

H J S X M X

环境 数学 模型

华东师范大学出版社

·汪礼初 编著

·HUANJING SHUXUE
MOXING

·WANGLIRENG
BIANZHU

·HUADONG SHIFAN
DAXUE CHUBANSHE

华东师范大学教材出版基金资助出版

环境数学模型

汪礼初 编著

10101/5

201

华东师范大学出版社

环境数学模型

汪礼初 编著

华东师范大学出版社出版发行

(上海中山北路 3663 号 邮政编码 200062)

新华书店上海发行所经销

南京理工大学激光照排公司照排

上海长阳印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6 字数 150 千字

1997 年 3 月第 1 版 1997 年 3 月第 1 次印刷

印数 001—2,000 本

ISBN7—5617—1685—0/()• 063

定价 8.50 元

序 言

环境科学的日益重要与数学模型的应用广泛正被越来越多的人所认识,但是如何把实际问题归结为数学模型并应用数学工具最经济地回答所要解决的问题,一般都会遇到各种各样的困难。环境数学模型这门课程就是为了给没有受过专门训练的大学生提供一定的帮助。

1988年下半年开始编者对一些系的大学生和研究生讲授有关环境数学模型的课程,1990年它发展成为理科大学生的一门公共选修课。本书就是多年的教学讲义经过修订写成的。它适合作为大学生一学期(每周2至3学时)的选修课教材,也可供有关专业(例如环境科学系、地理系)的研究生选读。

除了一个关于数学模型的基本概念的简短绪论以外,全书分为三章。第一章数学生态学模型,介绍种群动力学模型,数学工具是常微分方程。第二章水质模型和气质模型,介绍BOD-DO模型和输运与扩散模型,数学工具是偏微分方程。第三章环境规划模型是环境管理模型的简介,数学工具是线性规划。第一、二、三章都配有习题,以便读者复习和练习。考虑到很多读者是非数学类专业的大学生,书中用到的数学工具都是初等的,掌握高等数学的学生一般都能读懂。

在本书编写和修订过程中,宋永昌、王辅俊两位教授给予了热情鼓励并提供许多资料,编者谨向他们表示深切的感谢。

限于编者的知识和经验,本书难免有不少缺点和错误,热诚欢迎读者批评指正。

编者

1996年2月

目 录

绪论	1
§ 0.1 数学模型概述	1
§ 0.2 建立数学模型的一个简单例子——王岛的狼	5
§ 0.3 植物-麋-狼生态模型的解	9
第一章 数学生态学模型	14
§ 1.1 模型的导出和问题	14
1.1.1 单种群模型	14
1.1.2 两种群模型	25
§ 1.2 求解生态学模型的解析方法	37
§ 1.3 求解生态学模型的摄动方法	41
§ 1.4 稳定性概念及其应用	46
习题一	74
第二章 水质模型和气质模型	79
§ 2.1 模型的导出和一般性质	80
2.1.1 一维 BOD-DO 方程组	80
2.1.2 水体和气体中的输运与扩散模型	86
§ 2.2 拟线性一阶偏微分方程和方程组的理论	93
2.2.1 拟线性一阶偏微分方程的特征理论	93
2.2.2 拟线性一阶偏微分方程组的特征理论	101
§ 2.3 BOD-DO 方程组的特征线解法	105
§ 2.4 在一维不稳定浅水流动问题上的应用	119
2.4.1 双曲型方程组的初边值条件和数值解	119

2.4.2 一维不稳定浅水流动方程组及其解法	121
§ 2.5 输运与扩散模型的解法	123
2.5.1 扩散方程初值问题的解析方法	123
2.5.2 输运模型的解法——点源和迭加法	125
§ 2.6 系统辨识方法	137
习题二	140
第三章 环境规划模型	144
§ 3.1 环境规划模型的导出	144
§ 3.2 单纯形方法	155
3.2.1 实例——两个变量线性规划的图解法	155
3.2.2 单纯形方法	157
3.2.3 单纯形方法的应用	169
习题三	178
参考文献	182
部分习题参考答案与提示	183

