

# 结构矩阵分析及SMIS-PC程序

JIEGOU JUZHEN FENGXI  
JI SMIS-PC CHENGXU

周绥平 刘西拉 编  
周 暮 审

人 民 交 通 出 版 社

|     |           |
|-----|-----------|
| $I$ | 杆件截面惯性矩   |
| $J$ | 杆件截面抗扭惯性矩 |
| $E$ | 杆件弹性模量    |
| $G$ | 杆件剪切模量    |
| ①   | 杆件编号      |
| [n] | 结点编号      |
| ▲   | 支承系杆编号    |

## 结构矩阵分析及 SMIS-PC 程序

周绥平 刘西拉 编

周 暮 审

责任编辑 高延强

人民交通出版社出版

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本:  $787 \times 1092$  1/32 印张: 16.5 字数: 290千

1989年6月 第1版

1989年6月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—1,800 册 定价: 3.25元

## 内 容 提 要

本书将结构矩阵分析与结构程序编制有机地结合起来,详细地讲解了结构矩阵位移法基本原理及平面框架程序的编制;从而克服了长期以来结构矩阵分析课程与计算机应用脱节的现象。本书供土建类专业本科生和研究生开“结构矩阵分析”课程。

本书配有5英寸双面双密度磁盘一个,其中录有SMIS-PC程序,可在IBM微机上使用,配合各章教学、学习。此外,磁盘中还录有Smisy和Holzer介绍的平面框架程序,供读者参考。

# 前 言

本书是根据1986年刘西拉教授在清华大学土木系、周绥平副教授在重庆交通学院结构系开的“结构矩阵分析”课程的讲稿,并参照 V. James Meyers 的“Matrix Analysis of Structures”和 Siegfried M. Holzer 的“Computer Analysis of Structures”编写而成,主要论述结构矩阵位移法基本原理及平面框架程序的编制。

全书共分7章。第1~4章为绪论、结构的平衡与变形协调、单元刚度矩阵(包括变截面杆件及考虑剪切变形的杆件)、位移法(其中包括修正结构刚度矩阵法,即后处理法;缩减结构刚度矩阵法及分块结构刚度矩阵法,即前处理法),第5章涉及一些特殊问题的处理(其中包括杆件制造误差、温度变化影响、忽略杆件轴向变形计算、中间有铰的杆件和带刚性域的杆件,以及斜向支承等),第6章为平面框架程序的编制,第7章为空间结构。

本书配置5英寸双面双密度磁盘一个,其中录有 SMIS-PC 程序,配合第2、3、5、7章教学,在 IBM 微机上使用。此外磁盘中还分别录有 SMISY 和 Holzer 介绍的平面框架程序供读者参考。对于 SMIS-PC 程序,书末附有关于该程序的使用指南。

本书第2~5章及第7章主要是参照前述“Matrix Analysis of Structures”编写的,第6章是参照“Computer Analysis of Structures”编写的。这样在教学过程中,可以配合本课程安排一定学时的“专业英语”教学,学习上述英文教材的部分章节。通过中英文教材并行施教,有利于更快提高学生英文专业书籍阅读能力。

本书第1、6章由刘西拉编写,其余各章由周绥平编写。全书由周暮教授审校。本书编写过程中,得到重庆交通学院领导及电算室大力支持,并承刘晓瑜讲师协助校阅书稿,清华大学土木工程系研究生杨雪梅、刘春明参加了 SMISY 和 Holzer 程序的编制和校核,特此致谢!

