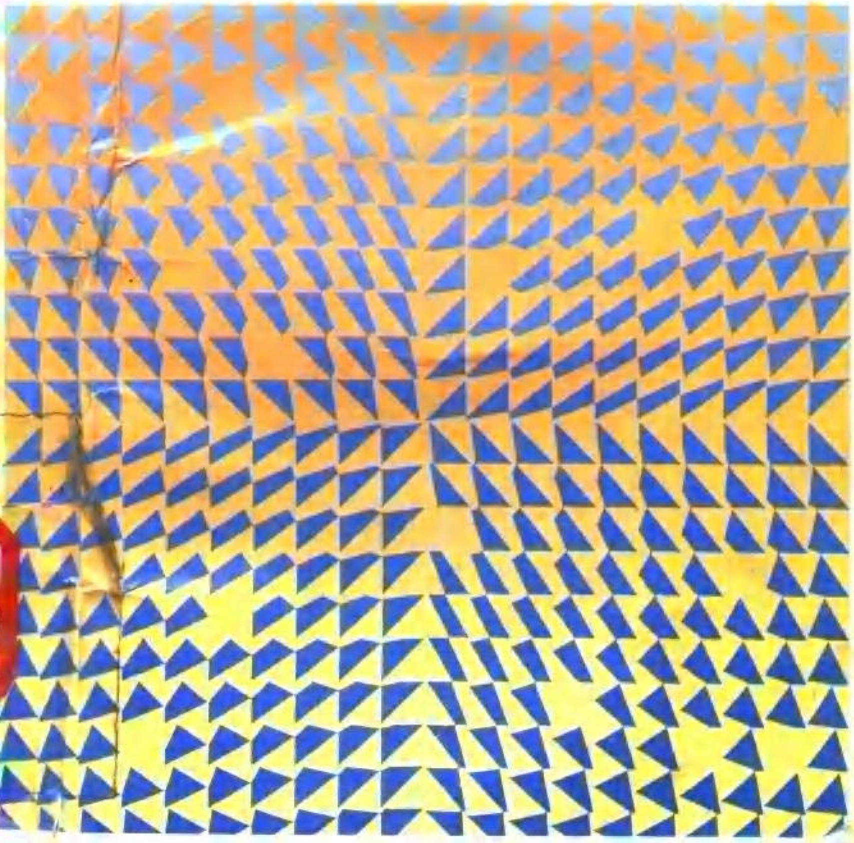
概率论解题方法与技巧

薛留根 编著

国防工业出版社



概率论解题方法与技巧

薛留根　编著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

概率论解题方法与技巧/薛留根编著. —北京:国防工业出版社,1996.1
ISBN 7-118-01414-1

Ⅰ.概… Ⅱ.薛… Ⅲ.概率论-解题 Ⅳ.O211-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 00602 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
北京市顺义李史山胶印厂印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092 1/32 印张 11¼ 246 千字
1996 年 1 月第 1 版 1996 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:1—5000册 定价:11.80 元

前　言

概率论是重要的数学分支之一，其应用已遍及经济、科
.教育、管理和军事等诸多方面。

从研究必然问题到处理随机问题，初学者往往会遇到不
困难，特别是在做习题及实际应用方面困难更多些。为了帮
者学习，特编写了《概率论解题方法与技巧》一书。本书不
统地介绍概率论各部分内容的原理、思想和方法，更侧重
示解题的方法和技巧，其中相当一部分范例还是概率论
内容的扩充和引伸。希望通过阅读本书，使读者系统地加
这些内容的理解和掌握，以便提高分析问题和解决问题
力。

全书共五章，各章配有适量的习题，书后附有答案或提
读者在学习过程中自我检查使用。另外，将“若干问题的
解法”这部分内容以附录方式放在本书之后，可供大家

编写本书的过程中得到了北京航空航天大学应用数理
堪教授、张福渊教授、李卫国教授的大力支持和热情帮
详细审阅了书稿，并提出了许多修改性建议，谨此深

编者的学识和水平，书中难免有错误或不当，敬请读

编　　者

内容简介

本书不仅系统地介绍概率论的基本原理、思想和方法，而且更侧重对概率论的典型范例进行分类解答，介绍解题的方法和技巧，其中相当一部分范例是概率论本身内容的扩充和引伸。全书共分五章，每章内容按范例的类型进行编排。书中范例除解答外，有些范例还附有思路分析及注释。各节末安排了一定数量的练习题，以帮助读者提高分析问题和解决问题的能力。书末附有若干问题的概率论解法及习题答案或提示。

