

纯粹数学与应用数学专著 第4号

初边值问题差分方法及绕流

朱幼兰 钟锡昌 陈炳木 张作民 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著 第4号

初边值问题差分方法及绕流

朱幼兰 钟锡昌 著
陈炳木 张作民

科学出版社

1980

内 容 简 介

本书对最近几年发展起来的高速尤其是超音速非线性气体动力学的数值算法,从理论上到实践上都作了清晰的论述。

本书分两部分,第一部分比较系统地叙述了双曲型方程组初边值问题的差分方法,并对这种方法进行了较深入的理论分析;第二部分主要是叙述这种方法在计算超音速绕流问题中的应用。本书可作为高等院校有关专业师生的参考书,也可供有关科研、设计工作者参考。

纯粹数学与应用数学专著 第4号

初边值问题差分方法及绕流

朱幼兰 钟锡昌 著
陈炳木 张作民

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1980年1月第一版 开本: 850×1168 1/32

1980年1月第一次印刷 印张: 19 7/8

插页: 1-11, 130 插页: 精 2

印数: 平 1-12,630 字数: 528,000

统一书号: 13031·1007

本社书号: 1420·13-1

定价: 布面精装: 3.25 元
平 装: 2.40 元

序 言

电子计算机出现以来,拟线性双曲型方程组间断解的数值计算方法,一直是计算数学领域中的重要研究课题之一。这方面的工作大致可分两类:一类是以 von Neumann 等人的人工粘性法为代表,以后又不断得到发展的“穿行”计算方法;另一类是把激波等进行精确处理的“分离奇性”的计算方法。本书介绍了作者在毛泽东提出的“赶上和超过世界先进水平”这一号召的鼓舞下,在“理论联系实际”这一方针的指引下,在解决组合体超音绕流问题中发展起来的一套具有精度较高、通用性较强、理论基础较扎实等特点的分离奇性的差分方法。本书内容分两部分,第一部分是理论部分:双曲型方程组初边值问题的差分方法;第二部分是实践部分:方法在绕流问题超音区流动计算中的应用。此外,书中还介绍了作者在用直线法计算钝头体绕流亚跨音区流动、锥型流动等方面的工作,这是因为这些工作为绕流超音区计算提供了初值。

阅读本书,除需要一般的数学分析知识外,还需要数学物理方程及其数值解法方面的一些基本知识。在阅读理论证明部分时,还需要一些泛函分析和矩阵理论方面的知识。

冯康同志、庄逢甘同志先后对本书内容进行了审查,提出了许多宝贵的意见。王汝权、李荫藩、邬华谟、刘学宗和傅德熏、蔡大用等同志也从不同角度对本书提出了许多中肯的意见。我们在此表示衷心的感谢。

王汝权、张关泉、覃伯良等同志曾先后参加过部分工作,应该说,本书中也包含着他们的辛勤劳动。

由于水平有限,书中谬误之处一定很多,恳切希望读者指正。

作 者 1977年11月

目 录

第一部分 数值方法

第一章 两个自变量一阶拟线性双曲型方程组初边值问题的数值解法	1
引言	1
§ 1. 问题的提法	2
§ 2. 四种模型问题	6
§ 3. 一些差分格式	18
§ 4. 初边值问题差分格式的稳定性与差分方程组的性态	43
§ 5. 差分方程组的解法	97
§ 6. 追赶过程的稳定性和迭代过程的收敛性	109
附录 I 纯初值问题变系数差分格式的稳定性	123
附录 II 不封闭的线性代数方程组的矩阵追赶法及其稳定性	139
第二章 三个自变量一阶拟线性双曲型方程组的某一类初边值问题的数值解法	182
引言	182
§ 1. 问题的提法	182
§ 2. 求解方法	187
第三章 一阶拟线性混合型和椭圆型方程组的某些边值问题的数值计算方案	208
§ 1. 问题的提法	208
§ 2. 数值计算方案	211
§ 3. 数值求解过程	214
§ 4. 插值多项式	218
§ 5. 关于不适定性的一些说明	220

