 )
§ 3	数学思维基本成分	( 18 )
§ 4	数学思维个体发展水平	( 20 )
第三章	数学中的非逻辑思维与创造性思维	( 26 )
§ 1	数学中的形象思维	( 26 )
§ 2	数学中的直觉思维	( 40 )
§ 3	数学中的灵感思维	( 44 )
§ 4	定势思维与反定势思维	( 47 )
§ 5	数学中创造性思维	( 57 )
第四章	数学中的观察与试验方法	( 65 )
§ 1	观察方法	( 65 )
§ 2	试验方法	( 76 )
第五章	数学中的归纳方法	( 83 )
§ 1	归纳方法概述	( 83 )
§ 2	完全归纳法	( 88 )
§ 3	不完全归纳法	( 92 )

§ 4	经验归纳法 .....	(94)
§ 5	归纳方法的作用 .....	(99)
第六章	数学中的类比方法 .....	(103)
§ 1	类比方法概述 .....	(103)
§ 2	类比方法的特征和原则 .....	(104)
§ 3	常用的类比方法 .....	(107)
§ 4	类比方法的作用与局限 .....	(119)
第七章	特殊化与一般化方法 .....	(125)
§ 1	特殊化方法 .....	(125)
§ 2	特殊化方法的作用 .....	(128)
§ 3	一般化方法 .....	(134)
§ 4	一般化方法的作用 .....	(136)
第八章	抽象分析法 .....	(145)
§ 1	抽象和分析 .....	(145)
§ 2	抽象分析法 .....	(148)
§ 3	数学模型方法 .....	(154)
第九章	关系映射反演方法 .....	(163)
§ 1	关系映射反演方法的基本思想 .....	(163)
§ 2	RMI方法的应用 .....	(168)
第十章	数学中的化归方法 .....	(181)
§ 1	化归方法的基本思想 .....	(181)
§ 2	化归方法的基本原则 .....	(188)
§ 3	化归方法的几种类型 .....	(195)
第十一章	数学中的构造方法 .....	(209)
§ 1	构造方法的基本思想 .....	(209)
§ 2	构造辅助元素 .....	(213)
§ 3	构造结论 .....	(219)
§ 4	构造矛盾和构造反例 .....	(222)

第十二章	移植方法	(225)
§ 1	移植法的基本思想	(225)
§ 2	物理模拟法	(228)
§ 3	移植法在中学数学中的应用	(232)
第十三章	数学公理化方法	(239)
§ 1	公理化方法含义及发展简史	(239)
§ 2	公理化方法的基本内容	(242)
§ 3	公理化方法的作用与局限	(248)
第十四章	数学结构主义方法	(250)
§ 1	数学结构主义方法的基本思想	(251)
§ 2	数学结构的分类	(252)
§ 3	结构主义方法的作用与局限	(255)
主要参考文献		(257)



# 第一章 数学方法论概述

完善的思想方法犹如北极星，使人们找到正确的道路。

——G·波利亚

## § 1 数学方法论的研究对象

### 一、科学方法论

众所周知，做任何事情都应该讲究方法。方法对头才能事半功倍。任何科学研究工作也是如此，都需要符合科学研究实际的方法。什么是“方法”？我们认为“方法”就是解决具体问题而采用的方式、途径或手段，换句话说，是一套程序，一种规范，是若干环节、步骤的联结或展开。科学的方法是人们对待现实的方式，就是人们发现新现象，提出新理论的手段，就是人们如何运用自己的智慧，去寻找观念世界与现象世界之间的联系，就是在科学研究活动中，运用科学的实践与理论思维的技巧。科学方法论就是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问，它是总结科学发现或发明的一般方法的理论。随着现代科学的发展，人们对科学方法的研究也日益重视。

人类认识研究“科学方法论”的内容繁多，人们在不同的场合和领域中，“方法”一词的内涵和范围也很不相同。如果根据各种科学方法论概括的程度和使用范围的不同，从水平方向描述的话，一般说科学方法论可分为三个层次：