本书供土建类专业开设“结构矩阵分析”课程使用,学时数约为40,也可以作为从事土建结构设计、科研人员参考用书。

编者 1987年12月

# 主要符号表

|                                                    |                                      |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $[ \quad ]$                                        | 矩阵                                   |
| $( \quad )$                                        | 行向量、行阵                               |
| $\{ \quad \}$                                      | 列向量、列阵, 有时为节省篇幅, 将列阵横排               |
| $P$                                                | 杆件内力向量 (列阵)                          |
| $\Delta$                                           | 杆件变形向量 (列阵)                          |
| $\bar{P}$                                          | 结构全部杆件内力向量 (列阵)                      |
| $\bar{\Delta}$                                     | 结构全部杆件变形向量 (列阵)                      |
| $r'$                                               | 杆件在局部坐标系的杆端力向量 (列阵)                  |
| $d'$                                               | 杆件在局部坐标系的杆端位移向量 (列阵)                 |
| $r$                                                | 杆件在整体坐标系的杆端力向量 (列阵)                  |
| $d$                                                | 杆件在整体坐标系的杆端位移向量 (列阵)                 |
| $R$                                                | 结构的结点荷载向量 (列阵)                       |
| $D$                                                | 结构的结点位移向量 (列阵)                       |
| $L$                                                | $r' \sim P$ 的关系矩阵                    |
| $\alpha$                                           | $r \sim r'$ 的关系矩阵, 即坐标转换矩阵           |
| $T$                                                | $r \sim P$ 的关系矩阵                     |
| $a$                                                | $R \sim \bar{P}$ 的关系矩阵               |
| $f'$                                               | 杆件在局部坐标系的固端力向量 (列阵)                  |
| $f$                                                | 杆件在整体坐标系的固端力向量 (列阵)                  |
| $F$                                                | 结构的固端力向量 (列阵)                        |
| $k''$                                              | $P \sim \Delta$ 的关系矩阵, 即杆件内力与变形的刚度矩阵 |
| $k'$                                               | 杆件在局部坐标系的单元刚度矩阵                      |
| $k$                                                | 杆件在整体坐标系的单元刚度矩阵                      |
| $C$                                                | $\Delta \sim P$ 的关系矩阵, 即杆件变形与内力的柔度矩阵 |
| $K$                                                | 结构整体刚度矩阵                             |
| $\dot{k}, \dot{L}, \dot{T}, \dot{f}$               | 中间带铰杆件的有关矩阵及向量                       |
| $S$                                                | 刚性域转换矩阵                              |
| $\hat{\alpha}, \hat{k}, \hat{T}, \hat{f}$          | 带刚性域杆件的有关矩阵及向量                       |
| $\bar{\alpha}, \bar{k}, \bar{T}, \bar{r}, \bar{d}$ | 与斜向支承相连的杆件的有关矩阵及向量                   |
| $\bar{K}$                                          | 混合坐标系的结构刚度矩阵                         |
| $\alpha$                                           | 从整体坐标轴 $x$ 逆时针方向转到杆件方向 (从起点至终点) 的夹角  |
| $c$                                                | $c = \cos \alpha$                    |
| $s$                                                | $s = \sin \alpha$                    |
| $A$                                                | 杆件截面积                                |

# 目 录

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| 主要符号表                 | 1   |
| 第一章 绪论                | 1   |
| 第二章 平衡与变形协调           | 4   |
| §2-1 引言               | 4   |
| §2-2 桁架的杆件及支承         | 4   |
| §2-3 静定桁架             | 8   |
| §2-4 梁的杆件及支承          | 23  |
| §2-5 框架的杆件及支承         | 27  |
| §2-6 静定框架             | 30  |
| §2-7 总结               | 43  |
| 第三章 单元刚度矩阵            | 46  |
| §3-1 引言               | 46  |
| §3-2 桁架杆件的单元刚度矩阵      | 46  |
| §3-3 梁杆件的单元刚度矩阵       | 48  |
| §3-4 框架杆件的单元刚度矩阵      | 51  |
| §3-5 支承系杆的单元刚度矩阵      | 56  |
| §3-6 单元刚度矩阵的性质        | 56  |
| §3-7 柔度矩阵             | 58  |
| §3-8 从能量原理计算刚度矩阵与柔度矩阵 | 59  |
| 第四章 矩阵位移法             | 63  |
| §4-1 引言               | 63  |
| §4-2 结构刚度方程的建立及求解     | 63  |
| §4-3 例题               | 75  |
| §4-4 结构刚度方程的改进        | 97  |
| §4-5 对称结构             | 123 |
| 第五章 位移法中的一些特殊问题       | 131 |
| §5-1 引言               | 131 |
| §5-2 有初始变形的杆件         | 131 |
| §5-3 忽略轴向变形的计算        | 156 |
| §5-4 中间有铰的杆件和有刚性域的杆件  | 166 |
| §5-5 斜向支承             | 182 |
| 第六章 平面框架程序的编制         | 191 |
| §6-1 引言               | 191 |
| §6-2 程序的结构            | 191 |

|            |                     |            |
|------------|---------------------|------------|
| §6-3       | 平面框架的程序设计.....      | 196        |
| <b>第七章</b> | <b>空间结构.....</b>    | <b>218</b> |
| §7-1       | 引言.....             | 218        |
| §7-2       | 空间桁架杆件的单元刚度矩阵.....  | 218        |
| §7-3       | 空间框架杆件的单元刚度矩阵.....  | 220        |
| §7-4       | 空间结构例题.....         | 230        |
| 附录         | SMIS-PC 程序使用指南..... | 239        |
| 参考书目       | .....               | 253        |

# 第一章 绪 论

由于电子计算机的出现和持续地高速发展,科学发生了重大的变革,原来以理论科学与试验科学的两极构成已逐步转化为包括计算科学在内的三极构成,认识到这样一种发展趋势就会使我们变得主动。在力学领域里,电子计算机也带来了根本性的变化,结构的矩阵分析正是这种变化的一个重要方面。