绪 论

§ 0.1 数学模型概述

环境问题范围很广,主要包括人口、污染和能源消耗三大类问题。本课程主要讨论与前两类问题有关的生态学和水质的数学模型。

0.1.1 数学模型的作用

我们先来看一些环境问题的实际例子:

(1) 为了改善一条有机污染严重、溶解氧浓度低于给定标准的河流水质,可能需要建立一座污水处理厂,在规划这个污水处理厂之前应该明确回答处理厂应当建在什么地方、规模多大和处理效率多高等问题。

(2) 一座计划中的发电厂准备把它的冷却水排入附近河流,为了评价电厂建成后是否会对河流构成热污染,环保部门必须根据该厂的设计排水量和水温确定所能造成的河水温升,以便进一步确定这种温升是否会对水的生态系统,特别是对鱼类产生明显影响。

(3) 过量的营养物质(如含磷、氮的物质)流入湖泊或水库会造成水体富营养化。为了防止某一湖泊或水库发生富营养化,应该把流入的营养物质限制在什么水平上。

上面的问题有这样一些共同特征:为了解决这类问题,需要了解各作用因素之间的定量关系,以及人类活动产生的各种废物(如废热)与描述环境质量的参数之间的关系。例如,水体的质量,常常用其中所含有毒物质浓度、水温、浊度、溶解氧浓度、藻类及其他

各种物质的浓度来表示；在天然水体和已受污染的水体中，这些参数的值是不同的。所谓水体受到了污染，是指由于人类活动所产生的废水和废热大量排入水体，使水质状态的改变超过了一定的限度。排入污染物质的强度和这些水质参数变化之间到底具有怎样的定量关系呢？这正是数学模型所要回答的问题。一旦建立起描述这种定量关系的数学模型，就可以用它来解决上面的实际问题。

数学模型在解决实际环境问题中的应用主要有以下两大类：

(1) 在环境规划和管理中的应用。例如，制定环境质量和排放标准，确定减少排放污染物的数量，对不同治理方案的经济性和有效性进行比较等等。

(2) 在环境影响评价和环境质量预测方面的应用。例如，对规划中的新建工程项目进行环境影响评价，对城市结构变化、人口增长、能源结构改变和经济高速发展可能造成的环境质量变化进行预测等等。

不难发现在各类应用中有一个共同的特点，即要求对问题有预见能力，这正是数学模型的主要优点之一。由于这一优点，使数学模型成为解决各种复杂环境问题的有力工具。

0.1.2 数学模型的分类

通常可以按模型的空间维数、时间的相关性、数学方程的特征等来进行分类：

(1) 模型的空间维数。

描述生物群体生长规律的模型不包含空间变量，我们称之为零维模型。描述水质现象的数学模型一般应包含三个空间变量，我们称之为三维模型。但是在处理某些具体问题，在不影响结果的精确度情况下，可以在一定假设基础上使用包含两个空间变量的二维模型或只含一个空间变量的一维模型。例如在一般情况下，可以用一个一维模型来描述一条河流，用一个二维模型来描述一个大而浅的湖泊等等。按照系统工程的概念，零维模型称为集中参数

模型；一维以上的模型称为分布参数模型；介于两者之间的是具有离散空间变量的模型，这种模型较接近于集中参数模型，用计算机处理很方便。我们在第一章介绍集中参数模型，在第二章介绍分布参数模型和离散空间变量模型。

(2) 数学模型的时间相关性。

含有时间变量的数学模型能够描述水质随时间变化的规律，我们称之为动态模型；不含时间变量的模型只能描述平衡状态的水质情况，我们称之为稳态模型。根据所要解决问题的不同性质，可分别采用具有不同时间相关性的模型。例如，制定排放标准、确定减少排放量时需要使用临界条件下的稳态模型；而要了解一次污染事故后河流中的水质分布时必须使用动态模型。

(3) 模型特征的其他分类。

按模型变量是否为随机变量，可以把数学模型分为确定性模型和非确定性模型两类。模型变量是随机变量时，我们称之为随机模型；模型变量不含有随机特性时，我们称之为确定性模型。

