

高等学校教学用书

中学数学现代基础

唐复苏 编译

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

中学数学现代基础

唐复苏 编译

北京师范大学出版社

高等学校教学用书
中学数学现代基础
唐复苏 编译

*

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
中国科学院印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 10.75 字数: 224 千

1988 年 4 月第 1 版 1988 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—7 000

ISBN 7-303-00069-0/O · 8

定 价: 1.95 元

内 容 简 介

本书从以下几方面分析中学数学：(1) 研究中学数学中所反映的基本的现代数学思想：集合、关系、数学结构、同构以及代数运算等；(2) 对中学数学中起重要作用的概念：函数、量、数、算法、图形等进行科学分析；(3) 研究中学数学中所使用的语言；(4) 分析中学数学的逻辑基础。

本书数学观点较高，内容丰富，体系安排有独到之处，可作为高等师范院校数学专业有关课程的教材及中学数学教师的教学参考书。

541/222/12

编 译 说 明

本书根据苏联Н. Я. 维林金等人编著的《中学数学课程的现代基础》(Современные основы школьного курса математики) 编译. 原书于1980年由莫斯科教育出版社(Москва «Просвещение») 出版, 经苏联教育部批准作为师范学院数学专业的教科书.

本书研究中学数学中所反映的现代数学基本思想, 用较高观点分析中学数学的重要概念, 论述中学数学的语言和逻辑基础. 本书篇幅不大, 但内容较为丰富, 安排上也有其独到之处. 本书对于高等师范院校数学专业学生和在职中学数学教师有一定参考价值, 它将有利的提高中学数学教师的业务素质, 促进中学数学教学的改革. 同时, 对于高等师范院校有关课程尤其是《初等数学研究》的教学改革也将起一定的推动作用. 因此, 本书可作为高等师范院校开设有关课程的教材, 也可供高等师范院校数学专业师生和中学数学教师参考.

编译者曾于1985年起在苏州大学为数学系本科学生和教材教法专业的研究生开设《中学数学现代基础》课程, 并将该书译出印成讲义作主要参考书. 1985年11月, 在由原教育部委托召开的初等数学选课教材会上, 汇报了该课程的开设情况, 交流了这本教材, 引起了与会代表的兴趣, 受到了本专业专家与前辈的热情鼓励. 这次会上决定将《中学数学现代基础》列为高等师范院校数学专业的选修课, 迫切希望

• i •

先将这本教材编译出版，以便进一步借鉴、吸收、改造、创新，推动这门课程的建设，争取在不太长的时期内，编写出具有我国特色的《中学数学现代基础》教材。

在这次交付出版时，根据本人的教学实践，在所印讲义的基础上作了进一步的校阅与修改。为便于阅读，在尊重原著的前提下，在介绍国外有关中学数学课程改革的情况与经验的同时，叙述上尽量照顾我国的实际情况。编译稿改正了原书的一些明显的错误，对个别例子作了非实质性的修改，有些地方加上必要的译注。同时，书中提及的一些数学家的外文原名与生卒年代，也是由编译者增补的。

北京师范大学丁尔升教授及曹才翰副教授校订了全部编译稿，作了许多有益的修改，为提高本书的质量花了不少心血。对此谨表示衷心的感谢。

由于本人才疏学浅，编译文中错误不妥之处在所难免。为此，诚恳地希望专家和广大读者给予批评指正。若能这样做，我是非常欢迎和十分感激的。

唐 复 苏

1986年3月于苏州大学

原 书 序 言

本书是《中学数学课程的现代基础》课程的教材。这门课的研究对象是中学里所讲述的数学课程，即通常所称的中学数学。《数学教学法》这一教学科目也以中学数学作为它的研究对象，但是这两门课研究中学数学的观点是不同的，也就是说，它们有着不同的研究课题。

《中学数学课程的现代基础》这门课的研究课题是从下列观点来分析中学数学的：①研究中学数学中所反映的基本数学思想：集合、关系、数学结构、同构以及代数运算等等；②在中学数学中起重要作用的函数、量、数、算法、图形等概念的科学分析；③研究中学数学中所使用的语言；④分析中学数学的逻辑基础。同时，这门课程并不涉及中学教学中叙述和发展这些思想和概念的方法，也不去研究在中学里怎样在这些思想、概念、语言和逻辑原理的基础上去教数学的问题，这些问题应该在《数学教学法》这门课中来研究。

