数学物理方程

陈志浩

高等教育出版社

作者曾为工科院校有关专业研究生讲授数学物理方程课，本书就是在授课讲义的基础上修改而成的.

本书的特点是侧重于数学模型的建立、数学和物理的结合以及各类方程的多种解题方法的介绍. 以解题方法为主线编排章节，介绍了解数学物理方程最重要的几种解析方法以及应用最广泛的几种数值解法. 各章有一定独立性. 在考虑到工科专业特点的前提下，叙述上力求数学逻辑的严密性. 本书每章末附有适量的习题，书末附有习题答案.

本书可供工科院校有关专业研究生作为数学物理方程课教材，也可供工科院校有关专业本科生使用，选学书中若干章.

数学物理方程
陈志浩
*
高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
二二〇七工厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 11.875 字数 280 000
1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷
印数 0001—2 230
ISBN 7-04-002845-X/O·904
定价 2.90 元

前　言

为适应工科院校研究生教学的需要，作者在一九七九年为我校首届研究生班开设《数学物理方程》课，讲稿经修改后以讲义形式出版.以后,结合教学实践又作过两次较大的修改,给历届研究生班作为《数学物理方程》课的教材使用，其中部分章节也选取为本科生有关专业使用.

本书在编写中注意针对工科院校的特点，目的是为后继课程及科研工作提供必要的数学工具.在内容的选取上，不侧重于严格的数学理论,而是着重于数学模型的建立,注意数学和物理的结合,介绍各类方程多种解题的方法和技巧.内容循序渐进,采用以解题的方法编排章节，以利于工科学生根据需要灵活选用.本书中介绍了最重要的几个解析解法：分离变量法、积分法(特征线法)、格林函数法(点源函数法)、积分变换法,以及当前应用最广泛的几种数值解法:差分法、变分法和有限元法.

考虑到对学生的教学要求，仍需掌握必要的数学基础理论知识，在考虑到工科院校各专业特点的前提下，叙述上力求数学的严密性.对有些结论指出适用的条件、范围，不加以详细论证，但指出可查阅的有关专著.对最重要的解析法——分离变量法的理论基础,即常微分方程的本征值理论专门列为一章，对斯图姆-刘维尔问题和奇异斯图姆-刘维尔问题作了些探讨,对δ函数、广义傅立叶变换也作了较为严格，而又易于为工科学生理解和接受的叙述，并融进了作者近几年来在教学和科研实践中的一些体会.

为照顾到教学和读者自学的方便，文字叙述力求通俗，注意《高等数学》课与本课程的衔接，补充了必要的基础知识，如函数项级数的一致收敛性、二阶非齐次线性常微分方程的参数变易法、广义幂级数法、Γ函数等. 每章都配有一定数量深广度适当的习题，在书末附有各章习题的答案.

本书可用作工科高校研究生教材，也可作为理工科高校有关专业和工程技术人员的教学或自学参考书. 考虑到使用对象的实际情况，本书较全面地介绍了数学物理方程课的基本内容，并且以解法来编排这些内容，各章间有一定的独立性，因而在教学时数上就有较大的灵活性. 对在大学阶段已学过一些数学物理方程的研究生，可重点选学第二章及第五——十二章；对有关专业的本科生可重点选学第一章、第二章§4、第三章§1—§3、第四章和第六章. 学时幅度可在 32—70.

本书在定稿过程中，高等学校工科数学课程教学指导委员会数学物理方程评审组的诸位先生，苏州大学校长姜礼尚教授，电子科技大学冯潮清教授都仔细审阅了全稿，对本书提出了很多建设性的意见，作者对此表示衷心的感谢.