按模型方程中变量的阶次又可以把数学模型分成线性模型和非线性模型。模型方程中变量的阶次都是一次时，我们称之为线性模型；否则，就称之为非线性模型。

按模型所属的数学分支来分，又可分为代数模型、微分方程模型、函数方程模型和不等式模型等。

0.1.3 建立数学模型的步骤

建立一个实际环境问题的数学模型一般可分下面五步来进行：

(1) 导出模型形式。

这一步包括选择适当的模型变量，确定变量之间的相互影响与变化规律，写出描述这些关系的数学方程或表达式。应当指出，这一步所得到的结果往往不是唯一的，模型的形式取决于所需解决问题的性质。一个模型只能反映它所描述的现象的基本特征，只

是真实世界的一种近似。因此,在满足问题要求的前提下,应该使用尽可能简单的模型形式。

(2) 研究模型的一般特性。

这一步包括研究模型的平衡特征、稳定性和灵敏性(灵敏性是反映模型参数变化时模型解的变化情况的一种特性)。如果这一步不能得到令人满意的结果,就必须回到前面步骤重新做起。

(3) 确定模型参数。

在模型中,通常含有一些取常数值参数。这些参数的数值需要用某种方式加以确定,如经验公式、实验室试验和数学方法等等。但是,不管用什么方法,都必须使得到的参数值在代入模型后能较好地重现观测数据。当两个模型重现数据的能力相同时,通常选用含有参数较少的模型。如果这一步得不到令人满意的结果,就必须再回到前两步重新做起。

(4) 模型的检验。

经过上面三个步骤之后,已经得到了一个能较好地重现确定参数时所用数据的数学模型。但是,这个模型重现其他观测数据的能力还不知道,因此还必须检验模型是否具有预言能力。所谓检验就是用独立于确定参数时所用数据的新观测数据与模型的计算值相比较。如果达到预期精度,则说明所建立的模型是成功的;否则,必须重新做前面三步的工作。

(5) 模型的应用。

这一步是用所建立的模型尝试解决原先提出的问题,如果模型达不到解决问题的要求,则仍要重复上述各个步骤,直到能用所建立的模型满意地解决原问题为止。

需要强调指出:在使用模型时始终要记住导出模型时的条件,不要在应用它们时超出模型所适用的范围。现场观测数据是建立数学模型的基础,数学模型不过是把观测数据条理化的一种方法。

§ 0.2 建立数学模型的一个简单例子
—— 王岛的狼

这个模型目的在于定量地描述美国王岛上植物、麋和狼之间的相互依存关系。王岛上有一个很大的麋群，它们靠岛上的植物为生，同时岛上还存在一个仅仅靠麋为生的狼群。有人对岛上麋与狼的数量进行了长期观察，通过定性分析画出了一个结构模型，如图 0-1 所示。这个结构模型启发我们：可以用这种食物链中的能量输

