

陀螺仪 理论及应用

郭秀中 于波 陈云相 编著

685535



航空工业出版社

685535

V241.8/22

陀螺仪理论及应用

郭秀中 于波 陈云相 编著

HK25/22



C0221384

航空工业出版社

内 容 简 介

本书比较系统和完整地阐述了陀螺仪的基本理论及其应用。全书共分十章。第一章至第三章介绍陀螺仪的力学基础、基本特性和动力学分析,第四章至第六章介绍测量加速度、角位移和角速度的各种陀螺仪,第七章至第十章介绍液浮陀螺仪、挠性陀螺仪、静电陀螺仪和激光陀螺仪。

本书主要作为高等院校惯性导航与仪表专业的专业课教材,也可作为精密仪器与测试类专业的选修课教材。此外,还可供从事惯性技术工作的科技人员、部队院校的有关专业以及民航的有关人员参考。

陀 螺 仪 理 论 及 应 用

郭秀中 于 波 陈云相 编著

航空工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

南京航空学院印刷厂印刷

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张 20.5

1987年10月第一版

1987年10月第一次印刷

印数: 1-1300 册

字数: 508.0 千字

统一书号: 15448·25

定价: 3.40 元

ISBN 7-80046-010-X/TH·003

前 言

“陀螺仪”是感测旋转的一种装置。其主要功能是测量运载体(如飞机、导弹、舰船、航天飞行器等)的角位移和角速度,此外还可测量运载体的加速度和角加速度。陀螺仪不仅是飞机、舰船航行驾驶的重要仪表、仪器,而且是各种运载体的自动控制系统、惯性导航系统与惯性制导系统的核心元件。在航空、航天、航海、兵器以至国民经济某些部门中,陀螺仪都有着广泛的应用。

目前,惯性仪表(陀螺仪和加速度计)与惯性系统(惯性导航系统和惯性制导系统),已经作为一门重要的技术而被称为“惯性技术”,而且愈来愈受到世界各国的极大重视。惯性技术业已成为衡量一个国家科学技术水平和军事实力的重要标志之一。

本门教材比较系统和完整地阐述了陀螺仪的基本理论及其应用。全书内容大体上可分为以下三个部分:

第一部分(第一章至第三章)为陀螺仪的基本理论,包括陀螺仪的力学基础、基本特性和动力学分析。

第二部分(第四章至第六章)为陀螺仪的基本应用,包括测量加速度、角位移和角速度的各种陀螺仪(其它类型的加速度计也在此介绍)。

第三部分(第七章至第十章)为惯性导航系统应用的各种陀螺仪,包括液浮陀螺仪、挠性陀螺仪、静电陀螺仪和激光陀螺仪。

本书是根据北京航空学院、西北工业大学和南京航空学院共同讨论制订的统一教学大纲编写的。在编写过程中,吸取了三院校教学和科研中的经验体会,参考了国内外有关的文献资料,在注意全书内容系统性和完整性的同时,还注意反映当代陀螺仪技术的成就及今后的发展趋向。对于理论问题,特别注重在物理概念上给以明确的解释。在叙述上力求突出重点、深入浅出和便于自学。

