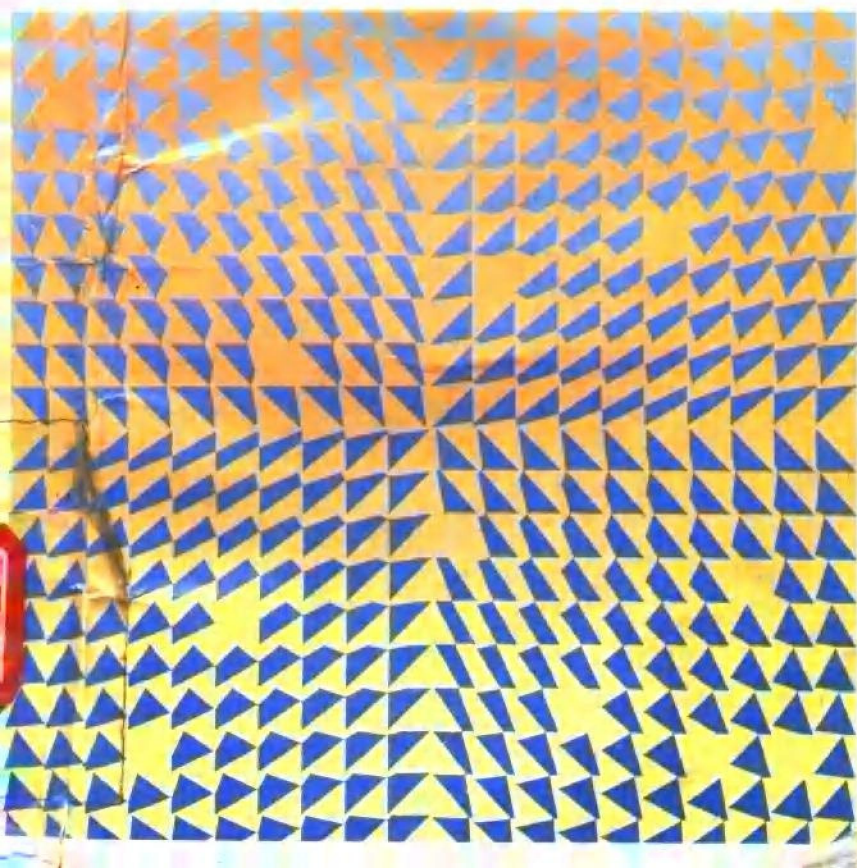


概率论解题方法与技巧

薛留根 编著

国防工业出版社



概率论解题方法与技巧

薛留根 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

概率论解题方法与技巧/薛留根编著. —北京:国防工业出版社, 1996. 1

ISBN 7-118-01414-1

I. 概… I. 薛… II. 概率论-解题 IV. 0211-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 00602 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京市顺义李史山胶印厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 印张 11 $\frac{1}{4}$ 246 千字

1996 年 1 月第 1 版 1996 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—5000 册 定价:11.80 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

前 言

概率论是重要的数学分支之一,其应用已遍及经济、科
教育、管理和军事等诸多方面。

从研究必然问题到处理随机问题,初学者往往会遇到不
困难,特别是在做习题及实际应用方面困难更多些。为了帮
者学习,特编写了《概率论解题方法与技巧》一书。本书不
系统地介绍概率论各部分内容的原理、思想和方法,更侧重
示解题的方法和技巧,其中相当一部分范例还是概率论
内容的扩充和引伸。希望通过阅读本书,使读者系统地加
这些内容的理解和掌握,以便提高分析问题和解决问题
力。

全书共五章,各章配有适量的习题,书后附有答案或提
读者在学习过程中自我检查使用。另外,将“若干问题的
解法”这部分内容以附录方式放在本书之后,可供大家

编写本书的过程中得到了北京航空航天大学应用数理
堪教授、张福渊教授、李卫国教授的大力支持和热情帮
详细审阅了书稿,并提出了许多修改性建议,谨此深

编者的学识和水平,书中难免有错误或不当,敬请读

编 者

内 容 简 介

本书不仅系统地介绍概率论的基本原理、思想和方法,而且更侧重对概率论的典型范例进行分类解答,介绍解题的方法和技巧,其中相当一部分范例是概率论本身内容的扩充和引伸。全书共分五章,每章内容按范例的类型进行编排。书中范例除解答外,有些范例还附有思路分析及注释。各节末安排了一定数量的练习题,以帮助读者提高分析问题和解决问题的能力。书末附有若干问题的概率论解法及习题答案或提示。

