中国科学院测量与地球物理研究所编辑

# 测量与地球物理集刊

# ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA

## 8

科学出版社

# 测量与地球物理集刊

第 8 号

中国科学院测量与地球物理研究所 编辑

*

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1987 年 6 月第 一 版　　开本：787×1092 1/16
1987 年 6 月第一次印刷　　印张：8 1/4
印数：0001—1,100　　字数：184,000

统一书号：13031・3571
本社书号：4064・13—15

**定 价：2.00 元**

科技新书目：145-018

P25
:8

# 测量与地球物理集刊　　第8号

（1986年）

## 目　录

# ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA, NO. 8

**(1986)**

## CONTENTS

第 8 号　　测量与地球物理集刊　　No. 8
1986 年　　ACTA GEODAETICA ET GEOPHYSICA　　1986

# 短弧法平差解算两种方法*

胡 建 国

（国家测绘局测绘科学研究所）

**摘　　要**

当按短弧法处理大规模多卜勒网的结果时，往往会面临高达数以万计未知数的大规模线性方程组的解算问题。为了得出一种在理论上既严密，在实际计算上又简单明了，易于编制程序，且节省内存容量的计算方法，美国 C. Brown 曾利用二重分块法导出一套计算公式。本文则利用矩阵约化导出二套不同的计算公式。其中第一套公式与 C. Brown 所得结果基本相同，但对后者存在的个别错误进行了修正。第二套公式在计算过程上有所改进，从而更便于程序的编制。最后又证明了这两套公式所得结果的一致性，从而完成了对公式本身的最后验证。

## 一、引　　言

卫星多卜勒定位结果按短弧法平差计算的误差方程式的一般形式如下:

设某测站（第 $j$ 站，$j=1,2,\cdots,m$），在某次卫星通过（第 $i$ 次，$i=1,2,\cdots,n$）中共得到 $P$ 个误差方程式（$P$ 取决于多卜勒计数的积分间隔长短以及卫星通过时对高度角的限制。在一般情况下，若积分间隔为 23 秒，则 $P$ 约为 30）写成矩阵形式为

$$V_{ij}+\hat{B}_{ij}\hat{\delta}_j+\dot{B}_{ij}\dot{\delta}_i+\ddot{B}_{ij}\ddot{\delta}_{ij}=G_{ij} \tag{1}$$

式中 $\hat{\delta}_j$ 为 $j$ 站的站址坐标向量，在各种模型中它均为一个 $3\times1$ 阶的列矩阵；$\dot{\delta}_i$ 为第 $i$ 次通过的卫星轨道状态向量，在半短弧模型中为一个 $3\times1$ 阶列矩阵，在短弧模型中为一个 $6\times1$ 阶列矩阵；$\ddot{\delta}_{ij}$ 为其他未知参数向量，其未知参数个数亦随模型而异，通常为 4 或 5 个。

根据最小二乘法原则，即在满足:

$$V^TP_VV=\text{最小}$$

的条件下，我们可得到单站一次卫星通过的法方程式为

$$\begin{bmatrix}\hat{U}_{ij} & \dot{U}_{ij} & \overline{U}_{ij}\\ \dot{U}^T_{ij} & \dot{N}_{ij} & \overline{N}_{ij}\\ \overline{U}^T_{ij} & \overline{N}^T_{ij} & \ddot{N}_{ij}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{\delta}_j\\ \dot{\delta}_i\\ \ddot{\delta}_{ij}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{C}_{ij}\\ \dot{C}_{ij}\\ \ddot{C}_{ij}\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中各符号意义为

* 1985 年 10 月收稿。

$m$个站址坐标向量　　$n$次通过轨道状态向量　　$n$个测站观测$n$次通过的其它未知参数向量

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc}
\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{U}_{i1} & 0\cdots\cdots 0 & \dot{U}_{11} & \dot{U}_{21}\cdots\cdots\dot{U}_{n1} & \bar{U}_{11} & 0\cdots 0 & \bar{U}_{21} & 0\cdots 0\cdots\bar{U}_{n1} & 0\cdots 0 \\
0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\hat{U}_{12}\cdots\cdots 0 & \dot{U}_{12} & \dot{U}_{22}\cdots\cdots\dot{U}_{n2} & 0 & \bar{U}_{12}\cdots 0 & 0 & \bar{U}_{22}\cdots 0\cdots 0 & \bar{U}_{n2}\cdots 0 \\
\vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots\quad\vdots \\
0 & 0\cdots\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{U}_{im} & \dot{U}_{1m} & \dot{U}_{2m}\qquad\dot{U}_{nm} & 0 & 0\cdots\bar{U}_{1m} & 0 & 0\cdots\bar{U}_{2m}\cdots 0 & 0\cdots\bar{U}_{nm} \\
\dot{U}_{11}^{T} & \dot{U}_{12}^{T}\cdots\cdots\dot{U}_{1m}^{T} & \sum\limits_{j=1}^{m}\dot{N}_{11} & 0\cdots\cdots 0 & \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12}\cdots\bar{N}_{1m} & 0 & 0\cdots 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\
\dot{U}_{21}^{T} & \dot{U}_{22}^{T}\cdots\cdots\dot{U}_{2m}^{T} & 0 & \sum\limits_{i=1}^{m}\dot{N}_{2j}\cdots\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22}\cdots\bar{N}_{2m}\cdots 0 & 0\cdots 0 \\
\vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots\quad\vdots & \vdots \\
\dot{U}_{n1}^{T} & \dot{U}_{n2}^{T}\cdots\cdots\dot{U}_{nm}^{T} & 0 & 0\cdots\sum\limits_{i=1}^{m}\dot{N}_{nj} & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0\cdots\bar{N}_{n1} & \bar{N}_{n2}\cdots\bar{N}_{nm} \\
\dot{U}_{11}^{T} & 0\cdots\cdots 0 & \bar{N}_{11}^{T} & 0\cdots\cdots 0 & \ddot{N}_{11} & & & & \\
0 & \bar{U}_{12}^{T}\cdots\cdots 0 & \bar{N}_{12}^{T} & 0\cdots\cdots 0 & & \ddot{N}_{12} & & & \\
\vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots & & \ddots & & & \\
0 & 0\cdots\cdots\bar{U}_{1m}^{T} & \bar{N}_{1m}^{T} & 0\cdots\cdots 0 & & \ddot{N}_{1m} & & & \\
\bar{U}_{21}^{T} & 0\cdots\cdots 0 & 0 & \bar{N}_{21}^{T}\cdots\cdots 0 & & & \ddot{N}_{21} & & \\
0 & \bar{U}_{22}^{T}\cdots\cdots 0 & 0 & \bar{N}_{22}^{T}\cdots\cdots 0 & & & & \ddot{N}_{22} & \\
\vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots\qquad\vdots & & & & \ddots & \\
0 & 0\cdots\cdots\bar{U}_{2m}^{T} & 0 & \bar{N}_{2m}^{T}\cdots\cdots 0 & & & & \ddot{N}_{2m} & \\
\vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
\bar{U}_{n1}^{T} & 0\cdots\cdots 0 & 0 & 0\cdots\cdots\bar{N}_{n1}^{T} & & & & \ddot{N}_{n1} & \\
0 & \bar{U}_{n2}^{T}\cdots\cdots 0 & 0 & 0\cdots\cdots\bar{N}_{n2}^{T} & & & & & \ddot{N}_{n2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots \\
0 & 0\cdots\cdots\bar{U}_{nm}^{T} & 0 & 0\cdots\cdots\bar{N}_{nm}^{T} & & & & & \ddot{N}_{nm}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\hat{\delta}_{1} \\ \hat{\delta}_{2} \\ \vdots \\ \hat{\delta}_{m} \\ \dot{\delta}_{1} \\ \dot{\delta}_{2} \\ \vdots \\ \dot{\delta}_{n} \\ \ddot{\delta}_{11} \\ \ddot{\delta}_{12} \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_{1m} \\ \ddot{\delta}_{21} \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_{22} \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_{2m} \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_{n1} \\ \ddot{\delta}_{n2} \\ \vdots \\ \ddot{\delta}_{nm}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{C}_{11} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\hat{C}_{12} \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\hat{C}_{1m} \\ \sum\limits_{j=1}^{m}\dot{C}_{1j} \\ \sum\limits_{j=1}^{m}\dot{C}_{2j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m}C_{nj} \\ \ddot{C}_{11} \\ \ddot{C}_{12} \\ \vdots \\ \ddot{C}_{1m} \\ \ddot{C}_{21} \\ \ddot{C}_{22} \\ \vdots \\ C_{2m} \\ \vdots \\ C_{n1} \\ \ddot{C}_{n2} \\ \vdots \\ \ddot{C}_{nm}
\end{array}\right]
\tag{4}
$$