过去进行力学计算基本是靠手算,由于计算手段的限制,能够计算的对象是非常有限的。以刚架计算为例,用位移法解题时,结点位移的个数一般不宜超过5个。三十年代出现力矩分配法后,未知数的个数可以增加,但最多也不超过一、二十个。因此,要解决工程实际问题必须采取简化的办法,针对不同的计算对象,人们总是力求找出不同的合理的简化计算简图。手算的关键是要求简单。

现在力学计算发展到电算,即以电子计算机为手段的计算方法。由于计算工具的变革,计算的对象可以是多种多样的,许多大型或复杂的力学问题,尽管未知数成千上万,在电子计算机面前已不成问题。过去不敢做的一些计算难题现已成为常规问题,过去由于计算条件限制不得不采用的简化计算模型,已被更加精确的模型所代替。但是,电子计算机毕竟不是人,它缺乏针对不同工程实际问题采取最有效计算策略的能力。因此,必须发展系统性和通用性强的计算程序,以适应各类问题的计算。

电算与手算不同:手算怕繁,电算怕乱;手算讨厌重复性的大量运算,电算则讨厌头绪多、方法杂的算法;手算追求机灵的计算技巧,电算则希望有系统化的通用程序;手算的“好”方法是运算次数较少的方法,电算的“好”方法是系统性、通用性强的方法。结构的矩阵分析方法就是适用于电算的结构分析方法,对于熟悉经典结构力学的读者必须充分注意这个不同之处。从经典结构力学的角度来看结构矩阵分析方法,会感到很繁,甚至会感到许多步骤是不必要的,但是对编制系统性、通用性强的程序来说,这又是必不可少的。

与结构力学的分析方法相对应,根据所选取的基本未知量的区别,结构矩阵分析方法可分为矩阵位移法和矩阵力法,前者是取结构的结点位移作为基本未知量,后者则取结构的多余未知力作为基本未知量。此外,还有吸取了位移法和力法两者优点的混合法。用矩阵力法求解超静定结构时,先要除去结构的多余约束从而得到静定的基本体系,然后根据变形协调建立基本方程,进而求出多余未知力。而用矩阵位移法进行结构分析时,首先要对结点施加约束,使其完全不能产生位移,从而得到结点位移受约束的基本体系,然后利用结点平衡建立基本方程,进而求出结点位移。

对于一个给定的超静定结构来说,矩阵力法的基本体系选择常常可以有多种方案,因而给计算机通用程序的编制带来不少麻烦。而矩阵位移法的基本体系一般来说是唯一的,这样就可使计算程序系统化,具有通用性。因此,矩阵位移法在结构分析中得到比较广泛的应用。本书仅介绍矩阵位移法。

矩阵位移法的基本思路是:先将结构拆成许多单元杆件,再将杆件综合成整个结构。在此一分一合的过程中,复杂的结构就转化为简单杆件分析与综合问题。具体言之,先将结构

离散成数目有限的单元,进行单元分析,建立单元杆端力与杆端位移之间的转换关系,即单元刚度方程;然后将单元装配成结构,进行整体分析,综合考虑平衡条件和变形协调条件,建立结构的结点力与结点位移之间的转换关系式,即结构的整体刚度方程;最后解线性方程组,求出结点位移未知量。

与结构分析的其它方法一样,结构矩阵分析同样必须满足平衡关系、几何关系和物理关系。这就是说,就力学的基本原理而言,结构矩阵分析与传统的结构力学并无区别。因此,在结构矩阵分析中仍采用结构力学中的基本原理与假定,但为了适应电算的特点,在计算中采用了矩阵运算。矩阵符号早在1850年已问世,到本世纪六十年代随着电子计算机的出现,它得到广泛应用。在结构分析中,用矩阵进行运算使得编制计算机程序时能最有效地组织、形成和求解结构刚度方程(线性方程组),使力学问题表述非常紧凑,数学形式简洁,而且用矩阵表示的各个计算步骤容易实现标准化,适宜于编制计算机通用程序。

与以往的许多结构矩阵分析教材不同,本书采用 SMIS-PC 程序配合教学使用(该程序已录入磁盘,读者可直接取用),这样读者可以从本书一开始就接触计算机,并由浅入深逐步进入程序中最本质的部分,因此本书可以避免在以往教材中原理部分与上机脱节的现象。