本书可供理工科、师专、电大等高等院校师生及有关科技人员参考使用。

目　录

第一章 事件与概率

事件与概率是概率论的两个基本概念，正确理解这两个概念是很有必要的。本章主要从基本概念和性质出发，给出典型问题的解题方法和技巧。

§1.1 随机事件与样本空间

弄清随机试验的样本空间是进行概率计算的基础，掌握事件的运算及其性质是进行概率计算必不可少的基本功，因而必须对这方面的习题进行练习。

1. 样本空间

随机试验的可能结果叫做样本点，全体样本点构成的集合叫做样本空间，样本空间用“Ω”表示，样本点用“ω”表示。

2. 事件的定义

样本空间中具有某种性质的样本点构成的集合称为随机事件，简称事件，用 A、B、C…表示。不可能事件记为$\varnothing$，必然事件记为 Ω。

3. 事件间的关系

(1)事件的包含　如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称 A 含于 B，记作 $A\subset B$。

(2)事件的相等　若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$。

(3)事件的对立(逆)　A 的补集 $\bar{A}=\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件或逆事件。

4. **事件间的运算**

(1)事件的并(和)　“事件 A、B 至少有一个发生”构成一个事件,称为 A 与 B 的并,记作 $A\cup B$。

“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并,记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 。

“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生”这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的并,记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

(2)事件的交(积)　“两个事件 A、B 同时发生”构成一个事件,称为 A 与 B 的交,记作 $A\cap B$ 或 AB。

“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。

“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生”这一事件称为这可列个事件的交,记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

(3)事件的差　“A 发生但 B 不发生”构成的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B$。

(4)事件的互不相容(互斥)　若 $AB=\varnothing$,则称事件~~A与~~事件 B 互不相容。

事件的运算与集合的运算类似,必然事件、不可能事件及随机事件分别相当于全空间、空集及子集。因此,集合的运算性质可以照搬到事件中来。如交换律,结合律,分配律及对偶律,等等。

$1+C_3^1+C_3^1C_2^1+C_3^1C_2^1C_1^1$

例 1 箱中有 4 件同样的产品，分别标号 1，2，3，4，试写出下列随机试验的样本空间：

(1)从箱中一次任取两件；

(2)从箱中任取一件，不放回箱中，再从箱中任取一件(不放回抽取)；

(3)从箱中每次取一件，取后放回箱中，再从箱中任取一件(有放回抽取)；

(4)从箱中不放回地接连抽取产品，直到取得 1 号产品为止。

解 (1)试验中抽取的两件产品没有先后顺序问题，则其样本点有 $C_4^2=6$ 个，若用(i,j)表示取得 i 号及 j 号产品，故所求样本空间为

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

(2)由于是不放回抽取，因此，两次不能取到同号产品。同时，这个试验应该考虑取到的两件产品的先后顺序，那么这个试验的样本空间有 $A_4^2=12$ 个样本点。若用(i,j)表示第 1 次取到 i 号产品，第 2 次取到 j 号产品，则所求样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),\\&(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}\end{aligned}$$

(3)这个试验是有“放回抽取”，即第 1 次取到某号产品后放回箱中，第 2 次仍有可能取到这个标号的产品，就是说两次取到的标号可相同，那么样本点有 $4^2=16$ 个。故

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\\&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\\&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\\&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}\end{aligned}$$

(4)该随机试验一方面是连续取到的产品的标号不可能

重复,另一方面是只要取到 1 号产品试验就结束,这个试验的所有可能结果有 $1+A_3^1+A_3^2+P_3=16$ 个,沿用(2)的记号,则所求的样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,3,1),\\&(2,4,1),(3,4,1),(3,2,1),(4,2,1),\\&(4,3,1),(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),\\&(3,4,2,1),(4,2,3,1),(4,3,2,1)\}\end{aligned}$$

