

希 第 二

SHU DE GAINIAN QIANSHUO

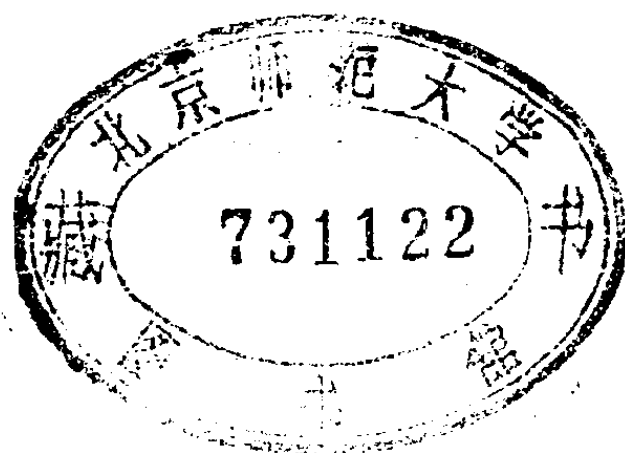
数的概念浅说

上海教育出版社

数的概念浅说

余元希

501189/29



上海教育出版社

数的概念浅说

余元希

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行 上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 4.25 字数 92,000

1980年9月第1版 1980年9月第1次印刷

印数 1—38,000 本

统一书号: 7150·2364 定价: 0.31 元

致 读 者

数是数学里主要研究的对象之一。虽然在中小学数学教学中,对于数的知识,重点只是让学生理解数的意义、学会数的比较和运算,但作为教师来说,至少也得初步了解一些数的理论,这样才能更深入地理解教材内容的精神实质,对教材进行分析研究,正确地进行教学。

这本《数的概念浅说》主要是写给小学数学老师和中师学生阅读参考的,重点放在自然数、分数、有理数这三个部分的理论的阐述。为了使内容比较完整,后面也简单地介绍了关于实数和复数的一些理论知识,对中学数学里所讲的内容作了一些补充和提高,这一些也可供中学数学老师们参考。

详尽地、严谨地研究关于数的理论,需要用到许多高等数学方面的知识。作为一本通俗读物,本书在编写中力图能做到通俗易懂,除掉其中有两节(“自然数的序数理论”和“复数及其运算的几何解释”)以外,一般用到的数学基础知识都只限于初中数学的内容;有些需要用到的初中数学以外的知识(如集合、数列等等),也都在这基础上,或者结合内容的阐述加以引入,或者作为脚注进行解释。所以只需具备初中数学的知识,就基本上能把这本小册子中的大部分内容看懂。

编写这样的小册子,还是一种尝试,它是不是能适合读者的需要,很少把握。特别是限于水平,有些内容的阐述,可能还存在不少缺点,甚至是错误,有待于读者的批评和指正。

余 元 希

1979年11月于上海

目 录

一、引言	1
二、数的概念的产生	3
三、自然数的定义、自然数集	6
四、自然数的大小比较	12
五、自然数的四则运算	14
六、自然数列	23
七、自然数的另一种理论	26
八、数“0”	31
九、分数的引入	33
十、分数的理论	35
十一、分数与小数	52
十二、负数的引入、有理数集	57
十三、有理数的大小比较	62
十四、有理数的四则运算	66
十五、有理数集的性质	78
十六、无理数的引入、实数集	86
十七、实数和数轴	92
十八、实数的大小比较和运算	101
十九、实数集的性质	112
二十、数的概念的再一次扩展	116
二十一、复数集	118
二十二、复数及其运算的几何意义	125

一、引 言

“数”是我们很熟悉的一个概念。一个刚懂事的小孩子，在成人的教育下，会伸出手指来表示他的年龄，还会运用一、二、三……这些最简单的数，数出大人给他们的糖果的个数。孩子们进入小学以后，老师从最简单的整数开始，教他们数数、识数，学会数的比较和计算。随着知识的增长，孩子们对于数的概念，也在不断地扩展着，他们认识了更大的整数、零、分数……。但是，最早的人类，是不是也是这样容易就形成了数的概念呢？“数”这一概念究竟是怎样产生并逐步扩展的呢？