$$\left.\begin{array}{lll}\hat{U}_{ij}=\hat{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\hat{B}_{ij}, & \dot{U}_{ij}=\hat{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\dot{B}_{ij}, & \bar{U}_{ij}=\hat{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\ddot{B}_{ij} \\ \hat{C}_{ij}=\hat{B}_{ij}^{T}P_{Vij}e_{ij}, & \dot{U}_{ij}^{T}=\dot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\hat{B}_{ij}, & \dot{N}_{ij}=\dot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\dot{B}_{ij} \\ \bar{N}_{ij}=\dot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\ddot{B}_{ij}, & \dot{C}_{ij}=\dot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}e_{ij}, & \bar{U}_{ij}^{T}=\ddot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\hat{B}_{ij} \\ \bar{N}_{ij}^{T}=\ddot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\dot{B}_{ij}, & \ddot{N}_{ij}=\ddot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}\ddot{B}_{ij}, & \ddot{C}_{ij}=\ddot{B}_{ij}^{T}P_{Vij}e_{ij}\end{array}\right\} \tag{3}$$

式中 $P_V$ 为观测值的权矩阵，在本文中我们对它不加讨论，而假定它为一对角线矩阵，即

$$P_V=\mathrm{diag}(P_{V_1}P_{V_2}\cdots P_{V_n})$$

与单站一次卫星通过的情形相仿，当有 $m$ 个测站组成的多卜勒网总共观测 $n$ 次卫星通过时，其法方程矩阵形式如下（当某站未参与某次卫星通过的观测时，其相应系数和常数为零），式中各符号由 (3) 式决定。

如果我们面临的是一个大规模的多卜勒网的话，则 (4) 式描述的法方程式的规模是十分庞大的。例如我国布设的卫星多卜勒网，测站数 $m=37$，观测的卫星合格通过数约为 $n=800$，故未知数总共约为 3 万个。若按传统的方法解算，不仅计算过程烦杂，且占用计算机内存相当多。因此探寻一种理论上严密，实际计算过程又简单明了、易于编制程序，且节省内存的方法是十分必要的。美国 C. Brown 曾利用二重分块方法导出过一套计算公式[1]。为了对其进行检验并进一步改进它，我们按矩阵约化法重新推导这一套公式。

## 二、按矩阵约化法导出的一种公式

我们将 (4) 式改写成如下形式

$$\begin{bmatrix}\ddot{N} & \bar{N}^{T} & \bar{U}^{T}\\ \bar{N} & \dot{N} & \dot{U}^{T}\\ \bar{U} & \dot{U} & \hat{U}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\delta}\\ \dot{\delta}\\ \hat{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{C}\\ \dot{C}\\ \hat{C}\end{bmatrix} \tag{5}$$

上式中各子块的意义为

$$\hat{U}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{U}_{i1} & & 0\cdots 0\\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}\hat{U}_{i2} & \cdots 0\\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0\cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}\hat{U}_{im}\end{bmatrix}$$