本书可供理工科、师专、电大等高等院校师生及有关技术人员参考使用。

目 录

第一章 事件与概率	1
§ 1.1 随机事件与样本空间	1
习题	9
§ 1.2 概率的定义和性质	10
习题	15
第二章 概率的计算	17
§ 2.1 古典概率的直接计算	17
一、预备知识	17
二、选取适当的样本空间	20
三、三类古典概型	23
习题	34
§ 2.2 古典概率的间接计算	36
一、加法公式与逆事件概率公式的应用	36
二、对称性的应用	38
三、母函数(生成函数)法	40
四、利用独立性计算概率	43
五、建立差分方程(递推关系)	46
六、建立微分方程	50
习题	53
§ 2.3 几何概率的计算	54
一、直接计算法	55
二、引进变量法	57
习题	59

§ 2.4 条件概率的计算	60
一、两个基本方法	60
二、乘法公式的应用	66
三、全概率公式与贝叶斯公式的应用	69
习题	71
§ 2.5 独立试验序列概型的计算	74
一、伯努利概型	74
二、伯努利公式和全概率公式的综合应用	76
三、独立试验序列中的等待时间问题	79
习题	81
§ 2.6 计算方法的灵活应用	83
一、一题多解	83
二、全概率公式与差分方程	88
三、综合题	94
习题	97
第三章 随机变量及其分布	99
§ 3.1 随机变量的分布	99
一、离散型随机变量	99
二、连续型随机变量	108
三、分布的确定及判断	112
四、利用分布求概率	118
五、综合题	123
习题	129
§ 3.2 随机变量的独立性和条件分布	135
一、随机变量的独立性	136
二、条件分布	140
习题	146
§ 3.3 随机变量函数的分布	148
一、直接求法	148
二、利用公式法	161
习题	170

§ 3.4 证明题	173
习题	182
第四章 随机变量的数字特征	185
§ 4.1 数学期望和方差的求法	185
一、直接用定义计算	185
二、建立差分方程	199
三、对称性的应用	203
四、随机变量的分解	205
五、公式演变	208
习题	212
§ 4.2 随机变量函数的数学期望和方差的求法	215
一、期望和方差性质的应用	215
二、若干个计算公式的应用	219
三、原点矩与中心矩的计算	226
习题	233
§ 4.3 协方差与相关系数	234
习题	242
§ 4.4 条件数学期望的求法	243
习题	251
§ 4.5 证明题	252
习题	257
第五章 极限定理	260
§ 5.1 四种收敛性	260
习题	273
§ 5.2 大数定律	274
习题	286
§ 5.3 中心极限定理	287
习题	296
§ 5.4 极限定理的应用	298
习题	307

附录	307
附录一 若干问题的概率论解法	307
一、用古典概率模型证明恒等式	307
二、用随机变量的数字特征证明恒等式	311
三、用大数定律证明函数的收敛性	316
四、用中心极限定理证明极限	322
附录二 习题答案或提示	326
参考文献	350

第一章 事件与概率

事件与概率是概率论的两个基本概念,正确理解这两个概念是很有必要的。本章主要从基本概念和性质出发,给出典型问题的解题方法和技巧。

§ 1.1 随机事件与样本空间

弄清随机试验的样本空间是进行概率计算的基础,掌握事件的运算及其性质是进行概率计算必不可少的基本功,因而必须对这方面的习题进行练习。

1. 样本空间

随机试验的可能结果叫做样本点,全体样本点构成的集合叫做样本空间,样本空间用“ Ω ”表示,样本点用“ ω ”表示。

2. 事件的定义

样本空间中具有某种性质的样本点构成的集合称为随机事件,简称事件,用 $A, B, C \dots$ 表示。不可能事件记为 $\emptyset$,必然事件记为 Ω 。