参加本书编写的有:南航郭秀中(概述、第一章至第三章)、北航于波(第四章至第六章)、西工大陈云相(第七章至第十章)。全书最后由南航郭秀中统一修改、定稿。

本书承南京工学院黄惟一副教授审阅,提出许多宝贵意见,在此谨致谢意。同时也向为本书出版付出辛勤劳动的其他同志表示感谢。

限于编者水平,书中缺点和错误在所难免,诚恳希望读者批评指正。

编 者

目 录

陀螺仪概述.....	(1)
第一章 刚体定点转动的力学基础.....	(9)
§ 1-1 刚体角位置和角速度的表示方法	(9)
§ 1-2 参考坐标系	(16)
§ 1-3 哥氏加速度	(22)
§ 1-4 转动惯量、惯量椭球与惯性主轴	(26)
§ 1-5 角动量、角动量定理及欧拉动力学方程式	(30)
§ 1-6 刚体的永久转动及其稳定性问题	(37)
附录 关于本教材中所使用单位的说明.....	(44)
第二章 陀螺仪的基本特性.....	(46)
§ 2-1 双自由度陀螺仪的进动性	(46)
§ 2-2 双自由度陀螺仪的稳定性(定轴性).....	(52)
§ 2-3 单自由度陀螺仪的基本特性	(59)
第三章 陀螺仪动力学分析.....	(63)
§ 3-1 双自由度陀螺仪的运动方程式	(63)
§ 3-2 双自由度陀螺仪运动的基本分析	(67)
§ 3-3 阻尼和弹性约束对双自由度陀螺仪运动的影响	(76)
§ 3-4 双自由度陀螺仪的方块图与传递函数	(81)
§ 3-5 单自由度陀螺仪的动力学分析	(84)
§ 3-6 陀螺仪的漂移误差模型	(90)
§ 3-7 陀螺仪的漂移测试方法	(98)
附录 应用欧拉动力学方程式推导陀螺仪完整的运动方程式.....	(103)
第四章 加速度的测量.....	(110)
§ 4-1 加速度测量的理论基础	(110)
§ 4-2 摆、侧滑仪及液体开关	(119)
§ 4-3 液浮摆式加速度计	(124)
§ 4-4 挠性加速度计	(129)
§ 4-5 陀螺积分加速度计	(131)
§ 4-6 加速度计的数学模型	(135)
§ 4-7 加速度计的试验方法	(139)

第五章 角位移的测量	(144)
§ 5-1 自由陀螺仪	(144)
§ 5-2 陀螺地平仪	(149)
§ 5-3 航向陀螺仪与陀螺磁罗盘	(161)
§ 5-4 陀螺罗盘	(172)
§ 5-5 全姿态组合陀螺仪	(180)
第六章 角速度与角加速度的测量	(185)
§ 6-1 转弯指示器与速率陀螺仪	(185)
§ 6-2 积分陀螺仪	(195)
§ 6-3 速率积分陀螺仪与双轴速率陀螺仪	(205)
§ 6-4 角加速度的测量	(209)
第七章 液浮陀螺仪	(214)
§ 7-1 惯性导航对陀螺元件的要求	(214)
§ 7-2 液浮陀螺的基本结构	(218)
§ 7-3 液浮的基本原理	(222)
§ 7-4 磁悬浮定中心的原理	(225)
§ 7-5 动压气浮轴承的工作原理	(228)
第八章 挠性陀螺仪	(235)
§ 8-1 挠性陀螺的基本原理	(235)
§ 8-2 动力调谐陀螺的结构与挠性支承的力学模型	(240)
§ 8-3 平衡环的扭摆运动与动力调谐原理	(245)
§ 8-4 动力调谐陀螺的运动方程式及运动特性分析	(253)
§ 8-5 动力调谐陀螺的基本误差分析	(260)
第九章 静电陀螺仪	(267)
§ 9-1 静电陀螺的基本组成及结构	(267)
§ 9-2 静电陀螺的静电支承原理	(272)
§ 9-3 静电陀螺的角度读取原理	(279)
§ 9-4 静电陀螺的运动方程式	(283)
§ 9-5 静电陀螺的基本运动分析	(285)
第十章 激光陀螺仪	(293)
§ 10-1 激光陀螺的发展及其特点	(293)
§ 10-2 激光和激光器	(294)
§ 10-3 激光陀螺的基本原理、误差及结构	(302)
§ 10-4 克服激光陀螺闭锁效应的几种方案	(310)
参考文献	(319)

陀螺仪概述

一、陀螺仪的分类

“陀螺仪”是感测旋转的一种装置。陀螺仪这一术语的英文为“gyroscope”，它来自希腊文，其意思是“旋转指示器”。随着科学技术的发展，人们发现大约有一百种物理现象可以被用来感测相对于惯性空间的旋转。在此基础上，研制出了许多不同原理和类型的陀螺仪。从工作的机理来看，可以把它们分成两大类：一类是以经典力学为基础的陀螺仪；另一类是以非经典力学为基础的陀螺仪。

以经典力学为基础的有刚体转子陀螺仪、流体转子陀螺仪、振动陀螺仪和半球谐振子陀螺仪等。刚体转子陀螺仪是把高速旋转的刚体转子支承起来，使之获得转动自由度的一种装置，它可用来测量角位移或角速度。流体转子陀螺仪的转子不是固体材料，而是在特殊容器内按一定速度旋转的流体，它也可用来测量角位移或角速度。振动陀螺仪是利用振动叉旋转时的哥氏加速度效应做成的测量角速度的装置。半球谐振子陀螺仪则是利用振动杯旋转时的哥氏加速度效应做成的测量角位移的装置。