$$\dot{U}=\begin{bmatrix}\dot{U}_{11} & \dot{U}_{21}\cdots\dot{U}_{n1}\\ \dot{U}_{12} & \dot{U}_{22}\cdots\dot{U}_{n2}\\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots\\ \dot{U}_{1m} & \dot{U}_{2m}\cdots\dot{U}_{nm}\end{bmatrix} \qquad \dot{N}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{m}\dot{N}_{1j} & \mathbf{0} & & 0\\ 0 & \sum\limits_{j=1}^{m}\dot{N}_{2j} & & 0\\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & 0 & \sum\limits_{j=1}^{m}\dot{N}_{nj}\end{bmatrix}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\bar{U}=\begin{bmatrix}\bar{U}_{11} & 0\cdots 0 & \bar{U}_{21} & 0\cdots 0\cdots & \bar{U}_{n1} & 0\cdots 0\\ 0 & \bar{U}_{12}\cdots 0 & 0 & \bar{U}_{22}\cdots 0\cdots & 0 & \bar{U}_{n2}\cdots 0\\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \vdots\\ 0 & 0\cdots\bar{U}_{1m} & 0 & 0\quad \bar{U}_{2m}\cdots 0 & 0 & \cdots\bar{U}_{nm}\end{bmatrix}\\
&\bar{N}=\begin{bmatrix}\bar{N}_{11} & \bar{N}_{12}\cdots\bar{N}_{1m} & 0 & 0\cdots 0\cdots 0 & 0\cdots 0\\ 0 & 0\cdots 0 & \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22}\cdots\bar{N}_{2m}\cdots 0 & 0\cdots 0\\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \vdots\quad\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots\\ 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0\cdots\bar{N}_{n1} & \bar{N}_{n2}\cdots\bar{N}_{nm}\end{bmatrix}\\
&\hat{\delta}=\begin{bmatrix}\hat{\delta}_1\\ \hat{\delta}_2\\ \vdots\\ \hat{\delta}_m\end{bmatrix}\qquad \dot{\delta}=\begin{bmatrix}\dot{\delta}_1\\ \dot{\delta}_2\\ \vdots\\ \dot{\delta}_n\end{bmatrix}\\
&\ddot{N}=\begin{bmatrix}\ddot{N}_{11} &&&&&&&&\\ & \ddot{N}_{12} &&&&&&&\\ && \ddots &&&&&&\\ &&& \ddot{N}_{1m} &&&&&\\ &&&& \ddot{N}_{21} &&&&\\ &&&&& \ddot{N}_{22} &&&\\ &&&&&& \ddots &&\\ &&&&&&& \ddot{N}_{2m} &\\ &&&&&&&& \ddots\\ &&&&&&&&& \ddot{N}_{n1}\\ &&&&&&&&&& \ddot{N}_{n2}\\ &&&&&&&&&&& \ddots\\ &&&&&&&&&&&& \ddot{N}_{nm}\end{bmatrix}\\
&\ddot{\delta}=\begin{bmatrix}\ddot{\delta}_{11}\\ \ddot{\delta}_{12}\\ \vdots\\ \ddot{\delta}_{1m}\\ \ddot{\delta}_{21}\\ \ddot{\delta}_{22}\\ \vdots\\ \ddot{\delta}_{2m}\\ \vdots\\ \ddot{\delta}_{n1}\\ \ddot{\delta}_{n2}\\ \vdots\\ \ddot{\delta}_{nm}\end{bmatrix}\quad \ddot{C}=\begin{bmatrix}\ddot{C}_{11}\\ \ddot{C}_{12}\\ \vdots\\ \ddot{C}_{1m}\\ \ddot{C}_{21}\\ \ddot{C}_{22}\\ \vdots\\ \ddot{C}_{2m}\\ \vdots\\ \ddot{C}_{n1}\\ \ddot{C}_{n2}\\ \vdots\\ \ddot{C}_{nm}\end{bmatrix}\quad \hat{C}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\hat{C}_{i1}\\ \sum_{i=1}^{n}\hat{C}_{i2}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}\hat{C}_{im}\end{bmatrix}\quad \dot{C}=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{m}\dot{C}_{1j}\\ \sum_{j=1}^{m}\dot{C}_{2j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{m}\dot{C}_{nj}\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}\qquad (6)
$$

从 (6) 式可见 (5) 式中的 $\ddot{N}$, $\dot{N}$ 和 $\hat{U}$ 均为对角线阵，符合矩阵约化法的条件。

现在我们用矩阵

$$\begin{bmatrix} E_1 & \theta_a & \theta_b \\ -\bar{N}\ddot{N}^{-1} & E_2 & \theta_c \\ -\bar{U}\ddot{N}^{-1} & \theta_d & E_3 \end{bmatrix}$$

左乘(5)式的增广矩阵，(上述矩阵中 $\theta_a,\theta_b,\theta_c,\theta_d$ 为行、列数不同的零矩阵，$E_1$，$E_2$，$E_3$ 为阶数不同单位方阵)，由此即得一次约化后的法方程为

$$\begin{bmatrix} \ddot{N} & \bar{N}^T & \bar{U}^T \\ & \dot{N}\cdot 1 & \dot{U}^T\cdot 1 \\ & \dot{U}\cdot 1 & \hat{U}\cdot 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \dot{\delta} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \ddot{C} \\ \dot{C}\cdot 1 \\ \hat{C}\cdot 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

根据上述矩阵相乘，我们可得到(7)式中各次约化后的系数和常数项子块为

$$\left.\begin{aligned} \dot{N}\cdot 1 &= \dot{N}-\bar{N}\ddot{N}^{-1}\bar{N}^T \\ \dot{U}\cdot 1 &= \dot{U}-\bar{U}\ddot{N}^{-1}\bar{N}^T \\ \dot{U}^T\cdot 1 &= \dot{U}^T-\bar{N}\ddot{N}^{-1}\bar{U}^T=(\dot{U}\cdot 1)^T \\ \hat{U}\cdot 1 &= \hat{U}-\bar{U}\ddot{N}^{-1}\bar{U}^T \\ \dot{C}\cdot 1 &= \dot{C}-\bar{N}\ddot{N}^{-1}\ddot{C} \\ \hat{C}\cdot 1 &= \hat{C}-\bar{U}\ddot{N}^{-1}\ddot{C} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

我们将(6)式中各子块代入，再经过一系列矩阵运算，进一步求出(8)式中各子块为

$$\dot{N}\cdot 1=[\dot{N}]=\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m}(\dot{N}_{1j}-\bar{N}_{1j}\ddot{N}_{1j}^{-1}\bar{N}_{1j}^T & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \sum_{j=1}^{m}(\dot{N}_{2j}-\bar{N}_{2j}\ddot{N}_{2j}^{-1}\bar{N}_{2j}^T) & \cdots & 0 \\ & \begin{matrix}\vdots\\ 0\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}\vdots\\ \sum_{j=1}^{m}(\dot{N}_{nj}-\bar{N}_{nj}\ddot{N}_{nj}^{-1}\bar{N}_{nj}^T)\end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} [\dot{N}]_1 & & & \\ & [\dot{N}]_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\dot{N}]_n \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中

$$[\dot{N}]_i=\sum_{j=1}^{m}[\dot{N}]_{ij}=\sum_{j=1}^{m}(\dot{N}_{ij}-\bar{N}_{ij}\ddot{N}_{ij}^{-1}\bar{N}_{ij}^T) \tag{10}$$