SMIS-PC 程序的前身为 SMIS (Symbolic Matrix Interpretive System 即符号矩阵翻译系统),它最初是由美国加州大学伯克利分校土木系编写,配合结构矩阵分析的教学使用,后来由美国德克萨斯大学(奥斯汀)航空系改编,取名为 SMIS2。1983年美国普度大学土木系再次改进,成为 SMIS3。同时该校 Meyers 教授编写出相应的教材“Matrix Analysis of Structures”(结构矩阵分析)配合一起使用。1984年 Meyers 教授又将它进一步发展成 SMIS4。1986年刘西拉教授首先将 SMIS4修改移植到 MV4000 计算机上,在清华大学土木系进行教学,收到良好效果。同年,重庆交通学院周绥平副教授对程序进一步考核删改,并移植到 IBM-PC 微机上,取名 SMIS-PC,以便国内推广。

SMIS-PC 程序主要有矩阵运算及位移法两部分。其主程序由39个调用语句组成,并相应规定了41个字符指令。使用时,用户按运算目的选择所需的指令及必要的矩阵名称、数据,构成一个输入文件,然后输入计算机。程序运转时,机器将根据输入文件中的字符指令,启用相应的调用语句进行计算,并自动将计算结果送入指定的输出文件。这样,读者不需要在学习结构矩阵分析的原理部分时分散精力,过多地缠在用 Fortran 语言编制程序上;同时读者在学习一开始就接触计算机,了解到结构矩阵分析的原理是如何在机器上实现的。本书在安排 SMIS-PC 的使用上也是由浅入深的。开始阶段仅要求用 SMIS-PC 做矩阵求逆等运算,其他如单元刚度矩阵、结构刚度矩阵及结点荷载向量的编制均需读者手算输入,然后逐渐过渡到直接用字符指令解题。与此同时,本书在相应的章节中,说明这些字符指令所调用的子程序的计算内容。因此,按本书的引导,读者计算的对象将由简单结构逐渐变得复杂;而读者编写的 SMIS-PC 输入文件又将逐渐由繁到简,对 SMIS-PC 的理解将逐渐由浅到深。实际上,对 SMIS-PC 理解和编写输入文件的过程,就是掌握结构矩阵分析原理的过程。

本书的安排有较强的系统性,读者应依各章次序进行学习。第1章为绪论。第2章为结构的平衡及变形协调,主要讲述桁架、梁和框架的平衡、变形协调关系,并用 SMIS-PC 解算静定结构。第3章为单元刚度矩阵,主要讲述桁架、梁和框架杆单元的刚度矩阵,以及按能量原理推导杆件的刚度矩阵和柔度矩阵,其中也包括了变截面杆件及考虑杆件剪切变形的问题。第4章为位移法,是本书的重点,包括讲述修正结构刚度矩阵法(即后处理法),缩

减结构刚度矩阵法及分块结构刚度矩阵法（即前处理法），此外，本章还用 SMIS-PC 程序按上述三种方法解算超静定桁架、梁、框架的例题。第 5 章为位移法中的特殊问题，介绍如何考虑杆件制作误差的影响，温度变化的影响；讨论忽略杆件轴向变形的问题；介绍中间有铰的杆件，有刚性域的杆件以及斜向支承的计算方法，同时也安排了用 SMIS-PC 程序解这类特殊问题的算例。第 6 章为平面框架程序的编制。这里要说明的是，SMIS-PC 程序虽然能够解算各种类型的超静定结构，但它是一个供教学使用的程序，它的编制着重在如何使读者通过指令使用该程序算题，由浅入深地掌握结构矩阵分析原理，因此它的输入文件编写十分详细，但用它来解决生产实践中工程结构问题，往往不能满足要求。为了能编写出存储少、效率高、使用方便的程序，本书专门在第 6 章介绍平面框架程序的编制，在该章中，首先介绍编制程序的一般原则，程序的组成结构，讲解复杂的问题如何分解成简单的模块，如何对程序进行有效的检验以保证程序的正确，以及如何提高程序的效率。然后介绍平面框架程序实例，其中包括程序结构及框图，主程序及各子程序的功能、输入输出变量，并且给出主程序及部分子程序。具备 Fortran 语言知识的读者根据本章介绍即可编写一个完整的平面框架程序。在本书配置的磁盘中分别录有 SMISY 和 Holzer 介绍的平面框架，程序供读者参考。第 7 章为空间结构的计算，对掌握了第 1 章至第 5 章的读者来说，该章不会带来很大困难，该章主要讲述空间结构杆件的单元刚度矩阵建立的过程，以及使用 SMIS-PC 程序解算空间结构的例题。本书最后附有 SMIS-PC 程序的使用指南。学习本书时建议读者购买 SMIS-PC 程序的 5 英寸磁盘一张。