第二部分 无粘超音绕流

引言	225
----	-----

1. 内容简介	225
2. 国外进展概况	226
第四章 无粘定常流动	252
§ 1. 无粘定常流的方程及其特征	252
§ 2. 间断面、奇线及强间断的相交和反射	284
§ 3. 边界条件及界面联结条件的提法	323
§ 4. 冻结和平衡状态下空气的热力学量的计算	333
§ 5. 非平衡状态下空气的模型	350
第五章 钝头体亚跨音区流动的计算	361
§ 1. 引言	361
§ 2. 问题的提法	362
§ 3. 数值解法	366
§ 4. 轴对称头部亚跨音区流动的计算	371
§ 5. 三维亚跨音区流动的计算	380
§ 6. 计算结果	392
附录 用直线法计算超音速区的流动	417
第六章 超音速锥型流的计算	424
§ 1. 引言	424
§ 2. 问题的提法	425
§ 3. 数值解法	428
§ 4. 计算结果	435
第七章 组合体绕流超音区域的计算	453
§ 1. 引言	453
§ 2. 问题的提法	454
§ 3. 数值解法	472
§ 4. 计算结果	499
综合参考文献	598
专题参考文献 A: 亚跨音区流动的数值计算	602
专题参考文献 B: 锥型流动的数值计算	614
专题参考文献 C: 超音区流动的数值计算	618

第一部分 数值方法

第一章 两个自变量一阶拟线性双曲型 方程组初边值问题的数值解法

引 言

在研究双曲型方程组的数值解法时, 通常仅对纯初值问题建立差分格式、进行理论分析. 可是, 实际问题中遇到的大多数问题却是初边值问题. 当要把纯初值问题的研究成果应用于初边值问题时, 在如何计算边界点、并确认算法的合理性等问题上往往会遇到困难. 讨论初边值问题的工作虽已有一些^[1-14], 但是还不够完善, 因此迫切需要进一步开展初边值问题数值解法的研究工作. 本章就两个自变量的情形对此问题进行了较为深入、系统的讨论. 具体的内容是比较仔细地讨论了一种解两个自变量一阶拟线性双曲型方程组初边值问题的差分方法: 给出了构造差分格式的方法, 并制定了一些具体的初边值问题的差分格式; 讨论了几类变系数初边值问题差分格式的稳定性; 给出了差分方程组的解法——多段的、非封闭的线性代数方程组的矩阵追赶法, 并对变系数的差分方程组讨论了这种直接解法的稳定性. 此外, 还给出了两个附录, 它们是这些内容的补充或扩充.

此章所讨论的差分方法有下列特点:

1. 这是一种“分离奇性”的差分法, 即在间断上采用间断条件, 且在建立差分方程的过程中不出现跨间断的差分(对强的弱间断也作类似的处理), 从而计算方法的截断误差较小, 通常用不多的网格点, 就可得到较精确的结果;

2. 采用使所有的间断和强的弱间断均为坐标线的曲线坐标,

从而使“分离奇性”实现起来非常方便;

3. 差分格式是对初边值问题来制定的, 并且理论分析也是对初边值问题来进行的, 因此差分格式的合理性具有较为可靠的基础;

4. 既给出了显式格式, 又给出了隐式格式, 还考虑了这些格式的混合使用, 故可用于各种情况, 并且可以根据问题的特点, 采用计算量较省而又稳定的格式. 由于格式适用于各种情况, 故可很好地精确计算间断的相交和反射 (只要交点附近解的结构清楚), 精确地计算激波自动形成的过程等各种一般不太容易处理的问题;

5. 对由隐式格式立出的差分方程组采用直接解法求解, 直接解法的合理性已得到证明, 即已证明了方程直接求解的计算过程是稳定的.

这里所讨论的方法与其他有点类似的方法^[C26, C72]比较起来, 特点是此方法的通用性强, 即可适用于各种情况, 以及它的合理性具有比较可靠的基础, 即对变系数的情形, 证明了这些初边值问题的差分格式对初值、边值在 L_2 空间是稳定的, 证明了求解差分方程组所采用的直接解法是稳定的.