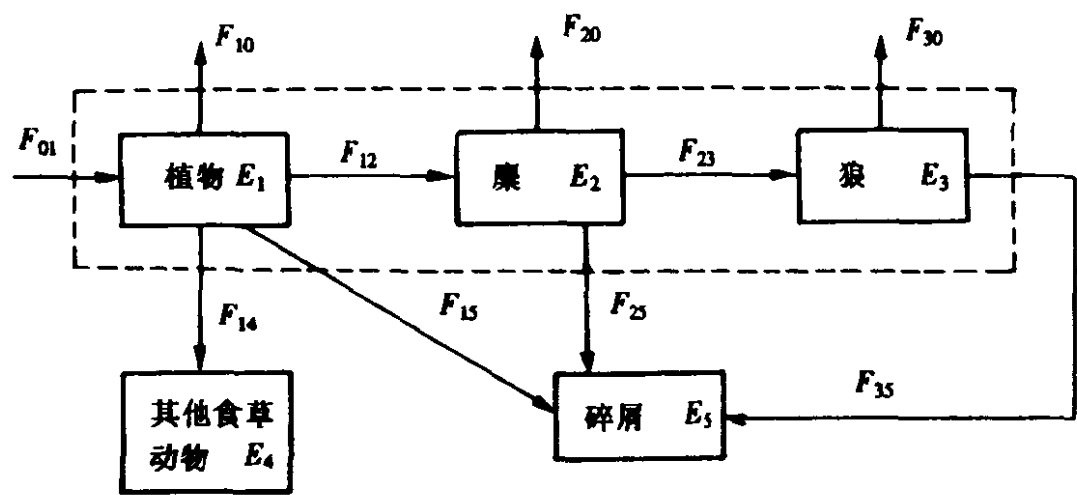


图 0-1 食物 - 麋 - 狼结构模型

入和输出的变化来描述植物 - 麋 - 狼之间的数量关系。我们把食物链上每个分离环节中储存的能量定为模型的变量，经研究知道：一只狼平均具有 37240 千卡能量，一只麋平均具有 413000 千卡能量。在植物环节里的平均生产率按可利用的入射太阳辐射能的 3% 来估计，约为 7500 千卡 / 米² · 年。食物链处于平衡状态时，各分离环节含有的能量可画成如图 0-2 所示的“能量金字塔”。根据能量平衡关系，可以写出该生态系统的物理模型方程。使用图 0-1 中的符号，该系统物理模型方程为：

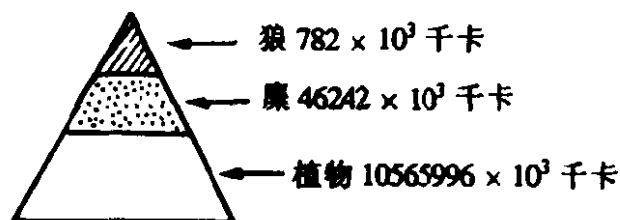


图 0-2 能量金字塔

$$\frac{dE_1}{dt} = F_{01} - (F_{10} + F_{12} + F_{14} + F_{15}), \quad (1)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = F_{12} - (F_{20} + F_{23} + F_{25}), \quad (2)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = F_{23} - (F_{30} + F_{35}). \quad (3)$$

为了把上述的物理模型转换成数学模型,我们必须确定方程①、②、③中 F_{ij} 的具体形式。确定 F_{ij} 后的系统方程(即数学模型)可以是线性表达式也可以是非线性表达式,这取决于问题的性质和要求。为简单起见,我们用线性模型来描述这个简单的生态系统。假设所有输入或输出的能量 F_{ij} 都与相应生物体内储存的能量成正比,即

$$F_{ij} = \phi_{ij} E_i, \quad (4)$$

则物理模型方程可以写成如下形式数学模型方程:

$$\frac{dE_1}{dt} = F_{01} - (\rho_{10} + \tau_{12} + \tau_{14} + \mu_{15})E_1 = F_{01} - L_1 E_1, \quad (5)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \tau_{12} E_1 - (\rho_{20} + \tau_{23} + \lambda_{25})E_2 = \tau_{12} E_1 - L_2 E_2, \quad (6)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = \tau_{23} E_2 - (\rho_{30} + \lambda_{35})E_3 = \tau_{23} E_2 - L_3 E_3, \quad (7)$$

其中 ρ 为呼吸速率, τ 为供给速率, μ 为死亡速率, λ 为其他能量消耗的速率, L 为总的衰减速率。下标 i 表示环节号, 双下标 ij 表示从环节 i 到环节 j 。

现在把方程 ⑤、⑥、⑦ 写成矩阵 $\frac{dX}{dt} = AX + B$ 的形式, 则根据系数矩阵 A 的性质可以分析这一系统的稳定性:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dE_1}{dt} \\ \frac{dE_2}{dt} \\ \frac{dE_3}{dt} \end{pmatrix}}_{\frac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -L_1 & 0 & 0 \\ \tau_{12} & -L_2 & 0 \\ 0 & \tau_{23} & -L_3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}}_X + \underbrace{\begin{pmatrix} F_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_B, \quad (8)$$

若系数矩阵 A 是复常数阵, 则它的特征值一般是复数, 如果它们都有负的实部, 当时间趋于无穷大 ($t \rightarrow \infty$) 时, 系统即趋于稳定。此例中系数矩阵 A 的特征值是 $-L_1$, $-L_2$ 和 $-L_3$, 因此系统是稳定的 (以后还会讲到, 该系统是渐近稳定的)。反之, 如果特征值实部是正的, 由于方程的解里含有以 e 为底的指数项 (其指数为特征值与时间 t 的乘积), 这种解就会随着 $t \rightarrow \infty$ 自身也趋于无穷大, 系统就是不稳定的。