以非经典力学为基础的有激光陀螺仪、光导纤维陀螺仪、压电晶体陀螺仪、粒子陀螺仪和核子共振陀螺仪等。在这些陀螺仪中，没有高速旋转的转子或振动的构件，但它们具有感测旋转的功能。例如，激光陀螺仪实际上是一种环形激光器，环形激光器中正、反两束光的频率差与基座旋转角速度成正比，故它可用来测量角速度。又如，压电晶体陀螺仪实际上是利用晶体压电效应做成的测量角速度的装置；粒子陀螺仪实际上是利用基本粒子的陀螺磁效应做成的测量角速度的装置。

目前应用最为广泛的是刚体转子陀螺仪。这种陀螺仪的核心部分是一个绕自转轴（又称陀螺主轴或转子轴）高速旋转的刚体转子。转子一般采用高比重的金属材料例如不锈钢、黄铜或钨镍铜合金等，做成空心圆柱体或实心圆柱体；较为特殊的则采用小比重的金属材料例如铝或铍等，做成空心球体或实心球体。图 0-1 所示的是常见的两种空心圆柱形陀螺转子。

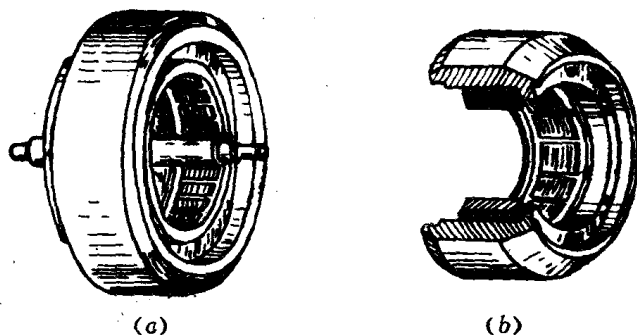


图 0-1 空心圆柱形陀螺转子
(a) 带轴的转子 (b) 未带轴的转子

陀螺仪的转子通常采用陀螺电动机驱动，也有采用其它驱动方法例如高压气体驱动，使之绕自转轴高速旋转，转速达每分钟几千转至几万转。采用陀螺电动机驱动时，陀螺仪的转子实际上就是电动机的转子。对于航空上使用的陀螺仪，由磁滞陀螺电动机驱动时转子的转速一般为每分钟 24000 转，由异步陀螺电动机驱动时则略低于该数值。图 0-2 和图 0-3 分别为常见的磁滞陀螺电动机和异步陀螺电动机的结构。