§ 1. 问题的提法

我们考虑如下的两个自变量的双曲型方程组的初边值问题:

I. 在 L 个域: $t \geq 0$, $x_{l-1}(t) \leq x \leq x_l(t)$ ($l=1, 2, \dots, L$) 上给定一阶拟线性双曲型方程组

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{A}(\tilde{U}, x, t) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = \tilde{F}(\tilde{U}, x, t); \quad (1.1)$$

II. 在 $t=0$ 时给定初始条件

$$\begin{cases} \tilde{U}(x, 0) = \tilde{D}_l(x), & x_{l-1}(0) \leq x \leq x_l(0), \\ & l=1, 2, \dots, L, \\ x_l(0) = c_{0,l}, & x'_l(0) = c_{1,l}, & l=0, 1, \dots, L; \end{cases} \quad (1.2)$$

III. 在界线上给定与微分方程(1.1)协调的边界条件和联结条件

$$\begin{cases} B_0(\bar{U}_{x_0^+}, x_0, x'_0, t) = 0, \\ B_l(\bar{U}_{x_l^-}, \bar{U}_{x_l^+}, x_l, x'_l, t) = 0, \\ \quad \quad \quad l = 1, 2, \dots, L-1, \\ B_L(\bar{U}_{x_L}, x_L, x'_L, t) = 0; \end{cases} \quad (1.3)$$

要求确定界线形状 $x_l(t)$ ($l=0, 1, \dots, L$) 和在 L 个区域

$$t \geq 0, x_0(t) \leq x \leq x_L(t)$$

上的 $\bar{U}(x, t)$.

这里, x, t 为自变量, $\bar{U}, \bar{F}, \bar{D}_l$ 为 N 维向量, $c_{0,l}, c_{1,l}$ 为纯量; $\tilde{A}$ 为 $N \times N$ 阶矩阵, 且存在可逆的实矩阵 $\tilde{G}$ 和实对角阵 $\tilde{\Lambda}$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_1^* \\ \tilde{G}_2^* \\ \vdots \\ \tilde{G}_N^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & 0 \\ & \tilde{\lambda}_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \tilde{\lambda}_N \end{pmatrix},$$

使

$$\tilde{A} = \tilde{G}^{-1} \tilde{\Lambda} \tilde{G}, \quad (1.4)$$

其中 $\tilde{G}_n^*$ 为列向量 $\tilde{G}_n$ 的转置; 而 B_l 为 γ_l 维向量 ($l=0, 1, \dots, L$), 它们是所列变量的非线性函数; $\bar{U}_{x_l^-}, \bar{U}_{x_l^+}$ 分别表示在界线 $x_l(t)$ 的下侧和上侧的 $\bar{U}(x_l(t), t)$ (当 $x_l(t)$ 为间断线时, 两侧之量是不等的); $x'_l = \frac{d}{dt} x_l(t)$.

显然不失一般性, 可设

$$\tilde{\lambda}_1 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_N, \quad (1.5)$$

和

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_{1, x_l^+} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{N-p_l, x_l^+} > x'_l \geq \tilde{\lambda}_{N-p_l+1, x_l^+} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{N, x_l^+}, \\ \quad \quad \quad l = 0, 1, \dots, L-1, \\ \tilde{\lambda}_{1, x_l^-} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{q_l, x_l^-} \geq x'_l > \tilde{\lambda}_{q_l+1, x_l^-} \geq \dots \geq \tilde{\lambda}_{N, x_l^-}, \\ \quad \quad \quad l = 1, 2, \dots, L, \end{cases} \quad (1.6)$$

其中, $\lambda_{n, x_l^\pm}$ 的下标 $x_l^\pm$ 的意义与 $U_{x_l^\pm}$ 的下标 $x_l^\pm$ 的意义相同 (在其他地方下标 $x_l^\pm$ 的含义也是如此).

边界条件和联结条件(1.3)与微分方程(1.1)协调是指下列条件成立:

$$(1)^{1)} \begin{cases} \gamma_0 + p_0 = N + 1, \\ \gamma_l + p_l + q_l = 2N + 1, \quad l = 1, 2, \dots, L-1, \\ \gamma_L + q_L = N + 1; \end{cases} \quad (1.7)$$

(2) 当适当地给定 $t, x_0, x_1, \dots, x_L, F_0^+, F_1^-, F_1^+, F_2^-, \dots, F_{L-1}^+, F_L^-$ 时, 方程组

$$\begin{cases} B_0(\bar{U}_{x_0}, x_0, x'_0, t) = 0, \\ \bar{G}_{(0)}^+ \bar{U}_{x_0} = F_0^+, \\ \bar{G}_{(l)}^- \bar{U}_{x_l} = F_l^-, \\ B_l(\bar{U}_{x_l}, \bar{U}_{x_l}, x_l, x'_l, t) = 0, \\ \bar{G}_{(l)}^+ \bar{U}_{x_l} = F_l^+, \quad l = 1, 2, \dots, L-1, \\ \bar{G}_{(L)}^- \bar{U}_{x_L} = F_L^-, \\ B_L(\bar{U}_{x_L}, x_L, x'_L, t) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