$$\dot{U}\cdot 1=[\bar{N}]=\begin{bmatrix} \dot{U}_{11}-\bar{U}_{11}\ddot{N}_{11}^{-1}\bar{N}_{11}^T & \dot{U}_{21}-\bar{U}_{21}\ddot{N}_{21}^{-1}\bar{N}_{21}^T & \cdots & \dot{U}_{n1}-\bar{U}_{n1}\ddot{N}_{n1}^{-1}\bar{N}_{n1}^T \\ \dot{U}_{12}-\bar{U}_{12}\ddot{N}_{12}^{-1}\bar{N}_{12}^T & \dot{U}_{22}-\bar{U}_{22}\ddot{N}_{22}^{-1}\bar{N}_{22}^T & \cdots & \dot{U}_{n2}-\bar{U}_{n2}\ddot{N}_{n2}^{-1}\bar{N}_{n2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{U}_{1m}-\bar{U}_{1m}\ddot{N}_{1m}^{-1}\bar{N}_{1m}^T & \dot{U}_{2m}-\bar{U}_{2m}\ddot{N}_{2m}^{-1}N_{2m}^T & \cdots & \dot{U}_{nm}-\bar{U}_{nm}\ddot{N}_{nm}^{-1}\bar{N}_{nm}^T \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} [\bar{N}]_{11} & [\bar{N}]_{21}\cdots[\bar{N}]_{n1} \\ [\bar{N}]_{12} & [\bar{N}]_{22}\cdots[\bar{N}]_{n2} \\ [\bar{N}]_{1m} & [\bar{N}]_{2m}\cdots[\bar{N}]_{nm} \end{bmatrix}=[[\bar{N}]_1[\bar{N}]_2\cdots[\bar{N}]_n] \tag{11}$$

$$[\bar{N}]_i=\begin{bmatrix}[\bar{N}]_{i1}\\ [\bar{N}]_{i2}\\ \vdots\\ [\bar{N}]_{im}\end{bmatrix},\qquad [\bar{N}]_{ij}=\dot{U}_{ij}-\bar{U}_{ij}\ddot{N}_{ij}^{-1}N_{ij}^{-T} \tag{12}$$

$$\hat{U}\cdot 1=[\dot{N}]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{U}_{i1}-\bar{U}_{i1}\ddot{N}_{i1}^{-1}\bar{U}_{i1}^{T} & 0 & & 0\\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{U}_{i2}-\bar{U}_{i2}\ddot{N}_{i2}^{-1}\bar{U}_{i2}^{T} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{U}_{im}-\bar{U}_{im}\ddot{N}_{im}^{-1}\bar{U}_{im}^{T})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}[\dot{N}]_{i1} & 0 & \cdots 0\\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}[\dot{N}]_{i2} & \cdots 0\\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}[\dot{N}]_{im}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}[\dot{N}]_{i1} & 0\cdots & 0\\ \vdots & & \\ 0 & [\dot{N}]_{i2}\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & [\dot{N}]_{im}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}[\dot{N}]_i \tag{13}$$

$$[\dot{N}]_i=\begin{bmatrix}[\dot{N}]_{i1} & & \\ & [\dot{N}]_{i2} & \\ & & \ddots \\ & & & [\dot{N}]_{im}\end{bmatrix},\qquad [\dot{N}]_{ij}=\hat{U}_{ij}-\bar{U}_{ij}\ddot{N}_{ij}^{-1}\bar{U}_{ij}^{T} \tag{14}$$

$$\dot{C}\cdot 1=[\ddot{C}]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{m}(\dot{C}_{1j}-\bar{N}_{1j}\ddot{N}_{1j}^{-1}\ddot{C}_{1j})\\ \sum\limits_{j=1}^{m}(\dot{C}_{2j}-\bar{N}_{2j}\ddot{N}_{2j}^{-1}\ddot{C}_{2j})\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{m}(\dot{C}_{nj}-\bar{N}_{nj}\ddot{N}_{nj}^{-1}\ddot{C}_{nj})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{m}[\ddot{C}]_{1j}\\ \sum\limits_{j=1}^{m}[\ddot{C}]_{2j}\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{m}[\ddot{C}]_{nj}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\ddot{C}]_1\\ [\ddot{C}]_2\\ \vdots\\ [\ddot{C}]_n\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$[\ddot{C}]_i=\sum_{j=1}^{m}[\ddot{C}]_{ij}=\sum_{j=1}^{m}(\dot{C}_{ij}-\bar{N}_{ij}\ddot{N}_{ij}^{-1}\ddot{C}_{ij}) \tag{16}$$

$$\hat{C}\cdot 1=[\dot{C}]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{C}_{i1}-\bar{U}_{i1}\ddot{N}_{i1}^{-1}\ddot{C}_{i1})\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{C}_{i2}-\bar{U}_{i2}\ddot{N}_{i2}^{-1}\ddot{C}_{i2})\\ \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{C}_{im}-\bar{U}_{im}\ddot{N}_{im}^{-1}\ddot{C}_{im})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}[\dot{C}]_{i1}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}[\dot{C}]_{i2}\\ \vdots\\ \sum\limits_{i=1}^{n}[\dot{C}]_{im}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}[\dot{C}]_{i1}\\ [\dot{C}]_{i2}\\ \vdots\\ [\dot{C}]_{im}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}[\dot{C}]_i \tag{17}$$

$$[\dot{C}]_i=\begin{bmatrix}[\dot{C}]_{i1}\\ [\dot{C}]_{i2}\\ \vdots\\ [\dot{C}]_{im}\end{bmatrix}\quad 而\quad [\dot{C}]_{ij}=\hat{C}_{ij}-\bar{U}_{ij}\ddot{N}_{ij}^{-1}\ddot{C}_{ij}\tag{18}$$

将 (9), (11), (13), (15), (17) 式代入 (7) 式，得

$$\begin{bmatrix}\ddot{N} & \bar{N}^T & \bar{U}^T\\ & [\ddot{N}] & [\bar{N}]^T\\ & [\bar{N}] & [\dot{N}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\delta}\\ \dot{\delta}\\ \hat{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{C}\\ [\ddot{C}]\\ [\dot{C}]\end{bmatrix}\tag{19}$$

再用矩阵

$$\begin{bmatrix}E_1 & \theta_a & \theta_b\\ \theta_e & E_2 & \theta_c\\ \theta_f & -[\bar{N}][\ddot{N}]^{-1} & E_3\end{bmatrix}$$