3. 事件间的关系

(1)事件的包含 如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称 A 含于 B ,记作 $A \subset B$ 。

(2)事件的相等 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$ 。

(3)事件的对立(逆) A 的补集 $\bar{A}=\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件或逆事件。

4. 事件间的运算

(1)事件的并(和) “事件 A, B 至少有一个发生”构成一个事件,称为 A 与 B 的并,记作 $A \cup B$ 。

“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并,记作 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 。

“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 至少有一个发生”这一事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的并,记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

(2)事件的交(积) “两个事件 A, B 同时发生”构成一个事件,称为 A 与 B 的交,记作 $A \cap B$ 或 AB 。

“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交,记作 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 。

“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”这一事件称为这可列个事件的交,记作 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

(3)事件的差 “ A 发生但 B 不发生”构成的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B$ 。

(4)事件的互不相容(互斥) 若 $AB=\emptyset$,则称事件 A 与事件 B 互不相容。

事件的运算与集合的运算类似,必然事件、不可能事件及随机事件分别相当于全空间、空集及子集。因此,集合的运算性质可以照搬到事件中来。如交换律,结合律,分配律及对偶律,等等。

$$1 + C_3^1 + C_3^1 i_2 + C_3^1 e_2 e_1$$

3

例 1 箱中有 4 件同样的产品, 分别标号 1, 2, 3, 4, 试写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 从箱中一次任取两件;
- (2) 从箱中任取一件, 不放回箱中, 再从箱中任取一件(不放回抽取);
- (3) 从箱中每次取一件, 取后放回箱中, 再从箱中任取一件(有放回抽取);
- (4) 从箱中不放回地接连抽取产品, 直到取得 1 号产品为止。

解 (1) 试验中抽取的两件产品没有先后顺序问题, 则其样本点有 $C_4^2 = 6$ 个, 若用 (i, j) 表示取得 i 号及 j 号产品, 故所求样本空间为

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

(2) 由于是不放回抽取, 因此, 两次不能取到同号产品。同时, 这个试验应该考虑取到的两件产品的先后顺序, 那么这个试验的样本空间有 $A_4^2 = 12$ 个样本点。若用 (i, j) 表示第 1 次取到 i 号产品, 第 2 次取到 j 号产品, 则所求样本空间为

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

(3) 这个试验是有“放回抽取”, 即第 1 次取到某号产品后放回箱中, 第 2 次仍有可能取到这个标号的产品, 就是说两次取到的标号可相同, 那么样本点有 $4^2 = 16$ 个。故

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

(4) 该随机试验一方面是连续取到的产品的标号不可能

重复,另一方面是只要取到 1 号产品试验就结束,这个试验的所有可能结果有 $1 + A_3^1 + A_3^2 + P_3 = 16$ 个,沿用(2)的记号,则所求的样本空间为

$$\begin{aligned}\Omega = & \{(1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 3, 1), \\ & (2, 4, 1), (3, 4, 1), (3, 2, 1), (4, 2, 1), \\ & (4, 3, 1), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 3, 1), (3, 2, 4, 1), \\ & (3, 4, 2, 1), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 2, 1)\}\end{aligned}$$

例 2 在某系学生中任选一名学生,设 A 表示被选出的是男生, B 表示该生是三年级学生, C 表示该生是运动员。

- (1) 叙述事件 $A \cap B \cap \bar{C}$ 的意义;
- (2) 在什么条件下有恒等式 $A \cap B \cap C = C$;
- (3) 什么时候关系式 $C \subset B$ 正确;
- (4) 什么时候关系式 $\bar{A} = B$ 成立。

解 (1) 事件 $A \cap B \cap \bar{C}$ 表示该生是三年级男生,但不是运动员。

(2) $A \cap B \cap C = C$ 等价于 $C \subset A \cap B$, 故全系的运动员都是三年级男生时, $A \cap B \cap C = C$ 成立。

(3) 当运动员一定是三年级的学生,或者说除三年级外,其它年级的学生都不是运动员时, $C \subset B$ 成立。

(4) 当全系女生都在三年级且三年级学生都是女生时, $\bar{A} = B$ 成立。

例 3 掷一粒骰子,设 A 为“掷得的点数不超过 4”, B 为“掷得偶数点”, C 为“掷得奇数点”。试用样本点表示下列事件:

- (1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A - B$;
- (4) $\bar{B}$; (5) $\overline{B \cap C}$; (6) $\overline{B \cup C}$.