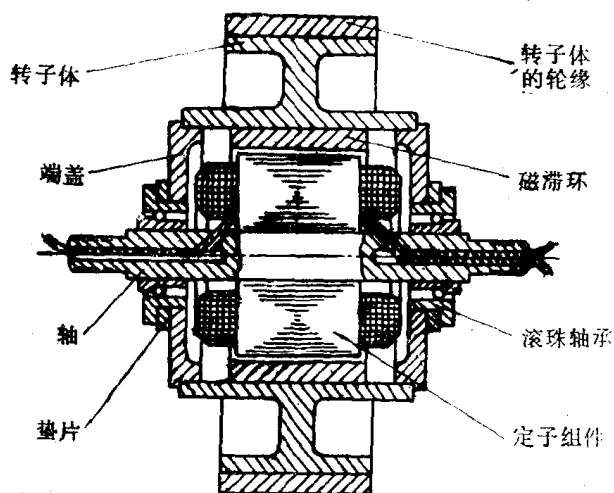


图 0-2 磁滞陀螺电动机的结构

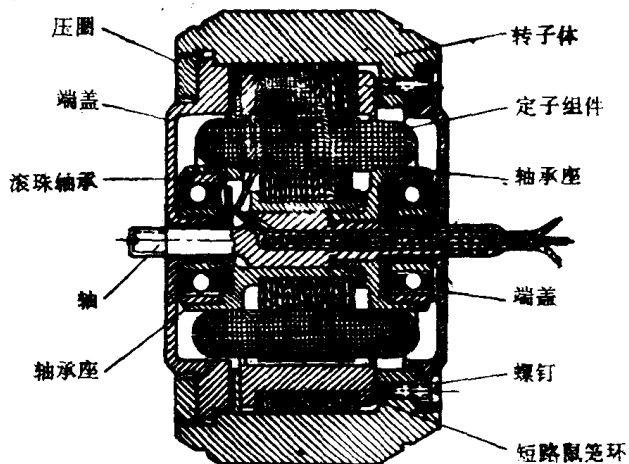


图 0-3 异步陀螺电动机的结构

作为刚体转子陀螺仪的基本特征，是它的转子绕自转轴高速旋转而具有一定的角动量，这样才能得到所需的陀螺特性。

为了测量运动物体的角位移或角速度，必须把转子安装在框架上或特殊支承上，使转子相对基座具有三个或两个转动自由度，或者说使自转轴相对基座具有两个或一个转动自由度。这样，就构成了陀螺仪的两种类型，即双自由度陀螺仪和单自由度陀螺仪。

在工程应用中为简单起见，陀螺仪往往简称为陀螺。

二、双自由度陀螺仪的基本组成

双自由度陀螺仪是指自转轴具有两个转动自由度的陀螺仪，其基本组成如图 0-4 所示。转子借助自转轴上一对轴承安装于内环（又称内框架）中，内环借助内环轴（又称内框架轴）上一对轴承安装于外环（又称外框架）中，外环借助外环轴（又称外框架轴）上一对轴承安装在基座（即仪表壳体）上。由内环和外环组成的框架装置也常叫做万向支架。

在这种框架式双自由度陀螺仪中，自转轴与内环轴垂直且相交，内环轴与外环轴垂直且相交；当这三根轴线相交于一点时，该交点叫做万向支点，它实际上就是陀螺仪的支承中心。转子由电动或气动装置驱动绕自转轴高速旋转，转子连同内环可绕内环轴转动，转子连同内环和外环又可绕外环轴转动。对转子而言，具有绕自转轴、内环轴和外环轴这三根轴的三个转动自由度。而对自转轴而言，仅具有绕内环轴和外环轴这两根轴的两个转动自由度。

在实际的陀螺仪结构中，内环和外环的材料一般采用铝合金或钢；采用铍合金可使框架的重量轻且刚度大。内环的形状做成方框形或如图 0-5 所示的圆柱形薄壁壳体（这种形状的内环俗称陀螺房）。外环的形状做成方框形或如图 0-5 所示的钟罩形薄壁壳体。

陀螺仪框架轴上的支承，应用最早的是滚珠轴承。采用滚珠轴承的框架式陀螺仪俗称常规陀螺仪，目前在航空陀螺仪表、飞行自动控制系统以及许多场合中仍然被广泛应用。但由

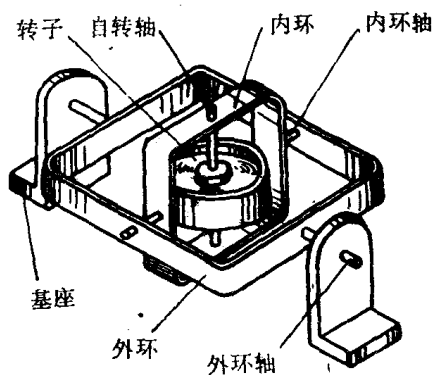


图 0-4 双自由度陀螺仪的基本组成

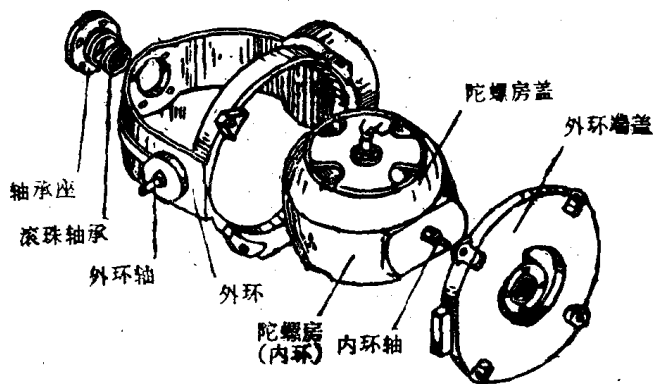


图 0-5 常见的内、外环结构形状

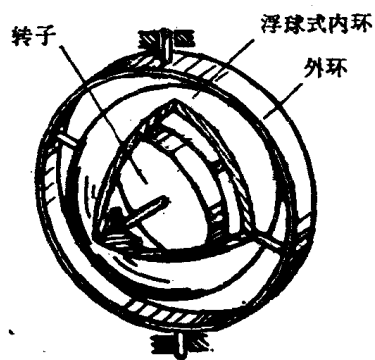


图 0-6 双自由度液浮陀螺仪示意图

于滚珠轴承存在摩擦力矩，不可能使陀螺仪达到很高的精度。为了减小框架轴上支承的摩擦力矩，以满足惯性导航和惯性制导对陀螺仪精度的要求，通常采用液体悬浮的办法而称为液浮陀螺仪。