总分别对 $\bar{U}_{x_0}, x'_0; \bar{U}_{x_l}, \bar{U}_{x_l}, x'_l (l=1, 2, \dots, L-1); \bar{U}_{x_L}, x'_L$ 有合理的解。其中

$$\bar{G}_{(0)}^+ = \left(\begin{array}{c} \bar{G}_{N-p_0+1}^* \\ \vdots \\ \bar{G}_N^* \end{array} \right) \bigg|_{x=x_0(t)},$$

$$\bar{G}_{(l)}^- = \left(\begin{array}{c} \bar{G}_1^* \\ \vdots \\ \bar{G}_{q_l}^* \end{array} \right) \bigg|_{x=x_l(t)},$$

F_l^+, F_l^- 分别为 p_l, q_l 维向量。

此外, 我们还假设初始条件(1.2)满足边界条件和联结条件(1.3), 并设 $t = \text{const}$ 为空向线。

关于这个问题的物理背景及其提法的正确性大致可以作如下的说明:

无粘定常超音绕流问题中经常出现这样的问题(见图1.1):

1) 实际上条件(2)蕴含着条件(1), 但为明确起见, 把条件(1)单独列出。

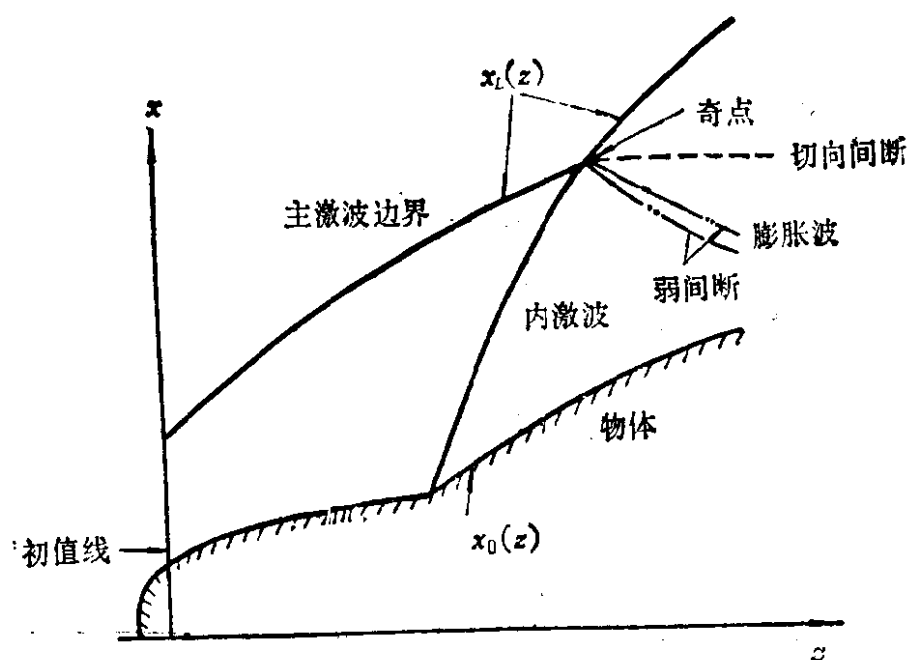


图 1.1 无粘定常超音绕流示意图

$z=0$ (为了和通常的习惯一致, 这里自变量用 x, z) 时流动参量等已经知道, 要确定 $z \geq 0$ 时的主激波形状和物面与主激波之间的流动参量. 由于这个流场有这样一些特点: 在此流场中, 有一些形状未知的间断线——内激波、切向间断, 或弱间断线(如膨胀波的边界线); 在这些间断线或弱间断线之间流动参量是光滑变化的, 可以用微分方程来刻划各点流动参量之间的联系; 边界上给定流动参量与边界形状之间的关系式; 内边界上给出刻划两侧流动参量与边界形状之间的关系的联结条件; 因此需要求解上面那样提法的多边界的初边值问题, 并且边界类型是比较多的, 即 p_l, q_l 数可以是各种不同的值.