概念是什么？逻辑学告诉我们，概念就是人们在社会实践中形成的思维形式，是人们对客观事物的本质、事物的全体、事物的内部联系的认识。每一个概念都包含着两个方面：一个是它所反映的事物的本质，这叫做概念的**内涵**；一个是它所反映的事物的范围，也即所反映的事物的全体，这叫做概念的**外延**。譬如“武器”是一个概念。这个概念反映了我们所思考的对象的本质是“用来杀伤对方，保护自己的工具”，这是武器这一概念的内涵；同时也反映了“弓、箭、长矛、枪、大炮、原子弹等等”都是我们所思考的对象，它们是武器这一概念的外延。要掌握一个概念，并能正确地运用，就要求对这一概念的内涵是什么，外延有哪些，它和其他有关概念之间的关系怎样，都很明确。举一个小学数学里的例子来说，“百分数”是一个概念，要掌握和运用这一概念，首先就要明确：“分母是 100

的分数叫做百分数”。这句话告诉我们：1°百分数也是一种分数，不过它的分母必须是100，这是它的本质(内涵)；2°一切分母是100的分数，都属于百分数的范围(外延)；3°它和一般分数的区别，就在于百分数的分母

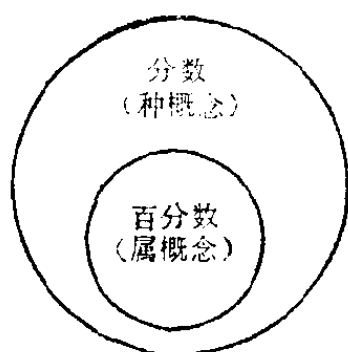


图 1

必须是100，它的内涵要比一般分数多，它的外延要比分数这一概念的外延小。逻辑学中把这种关系叫做概念间的从属关系。在具有从属关系的两个概念中，外延较大的概念叫做种概念；外延较小的概念，叫做属概念。一个属概念所具有的，区别于其他属概念的性质，叫做属差。例如上面这个例子中，分数是种概念，百分数是属概念，属差是“分母是100”。象这样利用已有的概念(分数)，通过指出属差(分母是100)来明确新的概念(百分数)的方法，叫做给概念下定义①；“分母是100的分数叫做百分数”这句话就是百分数这一概念的定义。现在我们要问：用来定义百分数这一概念的种概念“分数”，又是怎样给它下定义的呢？再向前推一步，比分数出现得更早的概念“自然数”，是不是也可以采用这种方法来定义呢？

明确理解数学的概念是学好数学的前提，在这基础上还得进一步研究数学的内在规律及这些规律的来源和应用。譬如学习自然数，我们不仅要知道什么是自然数，还得知道自然数之间怎样进行比较，怎样进行运算，以及运算的规律和性质等。在数的概念每一次扩展时，这一些知识都得重新讨论一遍。这又是为什么？

明确理解数学的概念是学好数学的前提，在这基础上还得进一步研究数学的内在规律及这些规律的来源和应用。譬如学习自然数，我们不仅要知道什么是自然数，还得知道自然数之间怎样进行比较，怎样进行运算，以及运算的规律和性质等。在数的概念每一次扩展时，这一些知识都得重新讨论一遍。这又是为什么？

① 被定义的概念 = 属差 + 邻近的种概念，这是下定义的一般方法。给概念下定义，还有其他的方法，如从外延方面来定义等。

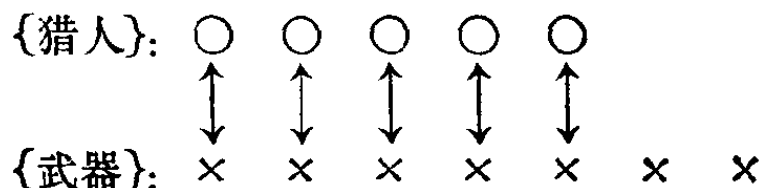
上面所提出的这些问题，都是“数的概念”这一专题所要探讨的内容。要在理论上详尽地解答这些问题，需要用到高等数学的知识。在这本小册子里，我们将尽可能应用初等数学的一些基础知识，通俗地谈谈这方面的问题。

二、数的概念的产生

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。要研究数学，运用数学这一工具来解决各种实际问题，首先就需要建立起数和形的概念。