陈志浩

1989年5月于苏州

目　录

引言……………………………………………………………………1

第一章　典型方程和定解条件………………………………………4

§1　波动方程及其定解问题的提出…………………………………4

附录　传输线方程……………………………………………………12

§2　热传导方程及其定解问题的提出……………………………15

§3　位势方程及其定解问题的提出………………………………20

§4　定解问题的适定性………………………………………………23

习题一…………………………………………………………………26

第二章　二阶线性偏微分方程的分类和解的一些性质…………28

§1　两个自变量的变系数线性方程…………………………………28

§2　两个自变量的常系数线性方程…………………………………34

§3　多于两个自变量的线性方程……………………………………37

§4　二阶线性偏微分方程解的一些性质……………………………39

习题二…………………………………………………………………42

第三章　积分法………………………………………………………45

§1　积分法……………………………………………………………45

§2　一维波动方程的达朗贝尔公式…………………………………50

§3　一维非齐次波动方程的柯西问题………………………………57

§4　三维和二维波动方程的泊松公式………………………………63

习题三…………………………………………………………………72

第四章　分离变量法…………………………………………………74

§1　齐次方程齐次边界条件的定解问题……………………………74

§2　非齐次方程齐次边界条件的定解问题…………………………89

§3　周期性条件的定解问题…………………………………………98

§4　非齐次边界条件的处理…………………………………………107

习题四…………………………………………………………………112

第五章　本征值问题……116
§1　边值问题和本征值问题……116
§2　斯图姆-刘维尔边值问题……119
§3　奇异斯图姆-刘维尔边值问题……126
习题五……129
第六章　贝塞耳函数……132
§1　贝塞耳方程的导出……132
§2　贝塞耳方程求解……135
§3　贝塞耳函数的性质……139
§4　贝塞耳方程的本征值问题……147
§5　应用举例……154
§6　虚宗量的贝塞耳函数……163
附录　Γ函数……168
习题六……171
第七章　勒让德函数……174
§1　勒让德方程的导出……174
§2　勒让德方程求解……176
§3　勒让德多项式……179
§4　勒让德方程的本征值问题……185
§5　应用举例……190
§6　连带勒让德多项式……194
习题七……196
第八章　积分变换法……198
§1　傅立叶积分与傅立叶变换……198
§2　傅立叶变换的基本性质……206
§3　δ函数及广义傅立叶变换……210
§4　傅立叶变换的应用……217
§5　拉普拉斯变换……220
§6　拉普拉斯变换的基本性质……224
§7　拉普拉斯逆变换……228
§8　拉普拉斯变换的应用……232

附录 1 傅立叶变换简表……238
附录 2 拉普拉斯变换简表……239
习题八……240
第九章 格林函数法……243
§1 格林公式……243
§2 拉普拉斯算子的格林函数……249
§3 几种特殊区域上的格林函数及狄利克莱问题的解……257
习题九……264
第十章 差分法……266
§1 基本概念……266
§2 位势方程定解问题的差分格式……271
§3 扩散方程定解问题的差分格式……283
§4 波动方程定解问题的差分格式……294
习题十……299
第十一章 变分法……301
§1 泛函与变分……301
§2 泛函极值的必要条件，欧拉方程……306
§3 多元函数的泛函及其极值问题……312
§4 泛函的条件极值问题……317
§5 变分原理……321
§6 里兹方法……326
习题十一……332
第十二章 有限元法……335
§1 常微分方程边值问题的有限元法……335
§2 位势方程边值问题的有限元法……341
§3 扩散方程和波动方程定解问题的有限元法……349
习题十二……356
习题答案……357

引　　言

数学物理方程(简称数理方程)主要指从物理学及其他各门自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程，有时也包括和此有关的积分方程、微分积分方程和常微分方程.

本书作为工科院校的教材，不可能对数学物理方程的理论和方法作全面的研究. 我们将着重研究二阶线性偏微分方程中几个有着明确物理意义的典型方程，介绍一些常用的解法并阐述解的物理意义.

首先，我们介绍一下偏微分方程的定义和有关术语.

(1) 偏微分方程——含有未知多元函数的偏导数的方程. 例如

$$\frac{\partial u}{\partial x}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y), \tag{a}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0, \tag{b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{c}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x-y, \tag{d}$$

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=xy^2. \tag{f}$$

(2) 偏微分方程的阶——出现在方程中的未知函数偏导数的

最高次数. 如方程(a)(b)都是一阶的，方程(c)(d)(e)都是二阶的，方程(f)是三阶的. m阶偏微分方程的一般形式是

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial^{m_1} x_1 \partial^{m_2} x_2 \cdots \partial^{m_n} x_n}\right) = 0,$$

其中 x_1、x_2、…、x_n 是自变量，u 是未知 n 元函数，$m_1+m_2+\cdots+m_n=m$.