1. 哲学方法论，即唯物辩证法。它既是世界观又是方法论，是认识和改造世界的最基本的科学方法。它既指导社会科学和思维科学的研究，也指导自然科学和数学科学的研究。实践证明，马克思主义的唯物辩证法是唯一科学的哲学方法论。

2. 一般科学方法论。它是指各门学科研究方法中，提炼出来的多学科所共同适用的方法。它不是某一学科所独有，而是许多学科或所有学科都普遍适用的方法。包括观察和实验方法、逻辑推理方法、思维规律及方法、科学抽象方法、公理化方法、模型化方法、黑箱法、移植法、控制论方法、信息方法以及系统方法等。

3. 各门学科的具体方法论。它是指各门学科中的带普遍意义的研究方法。如数学中的计算方法、论证方法、作图方法，物理中的光谱分析法，化学中的定量分析法等。

对于各门学科中的解决某一问题的具体方法，如数学中实数运算方法，解方程的代入法，证明两直线平行的方法，证明不等式的放缩法，数学归纳法等。这些方法在数学中有时称为解题方法或技巧。

## 二、数学方法论

众所周知，各门科学既有其各自不相同的研究对象，也都有其各具特点的研究方法。数学也不例外，当然也有自己的方法。

1. 什么是数学方法论？徐利治教授对这门新学科下了一个比较确切的定义：数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。

数学方法论是科学方法论的重要分支，它是在数学领域中讲方法，因而不同于哲学方法论，也不是一般的科学方法论，它属于第三层次。数学方法论是以数学研究方法，数学思维方法本身作为研究对象的一门学问。另一方面，又因为数学方法论是从方法论角度来讲数学，它要研究数学思想、数学方法、数学概念是怎样产生的，数学理论是怎样形成和发展的等等。因此它又不是一般意义下的数学课。

2. 数学方法的研究范围。数学方法论研究范围可分为宏观的数学方法论与微观的数学方法论。

如果只研究数学发展的外部动力，数学发展规律与客观实践的关系，数学发展需要外界提供什么样条件和环境等问题，则是属于宏观数学方法论的范畴。阐述这些问题内在规律的理论叫宏观方法论。它的研究对象是：数学发展普遍规律的研究；对数学人才成长规律的研究；对数学教育方法的研究；对数学的应用和发展前景进行评析及预测的研究等。

数学工作者在研究某一课题时，不考虑数学发展的外部动力，只就数学内部体系结构中特定问题进行分析研究，就需要考虑采用最佳的数学研究方法，探讨、总结一些关于数学发现和数学创造等各种法则，把它称为微观数学方法论。它的研究对象是：各数学分支的发展模式；数学中的思维方法；数学本身研究的基本方法；数学创造的各种方法和技巧；数学发现的各种心理活动等。

数学同其它各门科学一样，在其发展的进程中，形成了一整套行之有效的思想方法，而且还在不断地产生新的思想方法。数学思想方法是数学的灵魂。数学思想方法有狭义与广义两种理解。狭义的理解认为，数学思想方法主要指数学本身的论证、运算以及应用的思想方法和手段；广义的理解认为，数学思想方法除上述作为研究对象外，还应包括关于数学（其中包括概念、理论、方法以及形态等）的对象、性质、特征、作用及其产生、发展规律的认识。

数学思维方法是数学思维活动必须遵守的规则，是数学思维运算获得成果的必不可少的手段。数学思维方法包括基本的逻辑思维方法（比如，抽象、概括、比较、分类、类比、归纳、演绎、分析、综合等）和非逻辑思维方法（比如，形象思维，直觉思维、灵感思维等）。

数学本身的方法是数学所固有的，它包括共性的数学方法与个性的数学方法。共性的数学方法很多，目前虽没有一个统一的认识，但普遍认为它应包括观察和试验方法、数学中的归纳方法、数学中的类比方法、一般化与特殊化方法、抽象分析法、关系映射反演方法、数学中的化归方法、数学中的构造方法、移植法、数学公理化方法、数学结构主义方法等。个性的数学方法系局部的、微观的方法，中学数学中常用的一般解题方法或解题技巧就属于它的范畴。