因此，《中学数学课程的现代基础》这门课的根本任务是使未来的数学教师有可能用较高的观点去认识他们所教的学科。这些观点能够将分散的事实统一起来，有可能以作为中学数学现代基础的一般数学与逻辑思想为基础将分散的事实系统化。

我们假定读者已经听完师范学院教学计划中的主要数学课程（《数学分析》、《代数与数论》、《几何》、《数理逻辑》、《数

系)),熟悉这些课程中所研究的概念与命题.但是,为了便于阅读,本书的某些章节综合地引证了与该章所研究的材料有关的主要定义与命题.

本书作者的分工是这样的:第一到四章是由 Н. Я. Виленкин 编写的,并且在第一章中采用了 А. А. Столяр 提供的材料.第五章的前两节是由 К. И. Дуничев 编写的,第3节是由 Н. Я. Виленкин 编写的.第六章的初稿是由 А. А. Столяр 编写的,第七章的初稿是由 А. А. Столяр 与 Л. А. Калужнин 编写的,这两章是由 Н. Я. Виленкин 修改的,修改时利用了在他指导下的梁赞师范学院高级教员 А. Х. Назиев 的研究材料,作者对他表示衷心的感谢.

在编写第一章时,曾经利用了 А. Д. Александров 与 А. Н. Колмогоров 的文章[3]、[4]、[5]、[7],尼·布尔巴基的历史纲要[14]以及 К. А. Рыбников 的文章与书[8], [49]. 在第二与第四章中利用了 К. Куратовский 与 А. Мостовский 的书[34]和 С. Феферман 的书[54]. 在第六章中一部分材料是依据 С. Клини 的书[31]和 А. Черч 的书[58]. 有些概念(例如“有向半群”)是属于书的作者的,正数量概念的叙述也是如此,它与科学院院士 А. Н. Колмогоров [3] 的提法有些区别.

本书的评论者 М. Д. Гриндлингер 教授、Е. С. Ляпин 教授、С. И. Рабинович 副教授和 А. Р. Есаян 副教授对原稿中出现的缺点提出了宝贵的意见,在此对他们表示感谢.

目 录

原书序言	ix
第一章 数学的方法论基础	1
§ 1 数学的对象和特征	1
1. 关于数学方法论	1
2. 数学的对象	2
3. 数学的特征	3
§ 2 数学发展的基本时期	5
1. 引言	5
2. 数学的萌芽	5
3. 常量数学	8
4. 变量数学	13
5. 数学发展的现代时期	14
6. 现代数学的特征及其发展前景	20
§ 3 认识的数学方法	23
1. 数学与现实	23
2. 现实的数学模型	24
3. 作为数学模型例子的数、形、集合的概念	26
4. 等价的抽象	29
5. 理想化及其在数学中的作用	30
§ 4 公理化方法	33
1. 数学中的公理化方法	33
2. 公理化举例	34
3. 与数学中的公理化方法有关的一般概念	36
4. 形式的公理化理论	40
5. 公理与数学构造	42

第二章 中学数学的集合论观点·····	48
§1 “朴素”集合论与公理集合论·····	48
1. “朴素”集合论·····	48
2. 集合论的策梅罗—弗兰克尔公理体系·····	50
§2 结构与结构种类·····	54
1. 集合的笛卡儿积·····	54
2. 集合的等级表·····	55
3. 数学对象的集合论构造·····	57
4. 结构种类·····	61
5. 结构种类举例·····	62
§3 集合论与中学数学·····	64
1. 中学数学中的数集·····	64
2. 点集·····	66
3. 集合论在中学数学中的作用·····	67
4. 中学数学中的集合包含关系·····	68
5. 中学数学中集合的运算·····	70
6. 中学数学中集合的笛卡儿积·····	73
§4 中学数学中的对应与关系·····	76
1. 引言·····	76
2. 基本概念·····	77
3. 等价关系与分类·····	79
4. 序关系·····	81
5. 中学数学中的主要对应与关系及其性质·····	84
6. 算术和代数中的等价关系·····	88
7. 中学数学中的等价类·····	89
8. 等价关系与变换群·····	90
9. 齐次空间与中学数学·····	92
第三章 中学数学课程的映射与函数·····	94
§1 映射与结构·····	94
1. 基本概念·····	94