“数”（这里我们指的还只是正整数，也就是自然数），这个我们现在已经很熟悉的概念，它的形成却经过了一个很长的历史阶段。

最初人类并没有数的概念。随着生产的发展，人们逐渐感到有需要来判断这一类事物的全体和那一类事物的全体的多少。譬如，在集居生活以后，当人们需要把一堆武器分配给一群猎人去打野兽时，就需要解决这堆武器够不够分的问题。这个问题对我们来说，是很容易解决的：只要把武器和猎人分别数一数，把数得的两个数比较一下大小，就可以作出正确的判断。但是，当时的人们还没有数的概念，他们不会这样做。他们只能使用一种最原始的方法：把武器堆里的武器同猎人群里的猎人一一搭配起来（例如把武器一件件地分给猎人），然后作出应有的判断。



1° 如果每一个猎人都拿到了武器，而武器堆里还有剩余，那末猎人比武器少。

2° 如果武器已经分光，而还有一些猎人没有拿到武器，那末猎人比武器多。

3° 如果每一个猎人都拿到了武器，而武器又恰巧分光，那末猎人和武器一样多。

倘使我们应用“集合”这个词来代替“一群”、“一堆”、“全体”，把集合里的那些事物(猎人、武器)，一般地叫做“元素”，并把搭配改说成“对应”，那末上面这种比较方法，实质上也就是把猎人集合里的元素和武器集合里的元素逐一对应起来，看哪一个集合里的元素先“空”了(或者都“空”了)。

人们经历了无数次类似上面这样的比较，在经验的积累中逐步形成了“多”和“少”的概念，并意识到这是事物集合的一个重要的特征。这样，数的概念也就开始萌发了。当时人们还不能把“数”从具体事物中抽象出来，但他们已能够把这种特征形象地表示出来。譬如，人体上两只眼睛的集合，两只耳朵的集合，两只手的集合，两只脚的集合，都具有一个共同的特征，就是它们都能够同两根木棒的集合||一一对应起来，可以把这两根木棒作为它们所具有的共同特征的标志。又如五个猎人的集合，五块尖石的集合，等等，这些集合里的元素都可以同一只手掌上的那些手指一一对应起来，这个特征可以用“手”来表示。我们从某些民族给予数的名称里，如用“手”来表达数“五”，用“整个人”(意思是和人体上所有的手指、足趾一样多)来表达数“二十”，以及我国古代应用的数码符号里，如用“|、||、|||、||||、|||||”或者“一、二、三、三、三”来表示数“一、二、三、四、五”，都可以看到这种痕迹。

在更高的历史发展阶段，“数”逐渐被人们从具体事物中

抽象出来。人们不仅认识了更大的数，会用数来比较事物的多少，而且还创造了记数的符号和方法。根据史学家的考据，我们的祖先，很早就已有了用算筹记数的十进位置制记数法，以及用算筹进行计算的筹算法。筹算应用的数码是用一种竹片做的筹摆出来的，它有两种摆法：一种叫做纵式，一种叫做横式。从一到九这九个数码的摆法如下：

纵	式						┐	┑	┒	┓
横	式	—	＝	≡	≡	≡	⊥	⊥	⊥	⊥
表示的数		一	二	三	四	五	六	七	八	九

如果要记更大一些的数，就采取逢十进位的办法，按照“一纵十横”的原则，把算筹纵横相间地摆出来。例如十二摆成一||，三百五十六摆成 ||| ≡┐。可以看到，这种记数法已孕伏了自然数是1的积累的思想($2=1+1$, $3=2+1$, $4=3+1$, …)。应用算筹可以进行一些简单的计算。筹算的方法和现在的珠算相仿，它是珠算的前身。关于筹算，在公元四世纪成书的《孙子算经》中，就已有介绍。

大概是由于每个人都有着十只手指的原因，在世界数学史上，许多国家也很早有了十进制的记数法，不过应用“逢十进一”的位置制记数法却是相当晚的。在欧洲，一直到公元十六世纪以前，许多国家还通常用罗马数字

I(一)，V(五)，X(十)，C(百)，M(千)