关于数学对象的研究活动与方法以及数学历史发展的具体考察和分析，也属于数学方法论研究的范围。历史上一些著名的数学家，如欧几里得、笛卡尔、牛顿、莱布尼兹、欧拉、高斯、罗巴切夫斯基、伽罗华、康托尔、希尔伯特、彭加勒、冯·诺伊曼、华罗庚等，不仅在数学研究中卓有贡献，

而且在研究方法上也有独到之处。通过对著名数学家的思想与方法的考察与剖析，可以把握数学的思想和方法的重要方面，同时对探讨数学创造规律，加速数学人才的培养都有重要意义。

关于“数学中的发现、发明与创新，”徐利治教授有过精辟的论述：“数学对象和数学真理具有客观性，所以对待数学上的创造性新成果，有时用发现代替发明一词。例如人们常说：牛顿和莱布尼兹发现了微积分原理（即微积分基本定理）。这就是因为原理的存在是客观的。但是人们也常说：他们发明了微积分学。这话也说得通，因为微积分学中的一系列符号表示方法和计算法则是由他们创造的。这些都带有人为制作的性质，所以也不妨叫做发明。……在数学领域中，发现和发明两词就经常混用了。”他还指出：“一般说来，凡在数学上创立新概念、新理论、新模型，提出新方法，证明新定理等，都可叫做数学领域中的发明或创造。粗略说来，数学上的发明创造有两类：一类是首创性的或开拓性的发明创造，即基本上不依赖于或较少依赖于既有成果的某种开拓新领域的工作。例如解析几何的发明、微积分的发明、群论的创立等……，另一类是继承性的创造，这主要是指那些在前人已经建立了的重要成果基础上所作的发展性或改进性的工作。例如，现代数学文献上所见到的绝大部分工作成果都属于这一类。”

本书介绍的是中学数学方法论，它是以中学数学内容为主要对象的研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。

### 三、数学方法论研究的历史与现状

数学方法论研究的历史，由来已久，从古至今一些著名数学家都研究过方法论，并且写出不少专著或发表过这方面的精辟见解。例如，古希腊的欧几里得的《几何原本》；中国古代数学家刘徽提出的“割圆术”；解析几何创始人笛卡尔的《方法论》；德国数学家莱布尼兹的《论发明的技巧》；德国数学家希尔伯特于1900年在巴黎国际数学家代表会上的演讲《数学问题》；法国数学家彭加勒的《论数学发明创造》；法国数学家阿达玛发展了彭加勒的学说，著有《数学领域的发明心理学》；日本数学家教育家米山国藏的《数学的精神、思想与方法》；美国著名数学家M·克莱因的《古今数学思想》等。特别应该提到是美籍匈牙利数学家、教育家G·波利亚把数学思想方法训练看作揭示数学发明的本质和阐述数学教学的实质。他的三本经典著作《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》是在数学方法论领域内的代表著作，尤其波利亚的“合情推理”、猜想与解题思想方法提供了不少数学模式及研究相互关系，对于数学教育研究有很大启迪作用。他的这些方法论专著所阐述的许多思想受到全世界的普遍重视。我国徐利治教授的《数学方法论选讲》，提出了许多独到见解，是我国第一部数学方法论专著，它是近几年来徐利治教授多次到各地进行讲学，讲授数学方法论课程所做的开拓性工作，已引起了国内外数学界和数学教育界的普遍关注。