解 根据题意可知: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$.

3, 5}, 则

- (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;
- (2) $A \cap B = \{2, 4\}$;
- (3) $A - B = \{1, 3\}$;
- (4) $\bar{B} = C = \{1, 3, 5\}$;
- (5) $\overline{B \cap C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- (6) $\overline{B \cup C} = \emptyset$.

例 4 设 A, B, C 为任意三个事件, 试用 A, B, C 表示下列各事件。

- (1) A 发生但 B 与 C 不发生 (H_1); $A\bar{B}\bar{C}$
- (2) A 和 B 都发生, 但 C 不发生 (H_2); $AB\bar{C}$
- (3) 三个事件中恰有一个发生 (H_3); $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$
- (4) 三个事件中恰有两个发生 (H_4); $\bar{A}B \cup A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B}C$
- (5) 三个事件都发生 (H_5); ABC
- (6) 三个事件至少有一个发生 (H_6); $A \cup B \cup C$
- (7) 三个事件都不发生 (H_7); $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
- (8) 三个事件中至少有两个发生 (H_8); $AB \cup AC \cup BC$
- (9) 三个事件中不多于一个发生 (H_9); $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$
- (10) 三个事件中不多于两个事件发生 (H_{10}); $\overline{ABC}$

解 (1) 因事件“ A 发生但 B 与 C 不发生”等价于事件“ $A, \bar{B}, \bar{C}$ 三个事件都发生”, 即 $H_1 = A\bar{B}\bar{C}$ 。

(2) 因事件“ A 和 B 都发生但 C 不发生”等价于“ $A, B, \bar{C}$ 三个事件都发生”, 故 $H_2 = AB\bar{C}$ 。

(3) 因为事件“ A, B, C 恰有一个发生”等价于或者“ A 发生而 B 与 C 不发生”或者“ B 发生而 A 与 C 不发生”或者“ C 发生而 A 与 B 不发生”, 所以

$$H_3 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$$

(4)利用(3)的思考方法结合(2)可得

$$H_4 = ABC\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$$

(5)由事件积的定义,有

$$H_5 = ABC$$

(6)方法一 根据事件和的定义,有

$$H_6 = A \cup B \cup C$$

方法二 “A、B、C 中至少有一个发生”,就是说或者“A、B、C 中恰有一个发生”或者“A、B、C 中恰有两个发生”或者“A、B、C 都发生”,故利用(4)、(5)、(6)及事件并的定义可得:

$$H_6 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup ABC \\ \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$$

(7)方法一 因事件“A、B、C 都不发生”等价于事件“ $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ 都发生”,所以

$$H_7 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

方法二 因为 H_7 的对立事件是 H_6 ,所以

$$H_7 = \overline{A \cup B \cup C}$$

(8)方法一 因为“A、B、C 至少有两个事件发生”,就是说或者“恰有两个事件发生”或者“A、B、C 都发生”,所以利用(4)、(5)得

$$H_8 = ABC\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$$

方法二 由于事件“A、B、C 至少有两个发生”等价于或者“A、B 发生”或者“A、C 发生”或者“B、C 发生”,故

$$H_8 = AB \cup AC \cup BC$$

(9)方法一 由于事件“A、B、C 中不多于一个发生”,就是说或者“A、B、C 都不发生”或者“A、B、C 中恰有一个发生”,故

$$H_9 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$$

方法二 由于 H_9 的逆事件是 H_8 , 故

$$H_9 = \overline{ABC} \cup \overline{A\bar{B}C} \cup \overline{A\bar{B}\bar{C}} \cup \overline{ABC}$$

或者

$$H_9 = \overline{AB \cup AC \cup BC} \Rightarrow \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}$$