应该指出，本书所讨论的问题仅限于考虑静荷载，材料的性质为线性弹性体，结构的变形为小变形。同时本书只讨论桁架、梁及框架结构的内力和位移计算。

## 第二章 平衡与变形协调

### §2-1 引言

结构矩阵分析根据三个基本条件分析结构,这三个基本条件是:平衡条件、变形协调条件和物理条件。平衡条件是指结构处于静力平衡状态时,作用于结构上的力系是平衡力系,同时从结构中取出任一隔离体时,隔离体上的内力及外力也组成平衡力系。变形协调是指结构受力后变形保持连续,而支承结点的变形则应与支承方式一致。物理条件是指作用于结构的力与其相应的变形的关系,对于线弹性结构,这个力与变形的关系服从虎克定律。

杆系结构的矩阵分析,一般是将每个等截面的直杆段划分为一个单元,首先进行单元分析,然后将各杆组合起来进行结构整体分析。为了方便起见,在单元分析时,采用局部坐标系,而在结构整体分析时,则采用整体坐标系,或称结构坐标系。

对于结构中的每个杆单元,我们规定杆的一个端点为起点,用 $i$ 表示,另一端点为终点,用 $j$ 表示。杆件的局部坐标系一般用 $x'-y'$ 表示,并以杆单元的起点 $i$ 为坐标原点。取杆的形心轴为 $x'$ 轴,并规定从杆单元的起点 $i$ 到终点 $j$ 的方向为 $x'$ 轴的正向。从 $x'$ 轴正向逆时针旋转 $90^\circ$ 得到 $y'$ 轴的正向。整体坐标系一般用 $x-y$ 表示。这两种坐标系都取为右手旋转直角坐标系(图2-1)。

本章首先分析各种结构(桁架、梁及框架)的杆件及支承,建立它们的杆端力(位移)与杆内力(变形)的关系,然后用矩阵的方法,由结构的平衡条件及变形协调条件来解静定结构。超静定结构将在第4章讲述。

### §2-2 桁架的杆件及支承

#### 一、桁架杆件内力(变形)与它在局部坐标系的杆端力(位移)的关系

组成桁架的杆件为直杆,两端铰接,且杆端之间无荷载。桁架杆件的内力只有轴力 $p$ (规定轴向拉力为正,轴向压力为负)。相应的变形是轴向伸长或缩短 $\Delta$ (伸长为正,压缩为负)。如图2-1a、b所示, $p$ 、 $\Delta$ 分别唯一确定桁架杆件的受力状态和变形图式。这里应该注意变形图式与位移图式的区别,杆件变形图式( $\Delta$ )确定后,还不能确定杆件的位移图式,因为这时杆件还可以作刚体运动。要确定位移图式,除 $\Delta$ 外,还需要另外三个位移量。下面所讲的向量 $d'$ 、或 $d$ ,即可确定杆件的位移图式。图2-1a中,只将杆件一端的轴力 $p_1$ 以实线示出,另一端 $p_2$ 以虚线示出,就是为了强调说明,能唯一确定桁架杆件受力状态的只有一个量 $p_1(p_1 = p_2)$ 。

在局部坐标系中,桁架杆端力向量 $r'$ 有四个分量,其中 $r'_1$ 、 $r'_2$ 在 $i$ 端, $r'_3$ 、 $r'_4$ 在 $j$ 端。 $r'_1$ 、 $r'_2$ 沿 $x'$ 轴方向, $r'_3$ 、 $r'_4$ 沿 $y'$ 轴方向。对于桁架杆件 $r'_3 = r'_4 = 0$ 。与 $r'$ 相应,桁架杆端位移向量 $d'$ 也有四个分量, $d'_1$ 、 $d'_2$ 在 $i$ 端, $d'_3$ 、 $d'_4$ 在 $j$ 端, $d'_1$ 、 $d'_3$ 沿 $x'$ 轴方向, $d'_2$ 、 $d'_4$ 沿 $y'$ 轴方向。 $r'$ 和 $d'$ 各分量与坐标轴方向一致时为正,反之为负。这样