## § 2 数学方法论是一门

### 综合性 的独立学科

数学方法论的知识涉及到哲学、自然辩证法、逻辑学、思维科学、心理学、教育学、数学史、创造学、人才学、科学方法论等学科。数学方法论与这些学科的关系极为密切。

1. 马克思主义哲学对数学方法论具有指导作用。因为哲学是研究自然、社会和思维的最一般规律的科学，它对一切领域的认识活动都具有方法论的指导作用。唯物辩证法的对立统一规律、质量互变规律、否定之否定规律和本质与现象、内容与形式、原因与结果、必然性与偶然性、可能性与现实性等基本范畴揭示了客观世界和人类思维运动和发展的普遍规律。从而唯物辩证法为数学方法论提供了观点和一般方法论的指导，推动数学方法论的发展。

2. 数学方法论的性质是数学科学与思维科学的一门交叉学科。数学方法本身就涉及数学各个分支的知识，特别是现代数学的知识，而数学中的思维方法，数学创造的思维活动等，又属于思维科学的研究对象。数学方法是科学思维作用于数学研究中所体现出的认识世界和改造世界的方法。数学方法的思维过程必须遵循思维规律，只有凭借科学的思维方法，才能对数学方法不断地概括、抽象和系统化，掌握数学方法的本质；才能对数学方法进行不断的综合化，掌

握数学方法的发展规律；才能将数学方法不断地得到充实、丰富和发展。科学的数学方法，说到底就是科学的思维方法在研究探讨数学方法活动中的具体运用，研究、探讨、学习数学方法，必须在科学的思维方法指导下进行。近年来在钱学森先生的倡导下，我国开展“思维科学”的研究，取得很大的进展。

3. 教育理论是数学方法论研究的理论依据之一。教育学是研究教育现象及其规律的一门科学，它与数学方法论联系密切，它为研究、掌握数学方法论提供理论基础。

4. 数学方法论的内容贯穿了中外数学史。数学史，特别是数学思想发展史，是研究数学方法论的宝贵资料。数学方法论的许多方法和原理是从数学发展史中总结归纳出来的，数学史是了解数学本质、掌握系统的数学思想方法的必由之路，数学家莱布尼兹说过：“数学史的用处不仅仅在于历史所以公正地衡量每一个人，使得后人可能指望得到同样的称赞，而且还在于促进发展的艺术，而它的方法是通过有名的范例为大家所了解”。这段话指明了数学史和数学方法论之间的密切关系，以及研究数学史对学习数学方法论的重要作用。

## § 3 研究数学方法论的 途径和意义

### 一、途 径

1. 要有必要的数学理论基础。数学理论是总结数学方法的基本素材，在数学科学领域内博览群书，研读名著，开



拓知识领域，提高数学素养。

2. 要阅览大量数学史著作，加深对数学发展规律的认识，剖析数学发现的重大成果，从史料中挖掘和发现数学方法。

3. 通过唯物辩证法的学习，尽早确定科学的反映论观点，坚持实践性。用普遍联系发展变化的观点以及对立统一规律去学习和研究。

## 二、意义

徐利治教授在《数学方法论选讲》中指出：“数学是一门工具性很强的科学，它和别的科学比较起来还具有较高的抽象性等特征，为了有效地发展它、改进它、应用它或者把它很好地传授给学生，就需要对这门科学的发展规律、研究方法、发现与发明等法则有所掌握。因此，数学研究者、数学教师、科技工作者，以及高年级大学生、研究生都需要知道一些数学方法论”。数学方法论对于数学教师从事教学和科研都有十分重要的作用。

有一个年轻人曾向著名科学家爱因斯坦询问获得成功的秘诀。爱因斯坦顺手写了一个公式： $A = X + Y + Z$ ，并解释说A代表成功，X代表勤奋工作，Y代表正确的方法，Z代表少说空话。可见爱因斯坦把正确的方法摆在一个极为重要的位置。

1. 研究数学方法论能帮助我们掌握正确的思想和方法，推动数学理论的研究和应用。

在数学研究中，使人眼光缭乱的不同假说的取舍，各种线索的鉴别，课题的选择，论证途径的探索等，都要求研究者不仅要有渊博的数学知识，而且还要求有高超的鉴识