2. 结构的射	96
3. 不变结构	98
4. 中学数学中研究的映射的基本形式	101
5. 中学数学里结构的射与映射的运算	103
6. 中学数学中的拓扑空间和度量空间	105
7. 中学数学中的连续映射与同胚映射	107
§ 2 数值函数	108
1. 项与函数	108
2. 给出函数的其他方法	111
3. 中学数学中的连续函数	114
4. 初等函数的集合	116
5. 指数函数与群 $(R, +)$ 到群 $(R_+, \cdot)$ 上的同构映射	118
6. 指数函数的性质	122
7. 引进指数函数概念的其他方法	124
8. 三角函数	126
9. 三角函数与平面旋转	130
10. 三角函数与微分方程	131
§ 3 有限集的映射与组合论	133
1. 组合论的基本原理	133
2. 组合论的基本公式	136
第四章 中学数学课程的代数与算术基础	140
§ 1 代数运算与代数	140
1. 代数运算	140
2. 逆运算	143
3. 中学数学的基本代数运算	147
4. 代数	148
5. 代数的一些种类	150
6. 中学数学中代数的基本类型	152
§ 2 项及其变形	154
1. 代数中的项	154

2. 幂与倍数	156
3. 单项式与交换半群	158
4. 有理项	160
§ 3 代数的序 · 对称化	162
1. 半群中的序关系	162
2. 代数的对称化	164
3. 半环的扩张	169
§ 4 自然数	172
1. 引言	172
2. 皮亚诺公理体系	173
3. 归纳构造的基本定理	175
4. 皮亚诺公理体系的完备性	180
5. 皮亚诺公理体系的相容性	182
6. 作为良序半环的自然数集	184
7. 有限集与无限集	185
8. 以加法为基础的自然数集公理体系	191
§ 5 正数量和正实数	193
1. 正数量集合的公理体系	193
2. 正数量公理体系的相容性	196
3. 正数量公理体系的完备性	198
4. 正实数集 R_+	200
第五章 中学几何的一些问题	203
§ 1 几何学的向量结构	203
1. 引言	203
2. 韦尔公理体系	204
3. 韦尔公理体系的其他方案	206
4. 韦尔公理体系的相容性和完备性	209
5. 标架与坐标	210
6. 直线	213
7. 射线	215

8. 线段	217
9. 平面	218
10. 半平面	221
11. 长度与角度	223
12. 运动	226
13. 点——向量仿射空间	230
14. 韦尔公理体系与中学几何	234
§ 2 几何的度量结构	236
1. 柯尔莫戈洛夫建立欧几里得平面结构的逻辑纲要	236
2. 韦尔公理体系与柯尔莫戈洛夫公理体系的联系	244
§ 3 几何量的度量	246
1. 量的一般定义	246
2. 量的直接度量	248
3. R^k 中体积的度量	249
4. 曲线的长度	253
5. 曲线长度的存在性	254
6. 长度的唯一性	256
7. 弧长的下半连续性	258
8. 曲面的面积	258
第六章 中学数学的语言	261
§ 1 名字 意义 涵义	261
1. 名字	261
2. 名字和涵义	263
3. 语句	265
4. 常元与变元	267
5. 形式	269
§ 2 中学数学的基本符号	272
1. 数学语言	272
2. 数学符号	274
3. 中学数学的字母表	276

4. 中学代数的字母表	280
5. 中学几何的字母表	281
6. 数学分析初步的语言	283
7. 中学代数语言的句法	287
8. 中学代数语言的语义	290
9. 式	291
10. 几何和分析初步中的项与式	292
11. 初等式	293
第七章 中学数学的逻辑	295
§ 1 数学命题	295
1. 中学数学中的数学命题	295
2. 逻辑等价性与逻辑推理	297
3. 完全逻辑的陈述	299
§ 2 定义	301
1. 引言	301
2. 名目定义和实在定义	302
3. 被定义项与定义项	304
4. 合理的定义和不合理的定义	306
5. 存在性与唯一性	308
6. 摹状词	310
7. 公理化定义	311
8. 古典定义	313
9. 递归定义	315
§ 3 证明	316
1. 形式化的证明和有内容的证明	316
2. 推理规则	319
3. 间接证明	322
4. 用数学归纳法证明	326
参考文献	328