来记数。应用罗马记数法，没有用算筹记数那样方便。例如要记“三千四百四十六”，就要用一大堆符号：

MMMCCCCXXXVI。

大约到了公元六世纪，印度人也开始使用了十进位置制记数法。公元七世纪以后，印度的这种记数法传入阿拉伯，逐渐演变成现在通用的阿拉伯数字记数法。公元十世纪，这种记数法

由阿拉伯传到欧洲,可是在欧洲黑暗的封建势力统治下,却并没有受到重视。一直到欧洲文艺复兴时期,这种记数法才在欧洲被普遍采用。这已是距今四百年前的事了。

有了数字符号 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 和逢十进一的位置制记数法后,就可以写出不管怎样大的自然数。因而使人们意识到自然数可以一个一个地依次排下去,永无止境;意识到不但可以对任何给定的自然数进行比较和计算,而且还可以讨论一般的自然数所共同具有的性质。正是这样,抽象的自然数的概念才最后形成。

三、自然数的定义、自然数集

从理论上来研究自然数,需要解决以下一些问题:

1° 怎样给自然数这一概念下一个精确的定义?——用已经建立的概念,把它的最基本的属性揭示出来。

2° 怎样确立两个自然数之间的大小关系?——给两个自然数之间的大小关系下定义,并揭示这种关系的内在规律。

3° 怎样对自然数进行运算?——给两个自然数的加法、减法、乘法、除法下定义;讨论这些运算的结果是不是存在,是不是唯一;这些运算在自然数的范围里,是不是都能够无限制地进行;这些运算具有什么规律。

这一些,也正是小学数学里教自然数时曾经做过的事。不过当时并不曾把它明显地提出来,自然数的概念和许多规律性的知识,仅仅是通过直观的方法或者具体的例子来说明,而不象理论算术中那样严格。例如,在小学里,我们就是在教会学生数数和用数字符号表示数的基础上,告诉他们1、2、3……

这种用来表示物体个数的数叫做自然数的。这实际上仅仅是对自然数的意义作了描述而已。

下面我们就以自然数可以用来表示物体的个数这一特征为基础，简单介绍一下在理论算术里是怎样处理上面这些问题的。首先，我们来说明怎样给自然数下定义。

前面我们已经提到，给一个概念下定义，要以已有的概念为基础。这样一步步倒推上去，必然会有一个止境，即用来定义新概念的已知概念，是一个无法继续用定义的方法来加以明确的概念。数学里把这种最原始的概念，叫做不定义概念，或者基本概念。它们可以不加定义地直接拿来应用，作为推理的基础。例如，上面提到过的“集合”、“对应”就是数学中两个主要的基本概念。这种概念，我们只能用描述的方法来加以解释，使它与其他的概念相区别。例如，我们可以举出一些集合的具体例子，如

1° 1、2、3、4、5，

2° 和一个定点的距离保持定长的所有的点，

3° 一只右手上的手指——大拇指、食指、中指、无名指、小指，

4° 一个班级里的学生

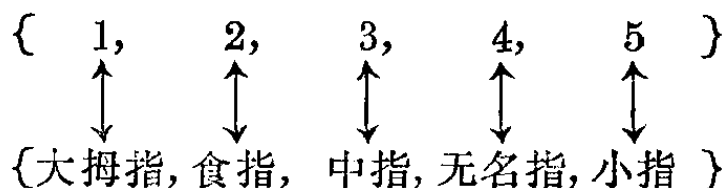
等，通过指出它们分别是一些数，一些点，一些手指和一些学生的整体，来说明“象这样，把具有某种属性的一些对象看做一个整体，便形成一个集合；集合中的每个对象，叫做集合的元素”。显然，这仅仅是对“集合”的概念作了解释而已。

给自然数下定义，我们就拿集合和对应这两个基本概念作为基础。

在上面所举的这些集合中，1°和2°这两个集合的元素都只有5个。4°中一个班级里的学生人数也有一个确定的数目。

象这样只含有有限个元素的集合，叫做**有限集合**。否则就叫做**无限集合**。例如，圆是由和一个定点的距离保持定长的所有点所组成的集合，由于在这个集合里有着无数多个点，所以它是一个无限集合。所有的自然数所组成的集合 $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ①也是一个无限集合，因为我们已经知道，自然数是可以一个个延续下去的，是永无止境的。

考察上面 1° 、 3° 这两个集合，可以发现它们之间具有一种重要的关系，那就是我们可以用一种方法，使 1° 中的每一个元素分别和 3° 中的一个元素对应起来，反之亦然，如②