在不定常流动中, 例如爆炸波问题中, 也有类似的情形.

至于关于提法的正确性, 主要要说明一下协调性条件 (1.7), (1.8) 的意义. 由于不等式 (1.6) 表示在界线 $x_l (l=1, 2, \dots, L-1)$ 上, 在它的上侧可以向后作与 $\tilde{\lambda}_{N-p_l+1}, \dots, \tilde{\lambda}_N$ 相应的特征线, 在它的下侧可以向后作与 $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{q_l}$ 相应的特征线 (见图 1.2), 因此微分方程和初始条件应该可以把与这些 $\tilde{\lambda}_n$ 相应的 $\tilde{G}_n^* \tilde{U}$ 确定下来, 故能给出 $(p_l + q_l)$ 个条件, 而 $B_l (l=1, 2, \dots, L-1)$ 中有 $\tilde{U}_{x_l^+}, \tilde{U}_{x_l^-}, x_l, x_l'$ 等共 $(2N+2)$ 个未知量, 但 x_l 与 x_l' 之间应满足关系

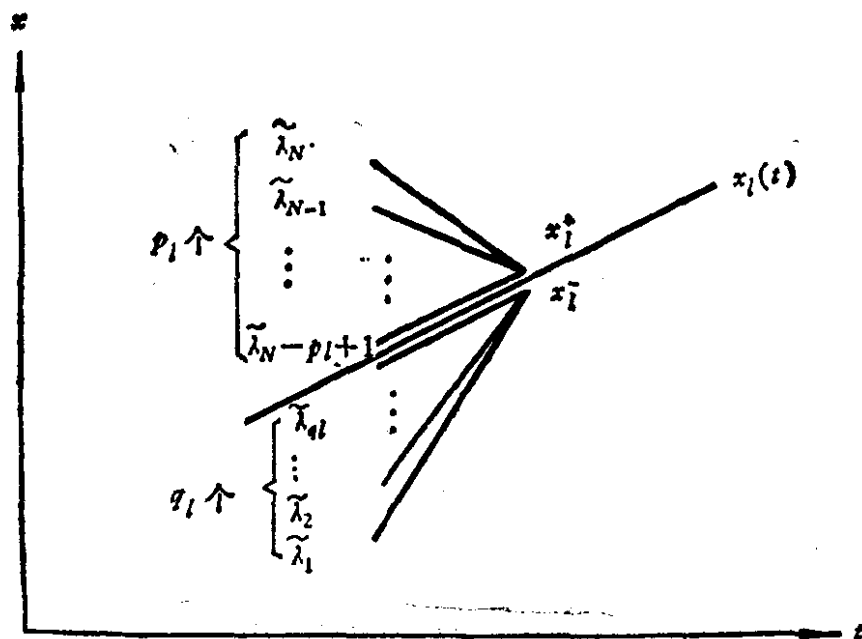


图 1.2 边界线上 λ_n 分布示意图

$$x_l = \int x'_l dt, \quad (1.9)$$

所以为了能确定边界上全部量, x_l 上还应给 $2N+1-p_l-q_l$ 个条件, 即 $\gamma_l(l=1, 2, \dots, L-1)$ 应满足条件(1.7). 条件(1.8)是说明, 不但条件数目应该那么多, 而且应该能与微分方程和初始条件所能提供的条件一起唯一地确定所需要的解. 当 $l=0$ 和 L 时, 情况也类似.

最后, 要指出, 若变量 t 的物理意义是时间的话, $t=\text{const}$ 是空向线这一点当然是能得到保证的. 但若 t 在物理上不代表时间, 那么在自变量的选取时应作适当的考虑, 以便确保 $t=\text{const}$ 是空向线(当然首先要求求解的区域中方程(1.1)是双曲型).