左乘 (19) 式的增广矩阵，得二次约化的法方程式为

$$\begin{bmatrix}\ddot{N} & \bar{N}^T & \bar{U}^T\\ & [\ddot{N}] & [\bar{N}]^T\\ & & [\dot{N}]\cdot 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\delta}\\ \dot{\delta}\\ \hat{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{C}\\ [\ddot{C}]\\ [\dot{C}]\cdot 1\end{bmatrix}\tag{20}$$

根据上述矩阵相乘的结果，知

$$[\dot{N}]\cdot 1=[\dot{N}]-[\bar{N}]\quad[\ddot{N}]^{-1}\quad[\bar{N}]^T\tag{21$_1$}$$

$$[\dot{C}]\cdot 1=[\dot{C}]-[\bar{N}]\quad[\ddot{N}]^{-1}\quad[\ddot{C}]\tag{21$_2$}$$

再将 (13), (11), (9), (15), (17) 等式代入上面二式，进一步可得

$$[\dot{N}]\cdot 1=[S]=\sum_{i=1}^{n}([\dot{N}]_i-[\bar{N}]_i[\ddot{N}]_i^{-1}[\bar{N}]_i^T)=\sum_{i=1}^{n}[S]_i\tag{22}$$

其中

$$[S]_i=[\dot{N}]_i-[\bar{N}]_i[\ddot{N}]_i^{-1}[\bar{N}]_i^T\tag{23}$$

$$[\dot{C}]\cdot 1=[\bar{C}]=\sum_{i=1}^{n}([\dot{C}]_i-[\bar{N}]_i[\ddot{N}]_i^{-1}[\ddot{C}]_i)=\sum_{i=1}^{n}[\bar{C}]_i\tag{24}$$

$$[\bar{C}]_i=[\dot{C}]_i-[\bar{N}]_i[\ddot{N}]_i^{-1}[\ddot{C}]_i\tag{25}$$

将 (22), (24) 式代入，(20) 式进一步改写为

$$\begin{bmatrix}\ddot{N} & \bar{N}^T & \bar{U}^T\\ & [\ddot{N}] & [\bar{N}]^T\\ & & [S]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\delta}\\ \dot{\delta}\\ \hat{\delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{C}\\ [\ddot{C}]\\ [\bar{C}]\end{bmatrix}\tag{26}$$

由 (26) 式易于得出各未知参数解为

$$\hat{\delta}=[S]^{-1}[\bar{C}]\tag{27}$$

$$\dot{\delta}=[\ddot{N}]^{-1}[\ddot{C}]-[\ddot{N}]^{-1}[\bar{N}]^T\hat{\delta}\tag{28}$$

$$\ddot{\delta}=\ddot{N}^{-1}\ddot{C}-\ddot{N}^{-1}\bar{N}^T\dot{\delta}-\ddot{N}^{-1}\bar{U}^T\hat{\delta}\tag{29}$$

将有关各子块代入后，$\dot{\delta}$, $\ddot{\delta}$ 可按其子块分别计算。即轨道状态向量可按下式对每次卫星通过分别计算：

$$\dot{\delta}_i = [\ddot{N}]_i^{-1}[\ddot{C}]_i - [\ddot{N}]_i^{-1}[\bar{N}]_i^T\hat{\delta} \tag{30}$$
$$(i=1,2,\cdots n)$$

接收机频偏等其他未知数可按下式对各测站每次卫星通过分别计算:

$$\ddot{\delta}_{ij} = \ddot{N}_{ij}^{-1}\ddot{C}_{ij} - \ddot{N}_{ij}^{-1}\bar{N}_{ij}^T\dot{\delta}_i - \ddot{N}_{ij}^{-1}\bar{U}_{ij}^T\hat{\delta}_i \tag{31}$$
$$(i=1,2,\cdots n \quad j=1,2,\cdots m)$$

以上 (27), (30), (31) 式即为实际计算各解向量的公式。顺便指明,在文献 [1] 的 $\ddot{\delta}_{ij}$ 计算式中仅有如我们这里 (31) 式中前面二项,而缺少最后一个含有 $\hat{\delta}_i$ 的项。

按照这套公式计算的最大优点是将可能遇到的求逆矩阵的最大阶数降至最低程度。例如当处理我国卫星多普勒网时,面临的最大逆矩阵仅为 111 × 111 阶。但是它包含一个很大的缺点,就是这种方法要对每次通过中的各个测站进行计算(累加或者组成矩阵)。实际上全部观测数据及根据它们计算出的结果都是按一测站中观测的卫星通过先后次序记录至磁带上的。因此,这部分计算若能改为按各测站分别对该测站观测的每次通过进行计算,那就要方便得多。为此,我们又推导出另一种公式。

## 三、 按矩阵约化法导出的另一种公式

我们将 (4) 式改写成另一种形式:

$$\begin{bmatrix} \ddot{N} & \bar{U}^T & \bar{N}^T \\ \bar{U} & \hat{U} & \dot{U} \\ \bar{N} & \dot{U} & \dot{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \hat{\delta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{C} \\ \hat{C} \\ \dot{C} \end{bmatrix} \tag{32}$$

注意上式与(4), (5)式相比,仅是法方程中各未知数及其系数的先后次序有所变动而已,故它们彼此是完全等价的。且 (32) 式中各子块的意义与 (6) 式完全相同。

我们用矩阵

$$\begin{bmatrix} E_1 & \theta_a & \theta_b \\ -\bar{U}\ddot{N}^{-1} & E_2 & \theta_c \\ -\bar{N}\ddot{N}^{-1} & \theta_d & E_3 \end{bmatrix}$$

左乘 (32) 式的增广矩阵,得一次约化矩阵:

$$\begin{bmatrix} \ddot{N} & \bar{U}^T & \bar{N}^T \\ & \hat{U}\cdot 1 & \dot{U}\cdot 1 \\ & \dot{U}^T\cdot 1 & \dot{N}\cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \hat{\delta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{C} \\ \hat{C}\cdot 1 \\ \dot{C}\cdot 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

法方程中一次约化后的系数和常数项矩阵为

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}\cdot 1 &= \hat{U} - \bar{U}\ddot{N}^{-1}\bar{U}^T \\ \dot{U}\cdot 1 &= \dot{U} - \bar{U}\ddot{N}^{-1}\bar{N}^T \\ \dot{U}^T\cdot 1 &= \dot{U}^T - \bar{N}\ddot{N}^{-1}\bar{U}^T = (\dot{U}\cdot 1)^T \\ \dot{N}\cdot 1 &= \dot{N} - \bar{N}\ddot{N}^{-1}\bar{N}^T \\ \hat{C}\cdot 1 &= \hat{C} - \bar{U}\ddot{N}^{-1}\ddot{C} \\ \dot{C}\cdot 1 &= \dot{C} - \bar{N}\ddot{N}^{-1}\ddot{C} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