这种对应关系，叫做**一一对应**。元素间能够建立起一一对应关系的两个集合，叫做**对等集合**。集合 A 和集合 B 对等③，记做

$$A \sim B。$$

集合的对等，具有以下一些重要性质：

1° 一个集合 A 中的元素，总是可以和它自身中的元素，建立起一一对应的关系，所以它总是与自身对等的，就是

$$A \sim A。$$

① 表示一个集合，常用的有两种方法。一是把集合中的元素列举出来，写在 $\{ \}$ 里面，这叫做列举法；另一是在 $\{ \}$ 内，先用一个小写字母表示集合中的元素，然后在后面加上一条短直线，再把这个元素所具有的属性写出来，例如全体自然数所组成的集合也可表示成 $\{x|x \text{ 是自然数}\}$ ，这叫做描述法。

② 符号 $\longrightarrow$ 表示对应， $\longleftrightarrow$ 表示一一对应。

③ 一般，常用一个大写字母来表示集合，用小写字母来表示集合中的元素。 a 是集合 A 中的元素，记做 $a \in A$ ，读做 a 属于 A ； a 不是集合 A 中的元素，记做 $a \notin A$ ，读做 a 不属于 A 。

这个性质,叫做自反性。

2° 如果集合 A 中的元素可以和集合 B 中的元素建立一一对应的关系,那末反过来,集合 B 中的元素也就可以和集合 A 中的元素建立起一一对应的关系,就是

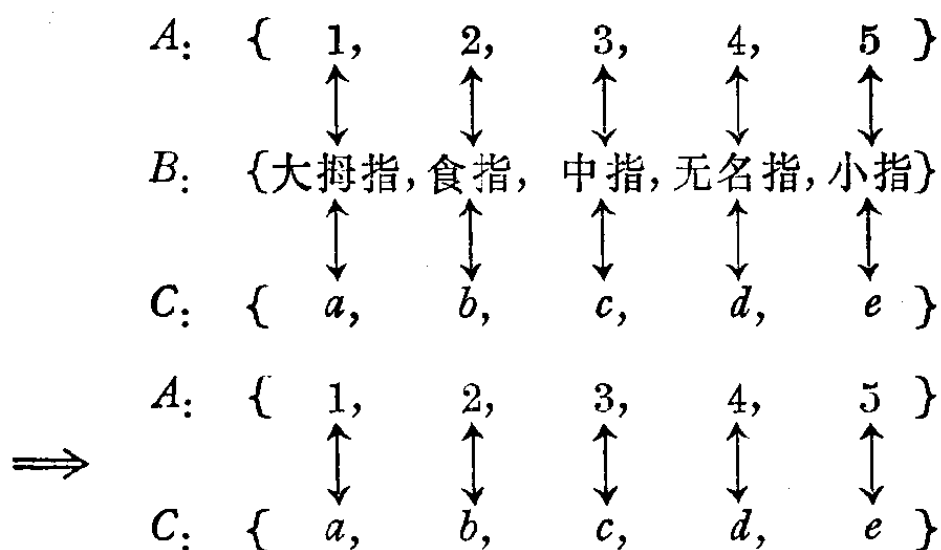
$$A \sim B \implies B \sim A \textcircled{1}。$$

这个性质,叫做对称性。

3° 如果集合 A 中的元素可以和集合 B 中的元素建立一一对应的关系,而集合 B 中的元素又可以和集合 C 中的元素建立一一对应的关系,那末通过 B 作媒介,必然可使集合 A 中的元素和集合 C 中的元素建立起一一对应的关系,就是

$$A \sim B, B \sim C \implies A \sim C。$$

例如:



这个性质,叫做传递性。

应用对等的传递性,我们可以把所考察的集合划分成类,把彼此对等的集合放在一类里。对于我们所考察的那些对等的有限集合来说,可以看出它们具有一种重要的特征,那就是它们所含的元素的个数是相同的。一般地,我们把对等集合

① 符号 $\implies$ 表示“可以推出”,这个式子就表示“如果 $A \sim B$, 那末 $B \sim A$ ”。

所具有的共同特征,叫做这类对等集合的基数^①。

有了以上的这些基础,现在我们就可给自然数作出如下的定义。

定义 1 有限集合的基数,叫做自然数。

由全体自然数组成的集合叫做自然数集。

很明显,这个定义也就是我们通常所理解的“自然数是表示物体个数的一种数”的另一种提法。既然如此,为什么要引进基数这一个新的概念呢?