§ 2. 四种模型问题

对数值求解(特别是对边界点的处理)来说, 比较方便的是条带域上的问题. 为此, 引入曲线坐标系 ξ, t

$$\begin{cases} \xi = f_l \left(\frac{x - x_{l-1}(t)}{x_l(t) - x_{l-1}(t)} \right) + l - 1, & \text{当 } x_{l-1}(t) \leq x \leq x_l(t) \text{ 时,} \\ t = t, & l = 1, 2, \dots, L, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $f_l(y)$ 是给定的函数, 设它满足条件 $f_l(0)=0$, $f_l(1)=1$, 且 $f_l(y)$ 为 y 的单调连续函数, 并希望它比较光滑. 最简单可取 $f_l(y)=y$. 在 ξ, t 坐标系下, 所求解的域是 $t \geq 0$, $0 \leq \xi \leq L$. 并且界线是 $\xi=l$ ($l=0, 1, \dots, L$). 因此, 在 ξ, t 坐标系下, 问题 (1.1)–(1.3) 变成条带域上的问题. 再由于对 $\bar{U}(x, t)=U(\xi, t)$ 有关系

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \end{cases}$$

其中, 当 $x_{l-1} \leq x \leq x_l$ 时 ($l=1, 2, \dots, L$),

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial t} = f'_l \left(\frac{x-x_{l-1}}{x_l-x_{l-1}} \right) \frac{(-x'_{l-1})(x_l-x_{l-1}) - (x-x_{l-1})(x'_l-x'_{l-1})}{(x_l-x_{l-1})^2}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'_l \left(\frac{x-x_{l-1}}{x_l-x_{l-1}} \right) \frac{1}{x_l-x_{l-1}} > 0, \\ f'_l = \frac{df_l(y)}{dy}, \end{cases} \quad (2.2)$$

因此方程 (1.1) 可改写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial \xi} = F,$$

$$t \geq 0, \quad l-1 \leq \xi \leq l, \quad l=1, 2, \dots, L,$$

其中

$$A(U, X, X', \xi, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} E + \frac{\partial \xi}{\partial x} \tilde{A},$$

$$F(U, X, \xi, t) = \tilde{F}(\bar{U}, x, t),$$

上式中 E 为 $N \times N$ 阶单位矩阵, X 是行向量 $(x_0, x_1, \dots, x_L)$ 的转置, 从而 § 1 的问题 (1.1)–(1.3) 可改写成:

I. 在 L 个域: $t \geq 0$, $l-1 \leq \xi \leq l$ ($l=1, 2, \dots, L$) 上给定方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U, X, X', \xi, t) \frac{\partial U}{\partial \xi} = F(U, X, \xi, t); \quad (2.3)$$

II. 在 $t=0$ 时给定初始条件

$$\begin{cases} U(\xi, 0) = D_l(\xi), & l-1 \leq \xi \leq l, \quad l=1, 2, \dots, L, \\ X(0) = C_0, \quad X'(0) = C_1; \end{cases} \quad (2.4)$$

III. 在界线上给定边界条件和联结条件

$$\begin{cases} B_0(U_{0+}, x_0, x'_0, t) = 0, \\ B_l(U_{l-}, U_{l+}, x_l, x'_l, t) = 0, \quad l=1, 2, \dots, L-1, \\ B_L(U_{L-}, x_L, x'_L, t) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

要求确定 $X(t)$ 和域: $t \geq 0$, $0 \leq \xi \leq L$ 上的 $U(\xi, t)$. 其中 $X' \equiv \frac{dX}{dt}$; C_0, C_1 分别表示以 $c_{0,l}, c_{1,l}$ 为分量的 $L+1$ 维向量.

$$D_l(\xi) = \tilde{D}_l(x(\xi, t)) \Big|_{t=0}.$$

U_{l+} 和 U_{l-} 分别表示直线 $\xi=l$ 的上侧和下侧的 U (下面将以同样的意义来使用下标 l^+, l^-).

若令

$$A(U, X, X', \xi, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} E + \frac{\partial \xi}{\partial x} \tilde{A},$$

则有

$$A = \bar{G}^{-1} \Lambda \bar{G}, \quad (2.6)$$

其中

$$\bar{G}(U, X, \xi, t) = \tilde{G}(\tilde{U}, x, t).$$

并且由于 $\frac{\partial \xi}{\partial x} > 0$, 故由(1.5)可得

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N. \quad (2.7)$$

这里, λ_n 为矩阵 A 的第 n 个对角线元素.