(3) 线性、拟线性和非线性

如果一个偏微分方程中的未知函数及其各阶导数都是线性的，且系数只依赖于自变量，这样的方程称为线性偏微分方程，否则称它为非线性偏微分方程. 如方程(a)(c)(d)是线性的，而方程(b)(e)(f)是非线性的.

如果一个非线性偏微分方程中未知函数的最高阶导数是线性的，我们就称它为拟线性偏微分方程. 如方程(e)(f)是拟线性的，拟线性是非线性的特殊情况.

两个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

其中 A、B、…、G 可以依赖于自变量 x 和 y，但与未知函数 u 及其导数无关.

(4) 齐次和非齐次

方程中不含未知函数及其偏导数的项称为自由项. 对于线性方程，我们称自由项为零的方程是齐次的，如方程(c)；称自由项不为零的方程是非齐次的，如方程(a)(d).

(5) 偏微分方程的解——如果一个函数具有所需要的各阶连续偏导数，并且代入方程后使该方程成为恒等式，则称此函数为该偏微分方程的解.

由于数学物理方程和具体问题有密切联系，因此在解数学物理方程时常能从方程的物理背景中得到解的启示. 又因数学物理方程所研究的问题都比较复杂，要用到物理学的有关知识和较多的数学工具，这些特点我们在学习数学物理方程时是要注意的.

第一章 典型方程和定解条件

在物理、力学和工程技术中，有些物理现象可以用偏微分方程的定解问题来进行数学描述．在本章中，我们将通过几个不同的物理模型导出三种典型的数学物理方程，并对同一个物理问题的各种具体状态给出相应的定解条件．

§1 波动方程及其定解问题的提出

一、波动方程的导出

例 设有一根拉紧的均匀且柔软的轻弦，试导出其作微小横振动的运动方程．

我们先对上述问题中的有关物理名词作数学上的描述．如图 1-1 建立坐标系，把弦的平衡位置取为 Ox 轴，并以 $u(x,t)$ 表示弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 的位移．

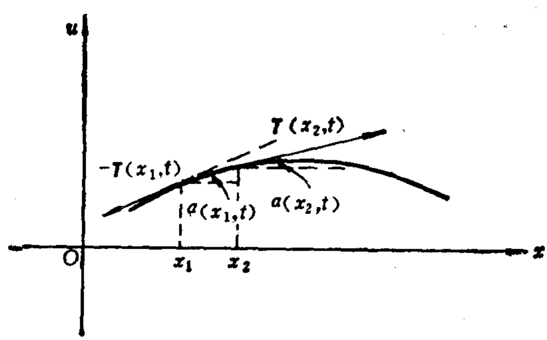

图 1-1

"横振动"——是指弦上各点的振动方向在同一平面内，且与弦的平衡位置垂直.

"微小横振动"——是指对弦上充分接近的两点 x_1 和 x_2，它们振动的位移差是很小的，即在振动过程中弦上各点处切线的斜率 $|u_x|\ll 1$. 在此假定下，长度为 dx 的微弦段 $[x, x+dx]$ 在时刻 t 时为

$$ds=\sqrt{1+u_x^2}\,dx\approx dx,$$

即弦不伸长. 由虎克(Hooke)定律知，弦上 x 点处张力 $\boldsymbol{T}$ 的大小与时间 t 无关.

"均匀"——是指弦的线密度 $\rho=$常数.

"柔软"——是指弦不抵抗弯曲，所以张力总是沿着弦的切线方向，张力在法线方向无分力.

"拉紧、轻弦"——是指张力比重力大得多，所以弦的自重可略去不计.

下面我们来推导弦的微小横振动方程.

解 在弦上任取一小段 $[x_1, x_2]$ (见图 1-1)，在时段 $[t_1, t_2]$ 内，根据动量原理：

$$\boxed{\begin{matrix}[x_1,x_2]\text{在}t=t_2\\ \text{时的动量}\end{matrix}}-\boxed{\begin{matrix}[x_1,x_2]\text{在}t=t_1\\ \text{时的动量}\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix}\text{作用在 }[x_1,x_2]\text{ 上所有外}\\ \text{力在}[t_1,t_2]\text{内产生的冲量}\end{matrix}}$$

规定弦的切线方向的正向总是沿着横坐标 x 增加的方向，弦段 $[x_1, x_2]$ 两端在时刻 t 所受的张力分别记为 $-\boldsymbol{T}(x_1, t)$ 和 $\boldsymbol{T}(x_2, t)$，张力 $\boldsymbol{T}(x, t)$ 与 Ox 轴的夹角记为 $\alpha(x, t)$，$T=|\boldsymbol{T}|$.