要回答这一问题,我们就得反过来再考察一下,有限集合与无限集合之间究竟有什么本质的区别。为此需要用到关于集合的几个重要概念:

定义 2 设有两个集合 A 和 B 。

1° 如果集合 A 的任一个元素都是集合 B 的元素,那末,集合 A 就叫做集合 B 的子集,记做

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

(读做“ A 包含于 B ”或“ B 包含 A ”)。

2° 如果集合 A 是集合 B 的子集,反过来集合 B 也是集合 A 的子集,就是

$$A \subseteq B, \text{ 且 } B \subseteq A,$$

那末,就称集合 A 和集合 B 相等,记做

$$A = B。$$

3° 如果集合 A 是集合 B 的子集,并且在集合 B 里至少有一个元素不属于集合 A ,那末,集合 A 就叫做集合 B 的真子集,记做

① 在十进制记数法中,324 是 $3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 4$ 的简单表示形式,这里 10 也叫做这种记数制的“基数”。同一个词,在数学里往往有不同的涵义,这一点是需要加以注意的。

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

(可以读做“ A 包含于 B , 但 A 不等于 B ”或“ B 包含 A , 但 B 不等于 A ”)。

例如, 对于有限集合

$$A: \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B: \{5, 4, 3, 2, 1\}, \quad C: \{1, 3, 5\}$$

来说, 它们之间有以下的关系:

1° B 和 C 都是 A 的子集, C 和 A 也都是 B 的子集:

$\because B$ 或 C 中的任一元素都是 A 中的元素, C 或 A 中的任一元素也都是 B 中的元素,

$$\therefore A \supseteq B, A \supseteq C; B \supseteq C, B \supseteq A.$$

2° A 和 B 是相等的集合:

$$\because A \supseteq B, B \supseteq A, \quad \therefore A = B.$$

3° C 是 A 的真子集, 也是 B 的真子集:

$$\because C \subseteq A, C \subseteq B, \text{ 但 } A \text{ 和 } B \text{ 中的元素 } 2 \notin C, \\ \therefore C \subset A, C \subset B.$$

从上面的例子可以看出:

1° 凡是相等的集合, 都是对等的。(反过来, 对等的集合却未必是相等的。例如, $\{1, 2, 3, 4, 5\} \sim \{a, b, c, d, e\}$, 但它们是不同的集合。)

2° 一个有限集合不能与它的任何一个真子集对等。

但是, 对于无限集合来说, 上面的第 2° 条性质却是不存在的。例如在自然数集

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

中, 把所有的偶数抽出来组成一个新的集合

$$B = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\},$$

很明显, 它也是一个无限集合, 并且 B 中的任一元素都属于 A , 它是 A 的真子集。另一方面, 因为这两个集合中的元素,

可以应用某种对应法则建立起一一对应的关系:

$$\begin{array}{ccccccc} A = \{1, & 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & \cdots\}, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ B = \{2, & 4, & 6, & 8, & \cdots, & 2n, & \cdots\}, \end{array}$$

所以这两个集合又是对等的。即

$$A \supset B, \text{ 而且 } A \sim B.$$

对于这样的两个集合，我们就很难说它们元素的个数相同。因此，为了刻画对等集合（不管是有限集合还是无限集合）的共同特征，我们就引进了基数这个概念。

通常我们用符号 $\aleph_0$ （读做阿列夫 0），来表示与自然数集对等的集合的基数。例如，集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$, $\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$, $\{1, 3, 5, \cdots, 2n-1, \cdots\}$ 的基数都是 $\aleph_0$ 。

四、自然数的大小比较

应用有限集合和基数的概念给出自然数的定义，还只是解决了“自然数是什么”这一个问题。要明确自然数这一概念，还得进一步指出它的一些主要属性。这样，才能加以应用。我们知道，自然数可以用来计算物体的个数。物体的个数有多有少，因此要应用自然数，就得在自然数定义的基础上，对自然数的大小关系给出严格的定义。

这一工作，本质上和小学数学里讲述自然数大小比较的方法是类似的。这里只是应用前面已引进的一些概念，如有限集合、真子集、对等集合、基数等，以及关于对等集合的性质来作出比较严格的叙述。

从第 3 页里所举的那个“猎人和武器”的例子中可以看