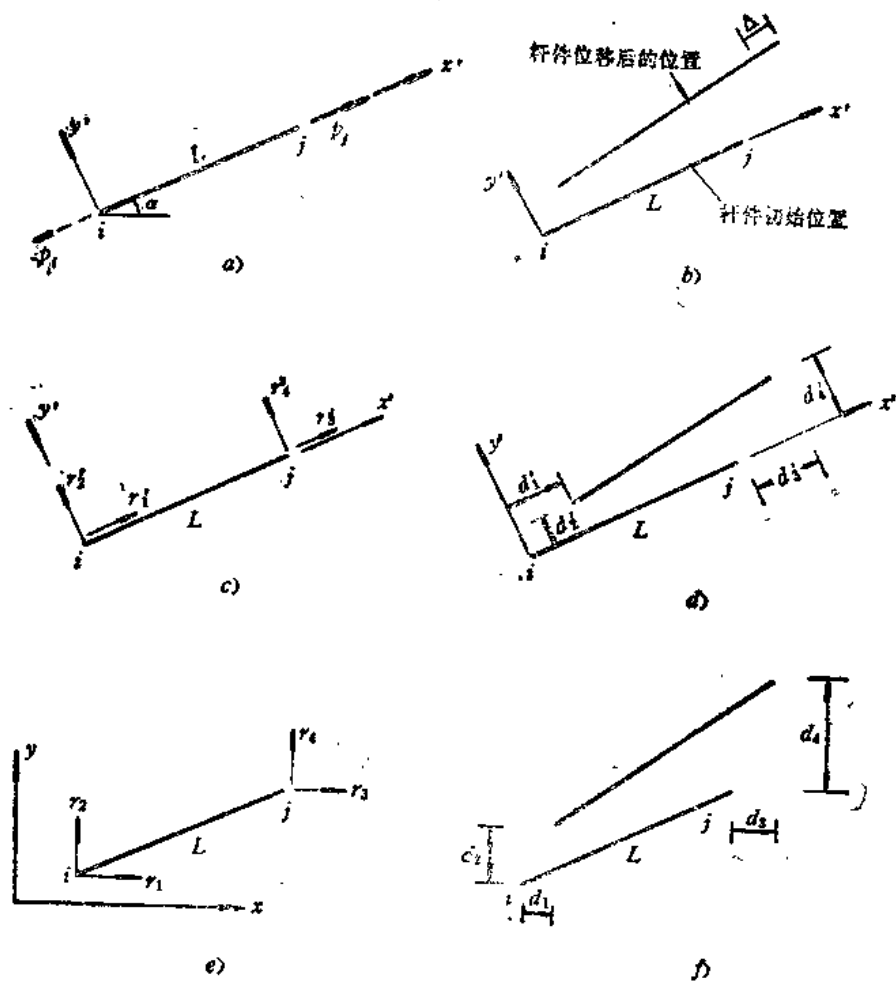


图2-1 桁架杆件

a) 杆件内力；b) 杆件变形；c) 杆件局部坐标系的杆端力；d) 杆件局部坐标系的杆端位移；e) 杆件整体坐标系的杆端力；f) 杆件整体坐标系的杆端位移。

$$\mathbf{r}' = \begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d}' = \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

式中各子向量分别表示局部坐标系中杆端 \$i\$ 和杆端 \$j\$ 的力及位移，它们是

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_i &= \begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{Bmatrix} & \mathbf{d}'_i &= \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{r}'_j &= \begin{Bmatrix} r'_3 \\ r'_4 \end{Bmatrix} & \mathbf{d}'_j &= \begin{Bmatrix} d'_3 \\ d'_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2-2)$$

从图2-1a、c可知，杆内力 \$P\$ 与局部坐标系的杆端力向量 \$\mathbf{r}'\$ 的关系为

$$\begin{aligned} r'_1 &= -P \\ r'_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}'_2 &= \bar{p} \\ \bar{r}'_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

用矩阵的形式, 式(2-3)可写为

$$r' = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} (P) \quad (2-4)$$

取  $L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 则

$$r' = LP \quad (2-5)$$

由小变形假定, 从图2-1b、d可知, 杆变形  $\Delta$  与局部坐标系的杆端位移向量  $d'$  的关系为

$$\Delta = d'_2 - d'_1 \quad (2-6)$$

用矩阵的形式, 式(2-6)可写为

$$\Delta = (-1 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

式中行向量  $(-1 \ 0 \ 1 \ 0)$  恰好是  $L$  矩阵的转置  $L^T$ , 故

$$\Delta = L^T d' \quad (2-8)$$

(对于桁架杆件,  $P$ 、 $\Delta$  均可视为是只有一个元素的向量)。

## 二、桁架杆件局部坐标系的杆端力(位移)与整体坐标系杆端力(位移)的关系

在整体坐标系中, 桁架杆端力向量  $r$  及杆端位移向量  $d$  分别由四个分量组成, 其中两个在杆的  $i$  端, 两个在杆的  $j$  端(图2-1e、f)。它们可以表示为

$$r = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} \quad d = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

式中各子向量分别表示整体坐标系中杆端  $i$  和杆端  $j$  的力和位移, 它们是

$$\begin{aligned} r_i &= \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} & d_i &= \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \\ r_j &= \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} & d_j &= \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2-10)$$