当系统处于稳态时, 即 $\frac{dE_i}{dt} = 0, i = 1, 2, 3$ 时, 我们得到诸能量的平衡值, 亦称之为解的平衡点。这些解是

$$E_1 = \frac{F_{01}}{L_1}, \quad (9)$$

$$E_2 = \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2}, \quad (10)$$

$$E_3 = \frac{\tau_{23} \tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2 L_3}. \quad (11)$$

以上讨论中我们假定了方程⑤、⑥、⑦都是常系数方程,但事实上人类的活动总是以各种不同的方式改变着生态系统中的常数(以后称这些在不同情况下取不同值的常数为参数)。例如,有毒污染物可以增大死亡率,热污染可以增大水环境中的代谢速率等等。采取灵敏度分析方法可以找出对群体变化最敏感的那些参数,还可以发现必须以高精度确定的那些参数。例如,通过计算 $|\partial E_i/\partial P_i|$ (P_i 代表任一参数)或表达式 $|(\partial E_i/E_i)/(\partial P_i/P_i)|$ 来考察平衡点如何随参数值的改变而变化。

在这个例子中容易依据观测数据来确定模型参数。但是一般说模型的参数估计不是很简单的,我们在 § 2.6 中将介绍利用系统辨识方法进行参数估计的实例。我们用表 0-1 列出观测得到或估算得到的基本数据以及算得的参数值。

表 0-1 基本数据和计算得到的参数值

基本数据 卡 / 米 ² · 年	E_{10}	E_{20}	E_{30}	F_{01}	F_{10}	F_{15}	F_{12}
	12000	0.43	0.0014	7500	3500	3600	19.4
	F_{14}	F_{20}	F_{25}	F_{23}	F_{30}	F_{35}	岛的面积 米 ²
	380.6	9.2	10.1	0.085	0.076	0.009	544×10^6
参数 1/ 年	L_1	L_2	L_3	τ_{12}	τ_{23}		
	0.625	45.12	60.72	0.00162	0.198		

最后介绍一下模型的检验。首先需要说明的是,由于我们只是把这个模型作为介绍建立数学模型的过程的一个简单例子,所以在数学上不够严密,也不能试图对它进行严格的检验。但是,从这个模型中我们仍然可以引伸出一些结论,这些结论可以较好地与观察结果相对照(这些观测数据应该独立于用于参数估计的数据)。例如,对系统加上一个振荡的输入 F_{01} 来检验这个食物链中的群体 E_1 、 E_2 和 E_3 时,它们也表现出振荡特性,它们的振荡幅度

按植物、麋和狼的顺序递减,而且狼环节的振荡落后于麋环节的振荡。又如,对参数作出一些改变后,发现从旧的平衡点到一个新的平衡点所需要的时间也与观测值接近。但是,如果超出模型的使用范围,会导致荒谬的结论。例如,假设在某个时刻狼的数量变为零(例如将狼全部杀死),按照这个模型来推算,狼群会在不到一年的时间内重新恢复,事实上这是完全不可能的。这种错误结果之所以产生,是由于上面的假设超出了模型的使用范围。数学模型经过检验,就可用来解决一些实际问题了。例如,假设希望在岛上开辟一个猎场,猎取一定数量的麋,那么由于麋数量的减少,会使该生态系统趋向什么样的新平衡点,达到新平衡点需要多长时间呢?这个问题留给读者作为练习。

§ 0.3 植物 - 麋 - 狼生态模型的解

要把归结成的数学模型应用到实际问题上去,很重要的一个步骤是要对模型方程求解。下面我们就以植物 - 麋 - 狼生态模型为例,介绍模型方程求解的两种方法。

0.3.1 模型方程的解析解

植物 - 麋 - 狼生态模型是常系数一阶线性常微分方程组。根据微分方程理论,当微分方程的右端项 F_{01} 取某些特定形式时方程将有解析解。这里介绍一种求解析解的逐项积分法。当微分方程具有如下标准形式时:

$$\frac{dx}{dt} + \beta_1 x = f(t), \tag{12}$$

式中 x 为未知函数, t 为自变量(时间), β_1 为常数, $f(t)$ 为自变量 t 的已知函数。如果 $f(t)$ 的形式是 $\beta_2, \beta_2 t^k, \beta_2 e^{\xi_2 t}, \beta_2 t^k e^{\xi_2 t}$ 这几项中的任意一项或某几项的代数和时,微分方程 ⑫ 可以用逐项积分法解析求解,相应的解如表 0-2 所示。