将上式与 (8) 式比较,知它们完全相同,但我们按如下方式分块:

$$\hat{U}\cdot 1=[\dot{N}]=\begin{bmatrix}[\dot{N}]_1 & & & \\ & [\dot{N}]_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\dot{N}]_m\end{bmatrix} \tag{35}$$

各子块

$$[\dot{N}]_j=\sum_{i=1}^{n}[\dot{N}]_{ij} \qquad (j=1,2,\cdots m) \tag{36}$$

而 $[\dot{N}]_{ij}$ 与(14)式定义相同。

$$\dot{U}\cdot 1=[\bar{N}]=\begin{bmatrix}[\bar{N}]_1\\ [\bar{N}]_2\\ \vdots\\ [\bar{N}]_m\end{bmatrix} \tag{37}$$

各子块

$$[\bar{N}]_j=[[\bar{N}]_{1j}[\bar{N}]_{2j}\cdots[\bar{N}]_{nj}] \qquad (j=1,2,\cdots m) \tag{38}$$

而 $[\bar{N}]_{ij}$ 与(12)式定义相同。

$$\dot{N}\cdot 1=[\ddot{N}]=\sum_{j=1}^{m}[\ddot{N}]_j=\sum_{j=1}^{m}\begin{bmatrix}[\ddot{N}]_{1j} & & & \\ & [\ddot{N}]_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [\ddot{N}]_{nj}\end{bmatrix} \tag{39}$$

各子块 $[\ddot{N}]_{ij}$ 与(10)式定义相同。

$$\hat{C}\cdot 1=[\dot{C}]=\begin{bmatrix}[\dot{C}]_1\\ [\dot{C}]_2\\ \vdots\\ [\dot{C}]_m\end{bmatrix} \tag{40}$$

各子块

$$[\dot{C}]_j=\sum_{i=1}^{n}[\dot{C}]_{ij} \qquad (j=1,2,\cdots m) \tag{41}$$

而 $[\dot{C}]_{ij}$ 与(18)式定义相同。

$$\dot{C}\cdot 1=[\ddot{C}]=\sum_{j=1}^{m}[\ddot{C}]_j \tag{42}$$

各子块

$$[\ddot{C}]_j=\begin{bmatrix}[\ddot{C}]_{1j}\\ [\ddot{C}]_{2j}\\ \vdots\\ [\ddot{C}]_{nj}\end{bmatrix} \qquad (j=1,2,\cdots m) \tag{43}$$

而 $[\ddot{C}]_{ij}$ 与(16)式定义相同。

将上述结果代入(33)式，则(33)式可改写为

$$\begin{bmatrix} \ddot{N} & \bar{U}^T & \bar{N}^T \\ & [\dot{N}] & [\bar{N}] \\ & [\bar{N}]^T & [\ddot{N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \hat{\delta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{C} \\ [\dot{C}] \\ [\ddot{C}] \end{bmatrix} \tag{44}$$

再用矩阵

$$\begin{bmatrix} E_1 & \theta_a & \theta_b \\ \theta_e & E_2 & \\ \theta_f & -[\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1} & E_3 \end{bmatrix}$$

左乘 (44) 式的增广矩阵,得

$$\begin{bmatrix} \ddot{N} & \bar{U}^T & \bar{N}^T \\ & [\dot{N}] & [\bar{N}] \\ & & [\ddot{N}]\cdot 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \hat{\delta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{C} \\ [\dot{C}] \\ [\ddot{C}]\cdot 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

式中

$$[\ddot{N}]\cdot 1 = [\ddot{N}] - [\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\bar{N}] \tag{46$_1$}$$

$$[\ddot{C}]\cdot 1 = [\ddot{C}] - [\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\dot{C}] \tag{46$_2$}$$

将 (35)—(43) 各式代入上面两式,经过矩阵运算可得

$$[\ddot{N}]\cdot 1 = [M] = \sum_{j=1}^{m} [M]_j \tag{47}$$

式中

$$[M]_j = [\ddot{N}]_j - [\bar{N}]_j^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_j$$

$$= \begin{bmatrix} [\ddot{N}]_{1j} - [\bar{N}]_{1j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{1j} & -[\bar{N}]_{1j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{2j} \cdots\cdots & -[\bar{N}]_{1j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{nj} \\ -[\bar{N}]_{2j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{1j} & [\ddot{N}]_{2j} - [\bar{N}]_{2j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{2j} \cdots & -[\bar{N}]_{2j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{nj} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -[\bar{N}]_{nj}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{1j} & -[\bar{N}]_{nj}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{2j} \cdots\cdots & [\ddot{N}]_{nj} - [\bar{N}]_{nj}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_{nj} \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$[\ddot{C}]\cdot 1 = [L] = \sum_{j=1}^{m} [L]_j \tag{49}$$

又

$$[L]_j = [\ddot{C}]_j - [\bar{N}]_j^T[\dot{N}]_j^{-1}[\dot{C}]_j$$

$$= \begin{bmatrix} [\ddot{C}]_{1j} - [\bar{N}]_{1j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\dot{C}]_j \\ [\ddot{C}]_{2j} - [\bar{N}]_{2j}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\dot{C}]_j \\ \vdots \\ [\ddot{C}]_{nj} - [\bar{N}]_{nj}^T[\dot{N}]_j^{-1}[\dot{C}]_j \end{bmatrix} \tag{50}$$

将 (47), (49) 式代入 (45) 式,则可改写为

$$\begin{bmatrix} \ddot{N} & \bar{U}^T & \bar{N}^T \\ & [\dot{N}] & [\bar{N}] \\ & & [M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \hat{\delta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{C} \\ [\dot{C}] \\ [L] \end{bmatrix} \tag{51}$$

由此得未知参数解为

$$\dot{\delta} = [M]^{-1}[L] \tag{52}$$

$$\hat{\delta} = [\dot{N}]^{-1}[\dot{C}] - [\dot{N}]^{-1}[\bar{N}]\dot{\delta} \tag{53}$$

$$\ddot{\delta} = \ddot{N}^{-1}\ddot{C} - \ddot{N}^{-1}\bar{U}^T\hat{\delta} - \ddot{N}^{-1}\bar{N}^T\dot{\delta} \tag{54}$$