例 2 在某系学生中任选一名学生,设 A 表示被选出的是男生,B 表示该生是三年级学生,C 表示该生是运动员。

(1)叙述事件 $A\cap B\cap\overline{C}$ 的意义;

(2)在什么条件下有恒等式 $A\cap B\cap C=C$;

(3)什么时候关系式 $C\subset B$ 正确;

(4)什么时候关系式 $\overline{A}=B$ 成立。

解 (1)事件 $A\cap B\cap\overline{C}$ 表示该生是三年级男生,但不是运动员。

(2)$A\cap B\cap C=C$ 等价于 $C\subset A\cap B$,故全系的运动员都是三年级男生时,$A\cap B\cap C=C$ 成立。

(3)当运动员一定是三年级的学生,或者说除三年级外,其它年级的学生都不是运动员时,$C\subset B$ 成立。

(4)当全系女生都在三年级且三年级学生都是女生时,$\overline{A}=B$ 成立。

例 3 掷一粒骰子,设 A 为"掷得的点数不超过 4",B 为"掷得偶数点",C 为"掷得奇数点"。试用样本点表示下列事件:

(1)$A\cup B$; (2)$A\cap B$; (3)$A-B$;

(4)$\overline{B}$; (5)$\overline{B\cap C}$; (6)$\overline{B\cup C}$。 $\overline{B}\cup\overline{C}$

解 根据题意可知:$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,4,6\}$,$C=\{1,$

3,5},则

(1)$A \cup B=\{1,2,3,4,6\}$;

(2)$A \cap B=\{2,4\}$;

(3)$A-B=\{1,3\}$;

(4)$\bar{B}=C=\{1,3,5\}$;

(5)$\overline{B \cap C}=\{1,2,3,4,5,6\}$;

(6)$\overline{B \cup C}=\varnothing$。

例 4 设 A、B、C 为任意三个事件,试用 A、B、C 表示下列各事件。

(1)A 发生但 B 与 C 不发生(H_1); $A\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

(2)A 和 B 都发生,但 C 不发生(H_2);

(3)三个事件中恰有一个发生(H_3); ~~$A\cup B\cup C$~~ $A\bar{B}\bar{C}$

(4)三个事件中恰有两个发生(H_4);

(5)三个事件都发生(H_5);

(6)三个事件至少有一个发生(H_6);

(7)三个事件都不发生(H_7);

(8)三个事件中至少有两个发生(H_8); $AB\cup AC\cup BC$

(9)三个事件中不多于一个发生(H_9);

(10)三个事件中不多于两个事件发生(H_{10})。 $\overline{ABC}$

解 (1)因事件"A 发生但 B 与 C 不发生"等价于事件"A、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 三个事件都发生",即 $H_1=A\bar{B}\,\bar{C}$。

(2)因事件"A 和 B 都发生但 C 不发生"等价于"A、B、$\bar{C}$ 三个事件都发生",故 $H_2=AB\bar{C}$。

(3)因为事件"A、B、C 恰有一个发生"等价于或者"A 发生而 B 与 C 不发生"或者"B 发生而 A 与 C 不发生"或者"C 发生而 A 与 B 不发生",所以

$$H_3=A\bar{B}\,\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\,\bar{B}C$$

(4)利用(3)的思考方法结合(2)可得

$$H_4 = AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$$

(5)由事件积的定义,有

$$H_5 = ABC$$

(6)方法一　根据事件和的定义,有

$$H_6 = A \cup B \cup C$$

方法二　"A、B、C 中至少有一个发生",就是说或者"A、B、C 中恰有一个发生"或者"A、B、C 中恰有两个发生"或者"A、B、C 都发生",故利用(4)、(5)、(6)及事件并的定义可得:

$$H_6 = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$$

(7)方法一　因事件"A、B、C 都不发生"等价于事件"$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 都发生",所以

$$H_7 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

方法二　因为 H_7 的对立事件是 H_6,所以

$$H_7 = \overline{A \cup B \cup C}$$

(8)方法一　因为"A、B、C 至少有两个事件发生",就是说或者"恰有两个事件发生"或者"A、B、C 都发生",所以利用(4)、(5)得

$$H_8 = AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$$

方法二　由于事件"A、B、C 至少有两个发生"等价于或者"A、B 发生"或者"A、C 发生"或者"B、C 发生",故

$$H_8 = AB \cup AC \cup BC$$

(9)方法一　由于事件"A、B、C 中不多于一个发生",就是说或者"A、B、C 都不发生"或者"A、B、C 中恰有一个发生",故

$$H_9 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup \overline{A}B\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C}$$