向量  $r$ ,  $d$  中各分量与坐标轴方向一致时取为正值, 反之为负。

从图2-1c、e可知, 局部坐标系的杆端力与整体坐标系的杆端力关系为

$$\begin{aligned} r_1 &= r'_1 \cos \alpha - r'_2 \sin \alpha \\ r_2 &= r'_1 \sin \alpha + r'_2 \cos \alpha \\ r_3 &= r'_3 \cos \alpha - r'_4 \sin \alpha \end{aligned} \quad (2-11)$$

$$r_i = r'_i \sin \alpha + r''_i \cos \alpha$$

此处  $\alpha$  为杆件与整体坐标系  $x$  轴的夹角。以  $x$  轴逆时针方向转至杆件方向 (从  $i$  到  $j$ ) 为正, 顺时针转则为负。用矩阵的形式, 式(2-11)可写为

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ r'_4 \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

上式矩阵中  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ , 以下同。

取式中系数矩阵为  $\alpha$ , 它又称坐标转换矩阵, 为

$$\alpha = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

则

$$r = \alpha r' \quad (2-14)$$

从图2-1d, f 可得到局部坐标系的杆端位移  $d'$  与整体坐标系杆端位移  $d$  的关系为

$$\begin{aligned} d'_1 &= \cos \alpha d_1 + \sin \alpha d_2 \\ d'_2 &= -\sin \alpha d_1 + \cos \alpha d_2 \\ d'_3 &= \cos \alpha d_3 + \sin \alpha d_4 \\ d'_4 &= -\sin \alpha d_3 + \cos \alpha d_4 \end{aligned} \quad (2-15)$$

式(2-15)用矩阵的形式可写为

$$\begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

式中的系数矩阵恰为  $\alpha$  矩阵的转置  $\alpha^T$ , 故

$$d' = \alpha^T d \quad (2-17)$$

可以证明  $\alpha \cdot \alpha^T = I$  ( $I$  为单位矩阵), 即  $\alpha^T = \alpha^{-1}$ , 故  $\alpha$  为正交矩阵。

### 三、桁架杆件的内力 (变形) 与整体坐标系中杆端力 (位移) 的关系

将式(2-5)  $r' = LP$  代入式(2-14)得

$$r = \alpha r' = \alpha LP \quad (2-18)$$

设

$$T = \alpha L = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

$$r = TP \quad (2-20)$$

将式(2-17)代入式(2-8)得

$$\Delta = L^T d' = L^T \alpha^T d \quad (2-21)$$

由  $T = \alpha L$  可知  $T^T = L^T \alpha^T = (-c \ -s \ c \ s)$ , 故

$$\Delta = T^T d \quad (2-22)$$

式(2-20)和(2-22)分别为桁架杆件杆端力与内力及杆端位移与变形的关系

### 四、桁架支承的约束

结构的支承对结构施加约束, 本章只考虑沿结构整体坐标方向施加约束的支承。对结构非整体坐标方向施加约束的支承, 称为斜向支承, 它将在第五章讨论。

桁架的支承有活动铰和固定铰两种 (图2-2)。

活动铰 (图2-2a) 可以设想为一个系杆, 如图2-2b所示。活动铰在整体坐标方向的约束力及约束位移为  $r_c$  及  $d_c$ 。其相应的内力及变形为  $P_c$  及  $\Delta_c$ , 可以设想这就是支承系杆的内力及变形。由于是沿整体坐标方向施加约束, 故

$$\begin{aligned} r_c &= P_c \\ \Delta_c &= d_c \end{aligned} \quad (2-23)$$

固定铰 (图2-2c) 则可以设想是由两个系杆组成 (图2-2d)。它具有两个独立的约束力及约束位移, 分别用  $r_c$  及  $d_c$  表示。相应的内力及变形则为  $P_c$  及  $\Delta_c$ 。对于固定铰, 式 (2-23) 关系同样成立。