此外, 由于有

$$\left. \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} \right|_{x=x_l^+} = -x'_l, \quad l=0, 1, \dots, L,$$

故

$$A \Big|_{\xi=l\pm} = \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\tilde{A} + \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{\frac{\partial \xi}{\partial x}} E \right) \right] \Big|_{x=x_l^+} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x_l^+} (\tilde{A}_{x_l^+} - x'_l E),$$

从而由不等式(1.6)推得

$$\begin{cases} \lambda_{1,l} \geq \dots \geq \lambda_{N-p_l,l} > 0 \geq \lambda_{N-p_{l+1},l} \geq \dots \geq \lambda_{N,l}, \\ l=0, 1, \dots, L-1, \\ \lambda_{1,l} \geq \dots \geq \lambda_{q_l,l} \geq 0 > \lambda_{q_{l+1},l} \geq \dots \geq \lambda_{N,l}, \\ l=1, 2, \dots, L. \end{cases} \quad (2.8)$$

此时, 仍象 §1 那样, 要求 B_l 满足与微分方程协调的条件 (1.7), (1.8). (1.8) 按现在的记号应写成:

当适当地给定 $t, x_0, x_1, \dots, x_L, F_0^+, F_1^-, F_1^+, F_2^-, \dots, F_{L-1}^+, F_L^-$ 时, 方程组

$$\begin{cases} B_0(U_{0^+}, x_0, x'_0, t) = 0, \\ \bar{G}_{(0)}^+ U_{0^+} = F_0^+, \\ \bar{G}_{(0)}^- U_{1^-} = F_1^-, \\ B_l(U_{l^-}, U_{l^+}, x_l, x'_l, t) = 0, \\ \bar{G}_{(l)}^+ U_{l^+} = F_l^+, \quad l=1, 2, \dots, L-1, \\ \bar{G}_{(L)}^- U_{L^-} = F_L^-, \\ B_L(U_{L^-}, x_L, x'_L, t) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

总分别对 $U_{0^+}, x'_0; U_{l^-}, U_{l^+}, x'_l (l=1, 2, \dots, L-1); U_{L^-}, x'_L$ 有合理的解. 其中

$$\bar{G}_{(0)}^+ = \begin{pmatrix} G^{*N-p_0+1} \\ \vdots \\ G_N^* \end{pmatrix}_{\xi=1^+}, \quad \bar{G}_{(l)}^- = \begin{pmatrix} G_1^* \\ \vdots \\ G_{q_l}^* \end{pmatrix}_{\xi=l^-},$$

G_n^* 为 $\bar{G}$ 的第 n 行.

从这里的推导可以看出, “可动”边界的问题, 通过坐标变换, 可以变成“固定”边界的问题, 不过偏微分方程系数的形式略有变化, 此时, 不但依赖于自变量及未知的变量 U , 而且还依赖于另外一些未知的变量 X, X' . 但这样的变动, 对数值计算来说没有引起什么困难. 不过由于现在是“固定”边界的问题, 因此为精确处理边界创造了非常有利的条件.

下面我们只讨论初边值问题 (2.3), (2.4), (2.5) (B_l 满足条件 (1.7), (2.9)) 的数值求解方法. 当然, 我们仍假设直线 $t = \text{const}$

是空向的,且初始条件(2.4)满足边界条件(2.5).

解一般类型的初边值问题时,遇到的一个困难是如何立出一组差分方程,使它的数目与边界条件数目之和等于未知数数目,并且需要证明差分方程在理论上满足一些起码的要求:对线性问题能够证明差分格式是稳定的,收敛的等等.

我们以 $L=1$ 的情形为例来说明这些问题. 在域 $t \geq 0$, $0 \leq \xi \leq 1$ 上引入网格 $\xi_m = m \Delta \xi_1$ ($m=0, 1, \dots, M_1$), $t_k = k \Delta t$ ($k=0, 1, \dots$), 其中 $\Delta \xi_1 = \frac{1}{M_1}$. 于是在每一个 t 层上有未知量 $U(\xi_m, t_k)$ ($m=0, 1, \dots, M_1$), x_0, x_1, x'_0, x'_1 , 一共是 $(M_1+1)N+4$ 个. 由于已有边界条件 $\gamma_0 + \gamma_1 = 2N+2-p_0-q_1$, 再加上 $l=0, 1$ 时的关系式 (1.9), 故还需建立 $M_1N - N + p_0 + q_1$ 个方程. 在 $p_0 + q_1 = N$ 时, 可以从方程 (2.3) 出发立出所需的 M_1N 个差分方程. 讨论初边值问题的文章 [4] 便是这种类型的工作. 但在 $p_0 + q_1 \neq N$ 时, 这样做有问题. 因为方程的数目总是 N 的整数倍, 故未知数数目与方程数目总不相等. 作为一个补救办法, 是对每个内点由 (2.3) 立 N 个差分方程来确定这些点上的量, 而把边界点作特殊处理. 例如, 计算边界点时, 先把 (2.3) 写成

$$G_n^* \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_n G_n^* \frac{\partial U}{\partial \xi} = f_n, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad (2.10)$$