方法二　由于 H_9 的逆事件是 H_8，故

$$H_9=\overline{AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC\cup ABC}$$

或者

$$H_9=\overline{AB\cup AC\cup BC}\Rightarrow \bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$$

(10)方法一　按照(9)中方法一的分析方法可得

$$H_{10}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup \overline{A}\,\overline{B}C\cup \overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}$$
$$\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$$

方法二　H_{10}的逆事件为 H_5，故

$$H_{10}=\overline{ABC}$$

方法三　因事件“A、B、C 不多于两个发生”等价于“$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 至少一个发生”，故

$$H_{10}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$$

例 5　设 A、B、C 为随机事件，试证明下列各式：

(1) $(A-AB)\cup B=A\cup B$；

(2) $(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}$；

(3) $(A\cup B)-AB=A\overline{B}\cup\overline{A}B$；

(4) $A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup B\cup C$。

证明　(1)方法一　设 $\omega\in A\cup B$，则

$$\begin{cases}\text{或 }\omega\in A\overline{B}\Rightarrow\omega\in A\text{ 同时 }\omega\in\overline{B}\Rightarrow\omega\in(A-B)\\ \qquad\Rightarrow\omega\in(A-AB)\\ \text{或 }\omega\in\overline{A}B\Rightarrow\omega\in B\text{ 同时 }\omega\in\overline{A}\Rightarrow\omega\in B\\ \text{或 }\omega\in AB\Rightarrow\omega\in B\end{cases}$$

于是 $\omega\in(A-AB)\cup B$，故

$$(A-AB)\cup B\supset A\cup B$$

另一方面，显然有 $(A-AB)\subset A\subset A\cup B$。于是

$$(A-AB)\cup B\subset A\cup B$$

故 $$(A-AB)\cup B=A\cup B$$

方法二　设 $A\cup B$ 发生，则 A、B 至少有一个发生，那么有下面三种情况：

①A 发生而 B 不发生$\Rightarrow A$ 发生而 AB 不发生$\Rightarrow A-AB$ 发生$\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生；

$(B-AB)$

②A 不发生而 B 发生$\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生；

③A、B 都发生$\Rightarrow(A-AB)\cup B$ 发生。

因此不论哪种情况，总有$(A-AB)\cup B$ 发生，即有

$$(A-AB)\cup B\supset A\cup B$$

另一方面，由方法一知，$(A-AB)\cup B\subset A\cup B$，由于"$\subset$"及"$\supset$"同时成立，故(1)得证。

方法三　注意到 $A-B=A\overline{B}$，于是

$$\begin{aligned}(A-AB)\cup B&=(A\overline{AB})\cup B=[A(\overline{A}\cup\overline{B})]\cup B\\&=(A\overline{A}\cup A\overline{B})\cup B=(A\overline{B})\cup B=A\cup B\end{aligned}$$

方法四　由于 $A-AB$ 表示 A 发生而 A、B 不同时发生，即 A 发生 B 不发生，故$(A-AB)\cup B$ 表示 A 与 B 至少有一个发生，这等价于事件 $A\cup B$ 发生。故$(A-AB)\cup B=A\cup B$。

(2)由于

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}$$

而 $$A-AB=A\overline{AB}=A(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}=A\overline{B}$$

故 $$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}$$

(3)由于

$$\begin{aligned}(A\cup B)-AB&=(A\cup B)(\overline{AB})=(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=[(A\cup B)\overline{A}]\cup[(A\cup B)\overline{B}]=\overline{A}B\cup A\overline{B}\end{aligned}$$

故 $$(A\cup B)-AB=A\overline{B}\cup\overline{A}B$$

(4)由于

$$A\cup(B-AB)\cup(C-AC)=A\cup(B\overline{AB})\cup(C\overline{AC})$$