对于刚性支承,  $\Delta_c$  及  $d_c$  为零, 但是当支承有初始位移或是弹性支承时, 则可能不为零。

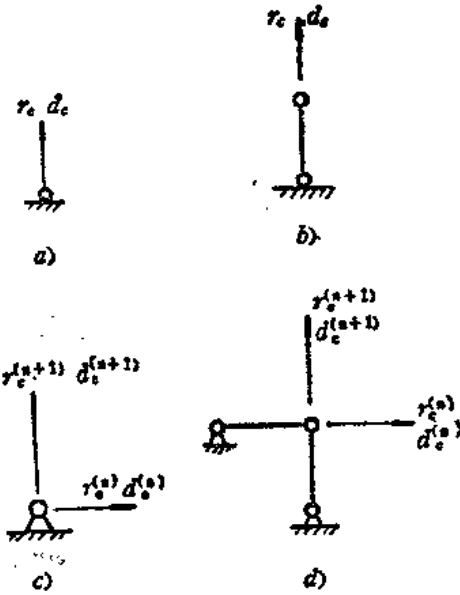


图2-2 桁架的支承  
a) 活动铰; b) 用支承系杆表示活动铰;  
c) 固定铰; d) 用支承系杆表示固定铰。

## §2-3 静定桁架

静定桁架用手算的方法就能很容易地求解。这里, 为了以后学习解超静定结构的方便, 我们研究如何用矩阵的方法来分析和求解静定桁架的内力及位移。

### 一、桁架的结点荷载向量及结点位移向量

图2-3为一平面静定桁架, 受有水平集中荷载5kN 及垂直集中荷载10kN。为便于分析, 对桁架各杆依次编号为①、②、…、⑦, 对结点编号为①、②、…、⑤, 对支承系杆编号为△、△、△。各杆从起点  $i$  到终点  $j$  的方向也以箭头示于图中。

平面桁架的每个结点都有两个相互独立的自由度, 我们取第一个自由度沿  $x$  轴向, 第二个沿  $y$  轴向。各自由度中受支承约束的称约束自由度, 未受支承约束的称非约束自由度。图2-3 的桁架中, 结点1 的两个自由度均属约束自由度, 而结点3 沿  $x$  向的第一个自由度为非

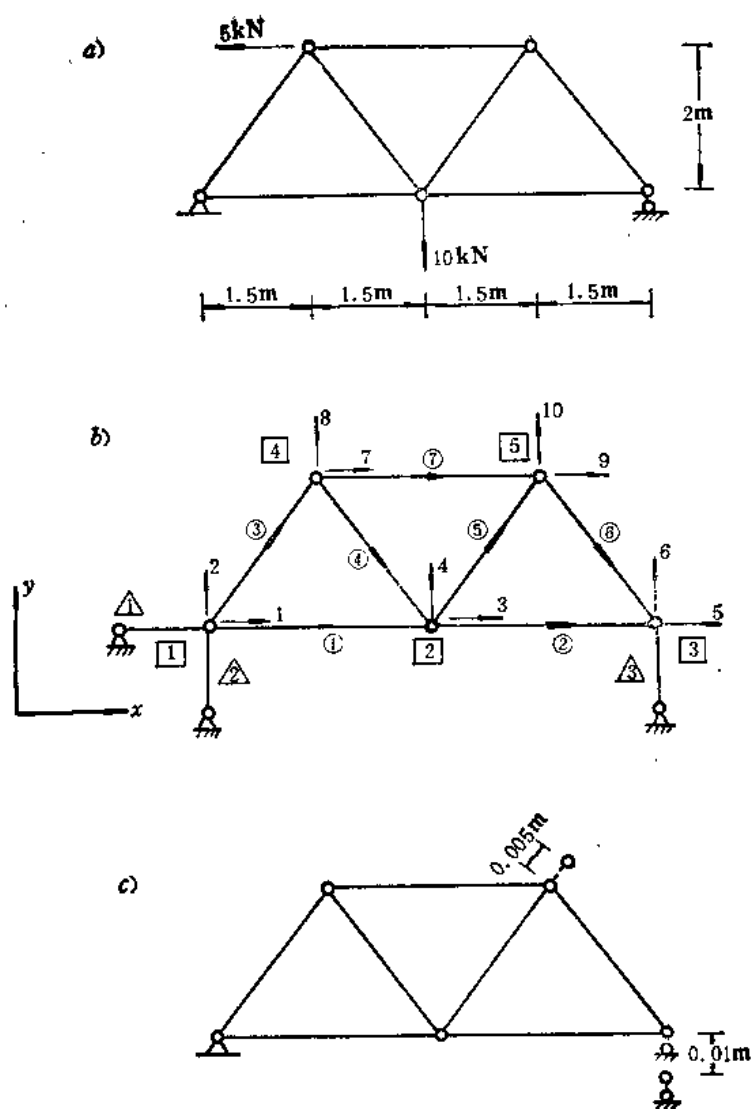


图2-3 平面静定桁架

a) 桁架尺寸及荷载; b) 桁架杆件、支承系杆及结点编号, 杆件方向; c) 桁架的杆件变形及支承下沉

约束自由度, 沿  $y$  向的第二个自由度则为约束自由度。

现在将作用于结点的荷载和结点的位移, 都用结点的这两个自由度方向的分量表示。并且规定与轴向一致为正, 反之为负。这样可将整个桁架各结点的荷载分量及位移分量组成桁架的结点荷载向量  $R$  及结点位移向量  $D$ 。 $R$  及  $D$  的各分量按结点顺序依次编号, 这样, 对于图 2-3 的桁架就有