沿 Ox 方向，弦段 $[x_1, x_2]$ 所受力的总和为

$$T(x_2, t)\cos\alpha(x_2, t)-T(x_1, t)\cos\alpha(x_1, t),$$

由于弦只作"横振动"，所以沿 Ox 方向弦上各点速度为零，根据动量原理，有

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)\cos\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\cos\alpha(x_1,t)]dt=0. \tag{1.1.1}$$

沿 Ou 方向，弦段$[x_1,x_2]$所受力的总和为

$$T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t),$$

而在时段$[t_1,t_2]$内，弦段$[x_1,x_2]$沿 Ou 方向动量的变化为

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t_2)u_t(x,t_2)dx-\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t_1)u_t(x,t_1)dx,$$

由动量原理得

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t)]dt$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}[\rho(x,t_2)u_t(x,t_2)-\rho(x,t_1)u_t(x,t_1)]dx. \tag{1.1.2}$$

在弦振动是微小的假定下，$|u_x|\ll 1$，而 $\operatorname{tg}\alpha(x,t)=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$.

$$\therefore\quad \sin\alpha(x,t)=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx u_x,$$

$$\cos\alpha(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx 1.$$

故(1.1.1)、(1.1.2)式可分别简化为

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)-T(x_1,t)]dt=0$$

和

$\frac{\partial T}{\partial x}dx$

$$\int_{t_1}^{t_2}[T(x_2,t)u_x(x_2,t)-T(x_1,t)u_x(x_1,t)]dt$$ $\int_{t_1}^{t_2}T\,\partial u_x\,dt=\int_{x_1}^{x_2}\rho\,\partial u_t\,dx$

$$=\int_{x_1}^{x_2}[\rho(x,t_2)u_t(x,t_2)-\rho(x,t_1)u_t(x,t_1)]dx,$$ T

亦即

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)dxdt=0 \tag{1.1.3}$$

$\int_{t_1}^{t_2}T\partial u_x=\int_{x_1}^{x_2}\rho[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)]dx$

和

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt=\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)dtdx. \qquad (1.1.4)$$

在 $u(x,t)$ 二次连续可微和 T、ρ 一次连续可微的假定下，根据闭区间上连续函数的性质，以及区间 $[t_1,t_2]$、$[x_1,x_2]$ 的任意性，就有

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0, \qquad (1.1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right). \qquad (1.1.6)$$

由(1.1.5)可知 T 与 x 无关，在振动是"微小"的假定下 T 与 t 也无关，所以 $T=$ 常数. 又在弦是"均匀"的假定下，$\rho=$ 常数. 于是(1.1.6)式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1.1.7)$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$.

方程(1.1.7)通常称为弦的自由振动方程.

如果弦在运动过程中，始终受到一个以 Ou 方向为正向的外力，设密度为 $F(x,t)$，则弦段 $[x_1,x_2]$ 沿 Ou 方向所受力的总和为

$$T(x_2,t)\sin\alpha(x_2,t)-T(x_1,t)\sin\alpha(x_1,t)+\int_{x_1}^{x_2}F(x,t)dx.$$

用同样方法可推得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad (1.1.8)$$

其中 $f(x,t)=\dfrac{1}{\rho}F(x,t)$.

方程(1.1.8)称为弦的强迫振动方程. 方程(1.1.7)和(1.1.8)都称为一维波动方程.

如果我们研究的是均匀柔软薄膜的微小横振动，用类似的方

法可导出二维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t). \qquad (1.1.9)$$

在研究声波或电磁波在空间传播时，将导出三维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \qquad (1.1.10)$$

波动方程的一般形式可记为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+f \quad 或 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 u+f, \qquad (1.1.11)$$

其中"Δ"或"∇^2"为拉普拉斯(Laplace)算子，在三维、二维或一维时分别表示$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 或$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

二、定解条件

上面所导出的方程(1.1.7)和(1.1.8)是物理量 $u(x, t)$ 所满足的微分关系式，它是一切均匀柔软的弦作微小横振动的共同规律，我们在推导这个方程时完全不必考虑弦在初始时刻的状态以及弦的端点所受的约束情况.