(10) 方法一 按照(9)中方法一的分析方法可得

$$H_{10} = \overline{A\bar{B}\bar{C}} \cup \overline{A\bar{B}C} \cup \overline{A\bar{B}\bar{C}} \cup \overline{A\bar{B}\bar{C}} \\ \cup \overline{ABC} \cup \overline{A\bar{B}C} \cup \overline{A\bar{B}\bar{C}}$$

方法二 H_{10} 的逆事件为 H_5 , 故

$$H_{10} = \overline{ABC}$$

方法三 因事件“ A, B, C 不多于两个发生”等价于“ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 至少一个发生”, 故

$$H_{10} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

例5 设 A, B, C 为随机事件, 试证明下列各式:

- (1) $(A - AB) \cup B = A \cup B$;
- (2) $(A \cup B) - B = A - AB = A\bar{B}$;
- (3) $(A \cup B) - AB = A\bar{B} \cup \bar{A}B$;
- (4) $A \cup (B - AB) \cup (C - AC) = A \cup B \cup C$.

证明 (1) 方法一 设 $\omega \in A \cup B$, 则

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{或 } \omega \in A\bar{B} \Rightarrow \omega \in A \text{ 同时 } \omega \in \bar{B} \Rightarrow \omega \in (A - B) \\ \quad \quad \quad \Rightarrow \omega \in (A - AB) \\ \text{或 } \omega \in \bar{A}B \Rightarrow \omega \in B \text{ 同时 } \omega \in \bar{A} \Rightarrow \omega \in B \\ \text{或 } \omega \in AB \Rightarrow \omega \in B \end{array} \right.$$

于是 $\omega \in (A - AB) \cup B$, 故

$$(A - AB) \cup B \supset A \cup B$$

另一方面, 显然有 $(A - AB) \subset A \subset A \cup B$. 于是

$$(A - AB) \cup B \subset A \cup B$$

故 $(A - AB) \cup B = A \cup B$

方法二 设 $A \cup B$ 发生, 则 A, B 至少有一个发生, 那么有下面三种情况:

① A 发生而 B 不发生 $\Rightarrow A$ 发生而 AB 不发生 $\Rightarrow A - AB$ 发生 $\Rightarrow (A - AB) \cup B$ 发生;

② A 不发生而 B 发生 $\Rightarrow (A - AB) \cup B$ 发生;

③ A, B 都发生 $\Rightarrow (A - AB) \cup B$ 发生。

因此不论哪种情况, 总有 $(A - AB) \cup B$ 发生, 即有

$$(A - AB) \cup B \supset A \cup B$$

另一方面, 由方法一知, $(A - AB) \cup B \subset A \cup B$, 由于“ $\subset$ ”及“ $\supset$ ”同时成立, 故(1)得证。

方法三 注意到 $A - B = A\bar{B}$, 于是

$$\begin{aligned}(A - AB) \cup B &= (A\bar{A}\bar{B}) \cup B = [A(\bar{A} \cup \bar{B})] \cup B \\ &= (A\bar{A} \cup A\bar{B}) \cup B = (A\bar{B}) \cup B = A \cup B\end{aligned}$$

方法四 由于 $A - AB$ 表示 A 发生而 A, B 不同时发生, 即 A 发生 B 不发生, 故 $(A - AB) \cup B$ 表示 A 与 B 至少有一个发生, 这等价于事件 $A \cup B$ 发生。故 $(A - AB) \cup B = A \cup B$ 。

(2) 由于

$$(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B}$$

而 $A - AB = A\bar{A}\bar{B} = A(\bar{A} \cup \bar{B}) = A\bar{A} \cup A\bar{B} = A\bar{B}$

故 $(A \cup B) - B = A - AB = A\bar{B}$

(3) 由于

$$\begin{aligned}(A \cup B) - AB &= (A \cup B)(\overline{AB}) = (A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= [(A \cup B)\bar{A}] \cup [(A \cup B)\bar{B}] = \bar{A}B \cup A\bar{B}\end{aligned}$$

故 $(A \cup B) - AB = \bar{A}B \cup A\bar{B}$

(4) 由于

$$A \cup (B - AB) \cup (C - AC) = A \cup (B\bar{A}\bar{B}) \cup (C\bar{A}\bar{C})$$