我们在附录中将证明按 (52), (53) 式计算的 $\dot{\delta}$, $\hat{\delta}$ 与按 (27), (28) 式计算的结果完全相同,故这里按 (54) 式计算的 $\ddot{\delta}$ 亦与 (29) 式计算的结果相同。它也同样可按前述 (31) 式对各测站每一次卫星通过分别计算之。将 (35), (37), (40) 式代入 (53), 则站址坐标向量亦可按下式对每测站分别计算之:

$$\hat{\delta}_j = [\dot{N}]_j^{-1}[\dot{C}]_j - [\dot{N}]_j^{-1}[\bar{N}]_j\dot{\delta} \quad (j = 1, 2, \cdots m) \tag{55}$$

(52), (55) 和 (31) 式即为我们推出的一套新的计算未知参数的公式。

## 四、新公式的计算方法

根据以上推导,不难归纳出新公式的计算方法如下(已顾及未知参数预置权):

对每个测站(如第 $j$ 站)依次对每次卫星通过 $(i = 1, 2, \cdots n)$ 进行如下计算。

首先计算法方程式的系数和常数项:

$$\begin{bmatrix} \underset{3\times3}{\hat{U}_{ij}} & \underset{3\times3}{\dot{U}_{ij}} & \underset{3\times4}{\bar{U}_{ij}} & \underset{3\times1}{\hat{C}_{ij}} \\ \underset{3\times3}{\dot{U}_{ij}^T} & \underset{3\times3}{\dot{N}_{ij}} & \underset{3\times4}{\bar{N}_{ij}} & \underset{3\times1}{\dot{C}_{ij}} \\ \underset{4\times3}{\bar{U}_{ij}^T} & \underset{4\times3}{\bar{N}_{ij}^T} & \underset{4\times4}{\ddot{N}_{ij}} & \underset{4\times1}{\ddot{C}_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{3\times p}{\hat{B}_{ij}^T} \\ \underset{3\times p}{\dot{B}_{ij}^T} \\ \underset{4\times p}{\ddot{B}_{ij}^T} \end{bmatrix}^{1)} \underset{p\times p}{P_{Vij}}[\underset{p\times3}{\hat{B}_{ij}}\underset{p\times3}{\dot{B}_{ij}}\underset{p\times4}{\ddot{B}_{ij}}\underset{p\times1}{G_{ij}}] \tag{56}$$

$P$ 为一次通过中,有效积分间隔数目。当取 23 秒积分间隔时, $P$ 大约为 30

再按下式组成一次约化阵:

$$\begin{bmatrix} \underset{3\times3}{[\dot{N}]_{ij}} & \underset{3\times3}{[\bar{N}]_{ij}} & \underset{3\times1}{[\dot{C}]_{ij}} \\ \underset{3\times3}{[\bar{N}]^T} & \underset{3\times3}{[\ddot{N}]_{ij}} & \underset{3\times1}{[\ddot{C}]_{ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{3\times3}{\hat{U}_{ij}} & \underset{3\times3}{\dot{U}_{ij}} & \underset{3\times1}{\hat{C}_{ij}} \\ \underset{3\times3}{\dot{U}_{ij}^T} & \underset{3\times3}{\dot{N}_{ij}} & \underset{3\times1}{\dot{C}_{ij}} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \underset{3\times4}{\bar{U}_{ij}} \\ \underset{3\times4}{\bar{N}_{ij}} \end{bmatrix} (\underset{4\times4}{\ddot{N}_{ij}} + \underset{4\times4}{P_g})^{-1}[\underset{4\times3}{\bar{U}_{ij}^T}\underset{4\times3}{\bar{N}_{ij}^T}\underset{4\times1}{\ddot{C}_{ij}}]^{2)} \tag{57}$$

同时计算出以下各量:

$$\left.\begin{aligned} \underset{4\times1}{\delta_{ij}^0} &= (\underset{4\times4}{\ddot{N}_{ij}} + \underset{4\times4}{P_g})^{-1}\underset{4\times1}{\ddot{C}_{ij}}, \quad \underset{4\times3}{Q_{ij}} = (\underset{4\times4}{\ddot{N}_{ij}} + \underset{4\times4}{P_g})^{-1}\underset{4\times3}{\bar{N}_{ij}^T} \\ \underset{4\times3}{R_{ij}} &= (\underset{4\times4}{\ddot{N}_{ij}} + \underset{4\times4}{P_g})^{-1}\underset{4\times3}{\bar{U}_{ij}^T} \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

当对该测站 ($j$ 站)观测的全部卫星通过次数计算完后,则按下式求出该站的累加和:

$$\underset{3\times3}{[\dot{N}]_j} = \sum_{i=1}^{n} \underset{3\times3}{[\dot{N}]_{ij}} \qquad \underset{3\times1}{[\dot{C}]_j} = \sum_{i=1}^{n} \underset{3\times1}{[\dot{C}]_{ij}}$$

$$\underset{3\times1}{\hat{\delta}^0} = (\underset{3\times3}{[\dot{N}]_j} + \underset{3\times3}{P_S})^{-1}\underset{3\times1}{[\dot{C}]_j} \tag{59}$$

以上即完成了一测站的全部计算,依次对 $j = 1, 2, \cdots m$ 测站重复进行上述各项计算。

1) 这里是以 Kouba 模型为例,故轨道状态参数为 3 个,其他未知参数为 4 个。

2) 测站坐标先验权为 $P_s$, 轨道状态向量先验权为 $P_r$, 其他未知参数先验权为 $P_g$。

然后利用上述结果组成并计算下面 $3n\times 3n$ 阶法方程式，并求出全部轨道状态参数：

$$[\bar{M}]\dot{\delta}=[L]$$ 1)

$$
[\bar{M}]=\left[\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{m}([\dot{N}]_{1j}-[\bar{N}]_{1j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{1j})+P_{r}\\
\qquad -\sum_{j=1}^{m}([\bar{N}]_{2j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{1j})\\
\qquad\qquad\vdots\\
\qquad -\sum_{j=1}^{m}([\bar{N}]_{nj}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{1j})\\
\qquad -\sum_{j=1}^{m}([\bar{N}]_{1j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{2j})\cdots\cdots\\
\sum_{j=1}^{m}([\dot{N}]_{2j}-[\bar{N}]_{2j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{2j})+P_{r}\cdots\cdots\\
\qquad\qquad\vdots\\
\qquad -\sum_{j=1}^{m}([\bar{N}]_{nj}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{2j})\cdots\cdots\\
\qquad -\sum_{j=1}^{m}([\bar{N}]_{1j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{nj})\\
\qquad -\sum_{j=1}^{m}([\bar{N}]_{2j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{nj})\\
\qquad\qquad\vdots\\
\qquad \sum_{j=1}^{m}([\dot{N}]_{nj}-[\bar{N}]_{nj}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\bar{N}]_{nj})+P_{r}
\end{array}\right] \tag{60}
$$