第一章 数学的方法论基础

§ 1 数学的对象和特征

1. 关于数学方法论

在每一个研究数学、应用数学或准备教其他人学数学的人面前，自然地会产生下列一些方面的问题，例如数学的对象，数学科学与客观现实的关系，数学概念与理论产生发展的途径，数学抽象的本质，离散与连续的关系等等。这些问题以及与之相近的问题构成了数学方法论的对象。关于方法的理论，关于专用于这门科学的研究客观现实的方法的学说，是数学方法论的一个重要部分。在数学方法论中，要研究这样的一些问题，例如建立抽象化的方法，确定各个数学分支的逻辑联系，在整体或它的各部分中对数学的逻辑结构的全部要求，数学中的存在性与真理性的概念等等。

但是，数学方法论的问题并不仅仅限于这些方面，它还要研究数学中所应用的全部认识方法。而为了理解这全部的认识方法，必须在数学的历史发展过程中来考察，不仅要研究数学科学的内部问题，而且要研究它与其它科学以及它与人类社会活动各方面的联系。

从更广的观点看，数学方法论理解为关于认识世界和改造世界的哲学的理论，理解为世界观原则在认识过程和

实践方面的应用。这样去理解对象，方法论问题获得了一般哲学的解释。数学方法论的研究要与研究自然界、社会和思维发展的最一般规律的通用的方法论相联系，要与马克思主义的哲学、辩证唯物主义的世界观相联系。

本章我们研究数学方法论的若干问题。理解这些问题对于未来教师来说是必要的，使他们能将自己的工作及其成果和实践相结合，使他们的工作服从于我们社会发展的共同任务。在利用数学发展的现代时期所特有的抽象化、形式方法与模型进行研究时，数学方法论的这些知识可以使他们看到它们的客观现实性，研究客观现实归结为建立这些模型与抽象化，同时可以把数学的相对独立性理解为认识客观实际的特殊形式。

2. 数学的对象

也象其他科学一样，数学研究的是现实的物质世界，研究现实世界的物体及其相互间的关系。但是数学与研究各种物质运动形式的自然科学(力学、物理、化学、生物等)或信息传递形式的科学(信息论、自动化理论与控制论的其他分支)不同，它研究现实世界的形式与关系，它们是从其内容中抽象出来的。因此，数学并不研究物质运动的任何形式，它不能看作为一门自然科学。

在 19 世纪下半叶，恩格斯给出了数学对象的如下定义：“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式与数量关系，所以是非常现实的材料。”他还说：“但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式与关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长

宽高的点,没有厚度和宽度的线。 a 和 b 与 x 和 y ,即常数和变数”¹⁾。

从恩格斯的这些话可知,曾经是从数学科学萌芽时期开始研究的对象的原始数学概念——自然数、量和几何图形,就是从现实世界中得来的,是物质对象的某些特征抽象的结果,而不是在脱离现实的“纯思维”中产生的。同时,为了成为数学研究的对象,物质对象的性质与关系必须从它们的实际内容中抽象出来。

因此,数学的特点在于:它区分出所有的物体和现象所固有的,但是与它们的实际内容无关的数量关系与空间形式,抽象出这些关系与形式,并作为数学本身的研究对象。

数学的对象在上述定义是恩格斯在一百年前给出的。从那时候起所经过的一个世纪,自然科学和社会科学蓬勃地发展,技术空前增长,产生了新的知识领域。现在许多知识领域的数学化进入到那种被认为是纯人文的科学(语言学、社会学、经济学)中去了。高速电子计算机的出现在完成计算与逻辑程序时加强了人工智能。

解决新问题的必要性引起了新的数学领域(拓扑学、一般代数学、泛函分析、数理逻辑等)的建立,并且改造了全部数学体系,引起了对数学的作用与本质以及数学在其他科学中的地位的质变。如上所述,使我们感到有必要明确地说明恩格斯给出的数学定义,这将在§2第6款中详述。

3. 数学的特征

我们指出数学科学的如下特征:

1) 恩格斯《反杜林论》(中译本),人民出版社1970年第1版,第35页。