表 0-2 微分方程⑫的解

项目	$f(t)$	取决于系数的解			
		$\beta_1=0, \xi_2 \neq 0$	$\beta_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0, \beta_1 + \xi_2 \neq 0$	$\beta_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0, \beta_1 + \xi_2 = 0$	$\xi_2 = 0$
1	β_2	$\beta_2 t + C$	$\frac{\beta_2}{\beta_1} + Ce^{-\beta_1 t}$	—	—
2	$\beta_2 t^k$	$\frac{\beta_2}{k+1} t^{k+1} + C$	$\beta_2 f(k) + Ce^{-\beta_1 t}$	—	—
3	$\beta_2 e^{\xi_2 t}$	$\frac{\beta_2}{\xi_2} e^{\xi_2 t} + C$	$\frac{\beta_2}{\beta_1 + \xi_2} e^{\xi_2 t} + Ce^{-\beta_1 t}$	$\beta_2 t e^{-\beta_1 t} + Ce^{-\beta_1 t}$	同 1
4	$\beta_2 t^k e^{\xi_2 t}$	$\frac{\beta_2}{\xi_2} e^{\xi_2 t} f(k) + C$	$\frac{\beta_2}{\beta_1 + \xi_2} e^{\xi_2 t} f(k) + Ce^{-\beta_1 t}$	$\frac{\beta_2}{k+1} t^{k+1} e^{-\beta_1 t} + Ce^{-\beta_1 t}$	同 2
5	0	C	$Ce^{-\beta_1 t}$	—	—
注解	(1) C 为与初始条件有关的积分常数				
	(2) $f(k) = \sum_{m=1}^{k+1} [k! t^{m-1} (-1)^{k+m-1}] / [(m-1)! \beta_1^{k+2-m}]$				

对于上述生态模型,我们只要依次对模型中的每个方程重复使用表 0-2,并利用初始条件 $E_i(0) = E_{i0}$ (下标 i 的意义同前) 就能得到它的解析解。解的表达式是:

$$E_1(t) = \left(E_{10} - \frac{F_{01}}{L_1} \right) e^{-L_1 t} + \frac{F_{01}}{L_1}, \quad (13)$$

$$E_2(t) = \left(E_{20} - \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} - \frac{\tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{L_2 - L_1} \right) e^{-L_2 t} + \frac{\tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{L_2 - L_1} e^{-L_1 t} + \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2}, \quad (14)$$

$$E_3(t) = \left[E_{30} - \frac{\tau_{23}}{L_3 - L_2} \left(E_{20} - \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} - \frac{\tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{L_2 - L_1} \right) - \frac{\tau_{23} \tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2 L_3} - \frac{\tau_{23} \tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{(L_3 - L_1)(L_2 - L_1)} \right] e^{-L_3 t} + \frac{\tau_{23}}{L_3 - L_2} \left(E_{20} - \frac{\tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2} - \frac{\tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{L_2 - L_1} \right) e^{-L_2 t} + \frac{\tau_{23} \tau_{12} (E_{10} - F_{01}/L_1)}{(L_3 - L_1)(L_2 - L_1)} e^{-L_1 t} + \frac{\tau_{23} \tau_{12} F_{01}}{L_1 L_2 L_3}. \quad (15)$$

0.3.2 模型的数值解

对于植物-麋-狼生态系统,还可以使用精确性更高的标准形式洛特卡——伏尔泰拉(Lotka——Volterra) 竞争方程来描述:

$$\frac{dE_1}{dt} = a_1 + a_2 E_1 + a_3 E_1^2 + a_4 E_1 E_2, \quad (16)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = b_1 E_1 E_2 + b_2 E_2 + b_3 E_2^2 + b_4 E_2 E_3, \quad (17)$$