然后在 $\xi=0$ 的边界点上把 (2.10) 中 $n=N-p_0+1, \dots, N$ 的方程差分化, 在 $\xi=1$ 的边界点上, 把 (2.10) 中的 $n=1, 2, \dots, q_1$ 的方程差分化. 这样便可得 $(M_1-1)N + p_0 + q_1$ 个方程来确定所需的量. 这是我们和其他一些人曾经采用过的方法. 这样做的可取之处是总能使方程数目与未知数数目相等. 但也存在一些问题, 主要问题除了边界点、内点计算精度可能不一致外, 还有由于在许多情形下, 边界点与内点采用不同格式, 因此就一般情形来说为保证初边值问题的差分格式稳定, 单单要求每一点满足 von Neumann 条件看来是不够的. 这一点在直观上是好理解的. 因为 von Neumann 对稳定性的分析, 实际上是在邻近各点也是用同样的算

法这样一个前提下来进行的。现在格式在那里有“突变”，那么，当然原来的分析将失效。所以为保证初边值差分格式稳定，需要在格式选择时仔细考虑边界点格式与内点格式相互配合的问题。可以设想，对边界点和内点采用相同的差分格式，对保证初边值问题差分格式的稳定性将比较有利。因此考虑一种既能保证方程数与未知数数目永远相等，且又能使边界点与内点格式是统一的构造差分格式的方法是非常必要的。

由于边界点的计算只能是偏心格式。而在内点，若对(2.3)用显式格式，为保证对各个 λ_n 格式是稳定的，那么通常应取中心格式。因此若在内点从(2.3)出发，要做到格式与边界点统一比较困难。所以为使格式在内点与边界点一致实现起来比较容易，内点也从(2.10)出发来立方程。

此外，上面的补救办法之所以总能保证方程数与未知数数目相等，在于对不同的 λ_n ，根据 $\lambda_n(0, t), \lambda_n(1, t)$ 的数值立了不同数目的差分方程。例如， $p_0 + q_1 \geq N$ ，那么由于在 $m=1, \dots, M_1-1$ 时，相当于是对每一个 λ_n 立了一个差分方程（把方程(2.3)差分化，相当于把方程(2.10)， $n=1, 2, \dots, N$ ，用同样格式差分化），故实际上对 $\lambda_n(0, t) > 0, \lambda_n(1, t) \geq 0$ 的 $\lambda_n(n=1, \dots, N-p_0)$ ，在 $m=1, 2, \dots, M_1$ 立了 M_1 个方程；对 $\lambda_n(0, t) \leq 0, \lambda_n(1, t) \geq 0$ 的 $\lambda_n(n=N-p_0+1, \dots, q_1)$ ，在 $m=0, 1, \dots, M_1$ 立了 M_1+1 个方程；对 $\lambda_n(0, t) \leq 0, \lambda_n(1, t) < 0$ 的 $\lambda_n(n=q_1+1, \dots, N)$ ，在 $m=0, 1, \dots, M_1-1$ 立了 M_1 个方程，因此差分方程数总为

$$\begin{aligned} & (N-p_0)M_1 + (q_1-N+p_0)(M_1+1) + M_1(N-q_1) \\ & = M_1N - N + p_0 + q_1. \end{aligned}$$

对 $p_0 + q_1 < N$ 的情形也类似：对 $n=1, \dots, q_1, N-p_0+1, \dots, N$ 的 λ_n ，均立了 M_1 个方程；对 $\lambda_n(0, t) > 0, \lambda_n(1, t) < 0$ 的 $\lambda_n(n=q_1+1, \dots, N-p_0)$ ，在 $m=1, 2, \dots, M_1-1$ 立了 M_1-1 个差分方程；从而也使差分方程总数为

$$(p_0 + q_1)M_1 + (N-p_0-q_1)(M_1-1) = M_1N - N + p_0 + q_1.$$

因此，我们提出这样一种构造差分格式的方法，即取网格