如果我们不是泛泛地研究弦的振动，势必要考虑到弦所处的特定条件. 因为，任何一个具体振动过程中弦的状态必然要依赖弦的长度，弦在两端受约束的情况以及开始时刻弦上各点的位移和初速度. 因此，为了确定具体的运动状态还要考虑运动系统初始状态的条件——初始条件，以及边界上外界对物体约束情况的条件——边界条件.

初始条件和边界条件统称为定解条件. 未附加定解条件的偏微分方程称为泛定方程.

对于一个具体的物理问题，定解条件与泛定方程总是同时提出. 定解条件与泛定方程作为一个整体，称为定解问题.

1. 初始条件

对于弦振动问题来讲，初始条件就是弦在开始时刻的位移和速度. 若开始时刻是 $t=0$，用 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 分别表示初位移和初速度，则初始条件可表达为

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x). \end{cases} \tag{1.1.12}$$

对于二维和三维波动方程，初始条件表达为

$$\begin{cases} u(M,0)=\varphi(M), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(M,0)=\psi(M), \end{cases} \tag{1.1.13}$$

其中 M 是所讨论区域 Ω 中的点，u 及 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 的具体含义应按实际问题来说明.

2. 边界条件

边界条件是某一具体物理现象所处的边界状况的数学描述，边界条件的提出显然不是唯一的. 下面我们讨论三种不同类型的边界条件.

我们以弦振动问题为例. 如果弦的长度为 l，它的两端点在运动时的变化规律是已知的，则边界条件的形式为

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t). \tag{1.1.14}$$

特别地，当 $\mu_1=\mu_2=0$ 时，表示弦的两端是固定的. 这种直接给出未知函数 $u(x,\ t)$ 在边界上应满足的条件，称为第一类边界条件.

如果弦的端点可以沿着与 x 轴垂直的方向自由滑动，并受一个沿位移方向作用的已知外力，则边界条件的形式为

$$u_x(0,t)=\mu_1(t),\ u_x(l,t)=\mu_2(t). \tag{1.1.15}$$

事实上，我们可取包含 $x=l$ 这端的任一小弦段 $[x_1,\ l]$，如图 1-2 所示. 记 $x=x_1$ 端的张力为 $-T$，在 $x=l$ 端作用的已知外力其

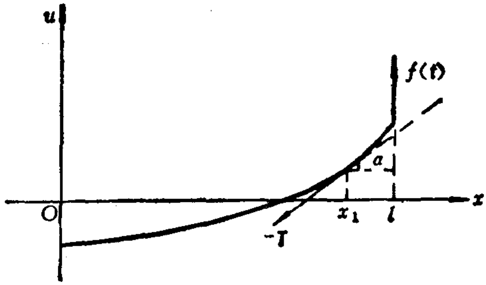

图 1-2

大小为$f(t)$，则在任一时段$[t_1,t_2]$内，沿 Ou 方向，由动量原理得

$$\int_{t_1}^{t_2}[-T\sin\alpha(x_1,t)+f(t)]dt$$
$$=\int_{x_1}^{l}[\rho u_t(x,t_2)-\rho u_t(x,t_1)]dx.$$

假设 $u(x,t)$一次连续可微，则当 $x_1\to l$ 时，上式右端由于被积函数的有界性，其值趋于零．于是有

$$\int_{t_1}^{t_2}[-Tu_x(l,t)+f(t)]dt=0 .$$

由$[t_1,t_2]$的任意性及闭区间上连续函数的性质，得

$$Tu_x(l,t)=f(t),$$

从而

$$u_x|_{x=l}=\frac{1}{T}f(t)=\mu_2(t).$$

对 $x=0$ 一端可作类似的讨论．特别地，当弦的端点不受外力作用，则称此端为自由端，此时 $\mu_1=\mu_2=0$．这种给出未知函数沿边界外法向导数在边界上应满足的条件，称为第二类边界条件．

如果弦的端点处具有弹性支承，则边界条件的形式为

$$(u_x-\alpha u)|_{x=0}=\mu_1(t),\quad (u_x+\beta u)|_{x=l}=\mu_2(t), \tag{1.1.16}$$

其中 α、$\beta>0$.