$$
\dot{\delta}=\begin{bmatrix}\dot{\delta}_1\\ \dot{\delta}_2\\ \vdots\\ \dot{\delta}_n\end{bmatrix}
$$

$$
[L]=\begin{bmatrix}
\sum_{j=1}^{m}([\ddot{C}]_{1j}-[\bar{N}]_{1j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\dot{C}]_{j})\\
\sum_{j=1}^{m}([\ddot{C}]_{2j}-[\bar{N}]_{2j}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\dot{C}]_{j})\\
\vdots\\
\sum_{j=1}^{m}([\ddot{C}]_{nj}-[\bar{N}]_{nj}^{T}([\dot{N}]_{j}+P_{s})^{-1}[\dot{C}]_{j})
\end{bmatrix} \tag{61}
$$

求出各个 $\dot{\delta}_i$ 后，按下式求出各测站站址坐标：

---

1) 这里 $[\bar{M}]$ 已加入未知参数先验权，以与前面未知选验权之 $[M]$ 相区别。

$$\hat{\delta}_j = \hat{\delta}_j^0 - ([\dot{N}]_j + P_s)^{-1}[\bar{N}]_j\hat{\delta}$$

$$= \hat{\delta}_j^0 - ([\dot{N}]_j + P_s)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\underset{3\times3}{[\bar{N}]_{ij}}\underset{3\times1}{\delta_i}) \quad (j = 1, 2, \cdots m) \tag{62}$$

最后对各测站每次卫星通过按下式分别求出其他未知参数：

$$\underset{4\times1}{\ddot{\delta}_{ij}} = \underset{4\times1}{\ddot{\delta}_{ij}^0} - \underset{4\times3\,3\times1}{Q_{ij}\hat{\delta}_i} - \underset{4\times3\,3\times1}{R_{ij}\hat{\delta}_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ j = 1, 2, \cdots m \end{pmatrix} \tag{63}$$

上述各未知参数全部求出后，代回（1）式即可求出残差向量：

$$\underset{p\times1}{V_{ij}} = \underset{p\times1}{G_{ij}} - \underset{p\times3\,3\times1}{\hat{B}_{ij}\hat{\delta}_i} - \underset{p\times3\,3\times1}{\dot{B}_{ij}\dot{\delta}_i} - \underset{p\times4\,4\times1}{\ddot{B}_{ij}\ddot{\delta}_{ij}} \tag{64}$$

再按下式求出单位权方差：

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(V_{ij}^T P_{Vij} V_{ij}) + \hat{\delta}^T P_s \hat{\delta} + \dot{\delta}^T P_r \dot{\delta} + \ddot{\delta}^T P_g \ddot{\delta}}{f} \tag{65}$$

$f$ = 总的自由度数（总的误差方程式个数减总的未知数个数），最后再求出各未知参数的积差阵为

$$\sum\hat{\delta} = [\bar{M}]^{-1}\sigma^2$$

$$\sum\hat{\delta}_j = ([\dot{N}]_j + P_s)^{-1}\sigma^2 + ([\dot{N}]_j + P_s)^{-1}[\bar{N}]_j \cdot \sum\hat{\delta}[([\dot{N}]_j + P_s)^{-1}[\bar{N}]_j]^T$$

$$\sum\ddot{\delta}_{ij} = [\ddot{N}_{ij} + P_g]^{-1}\sigma^2 + Q_{ij}\sum\delta_i Q_{ij}^T + R_{ij}\sum\hat{\delta}_j R_{ij}^T \tag{66}$$

至此整个平差计算结束。

# 附　　录

两套公式的一致性

这里要证明的是根据（52），（53）式计算的 $\hat{\delta}$，$\dot{\delta}$ 与（27），（28）式计算的 $\hat{\delta}$，$\dot{\delta}$ 相等。即要证明如下两个等式

$$\text{I} \qquad \hat{\delta} = [S]^{-1}[\bar{C}] = [\dot{N}]^{-1}[C] - [\dot{N}]^{-1}[\bar{N}][M]^{-1}[L]$$

$$\text{II} \qquad \dot{\delta} = [M]^{-1}[L] = [\ddot{N}]^{-1}[\ddot{C}] - [\ddot{N}]^{-1}[\bar{N}]^T[S]^{-1}[\bar{C}]$$

我们先来证明等式 I。

因为 $\hat{\delta} = [S]^{-1}[\bar{C}] = ([\dot{N}] - [\bar{N}][\ddot{N}]^{-1}[\bar{N}]^T)^{-1}([\dot{C}] - [\bar{N}][\ddot{N}]^{-1}[\ddot{C}])$

利用矩阵恒等式，上式可改写为

$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= ([\dot{N}]^{-1} + [\dot{N}]^{-1}[\bar{N}]([\ddot{N}] - [\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\bar{N}])^{-1}[\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1})([\dot{C}] \\ &\quad - [\bar{N}][\ddot{N}]^{-1}[\ddot{C}]) = ([\dot{N}]^{-1} + [\dot{N}]^{-1}[\bar{N}][M]^{-1}[\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1})([\dot{C}] \\ &\quad - [\bar{N}][\ddot{N}]^{-1}[\ddot{C}]) = [\dot{N}]^{-1}[\dot{C}] - [\dot{N}]^{-1}[\bar{N}]([\ddot{N}]^{-1}[\ddot{C}] \\ &\quad + [M]^{-1}[\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\bar{N}][\ddot{N}]^{-1}[\ddot{C}] - [M]^{-1}[\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\dot{C}])\end{aligned} \tag{1}$$

又因为

$$[M]^{-1}[L] = ([\ddot{N}] - [\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\bar{N}])^{-1}[L])$$

利用矩阵恒等式，上式改写为

$$[M]^{-1}[L] = [[\ddot{N}]^{-1} + ([\ddot{N}] - [\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\bar{N}])^{-1}[\bar{N}]^T[\dot{N}]^{-1}[\bar{N}][\ddot{N}]^{-1}][L]$$