双自由度液浮陀螺仪如图 0-6 所示。它的内环做成空心球形密封浮子，并且用特殊液体将内环组件和外环悬浮起来，而框架轴上的支承则采用宝石轴承。当液体对内环组件的浮力与内环组件的重量相等，以及液体对外环的浮力与外环的重量相等时，便极大地减小了框架轴上支承的摩擦力矩。

提高陀螺仪精度的另一途径，是革除上述的框架装置，而采用各种特殊的支承来支承转子，使之获得所需的转动自由度。其中，采用动压气浮支承的称为动压气浮陀螺仪；采用挠性支承的称为挠性陀螺仪；采用静电支承的称为静电陀螺仪。

动压气浮陀螺仪如图 0-7 所示。它的转子上有一内圆球面，与表壳固连的轴上有一外圆球面，构成球面轴承。两个球面的间隙仅几微米。当转子由陀螺电动机驱动绕自转轴高速旋转时，带动球面间隙内的气体运动而形成动压。若转子中心相对支承中心位移，则间隙变小一侧的气体压力增大，而间隙变大一侧的气体压力减小，于是使转子回到中心位置。也就是说，这里是靠动压气膜来起到支承转子的作用。该动压气浮支承可允许转子绕垂直于自转轴的两个正交轴转动，因此自转轴具有两个转动自由度。

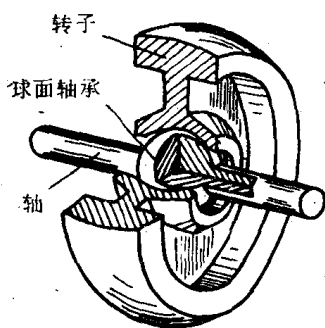


图 0-7 动压气浮陀螺仪示意图

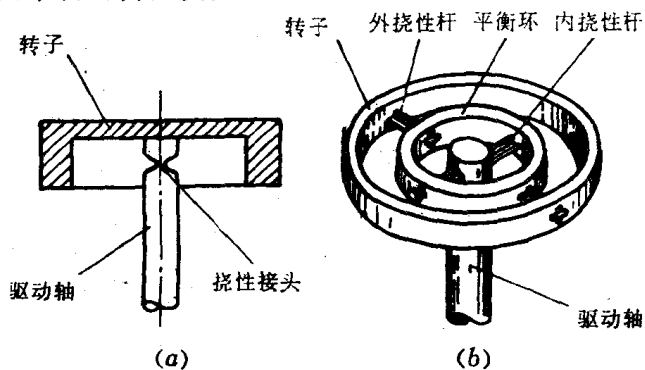


图 0-8 挠性陀螺仪示意图

(a) 细颈式 (b) 动力调谐式

挠性陀螺仪如图 0-8 所示。它的转子借助于细颈式挠性支承（见图中 a），或借助于内挠性杆、外挠性杆和平衡环组成的动力调谐式挠性支承（见图中 b）与驱动轴相连。挠性支承实为一种弹性支承，必然存在弹性约束力矩而造成陀螺仪的误差，所以必须加以补偿。在动力

调谐式挠性陀螺仪中，利用平衡环扭摆运动产生的动力反弹性力矩来抵消挠性杆的机械弹性力矩，从而消除挠性支承对转子的弹性约束，这就是所谓“动力调谐”。该挠性支承一方面传递陀螺电动机的转矩而带动转子绕自转轴高速旋转；另一方面又允许转子绕垂直于自转轴的两个正交轴转动，因此自转轴具有两个转动自由度。

静电陀螺仪如图 0-9 所示。它的转子由铝或铍做成空心或实心球体，放置在陶瓷壳体的超高真空的球腔内。球腔壁上一般有三对球面形金属电极，并且加上高电压。转子与电极的间隙仅几十微米。这样，电极与转子之间便形成很强的静电场；由于静电感应作用，电极对转子产生静电吸力。静电吸力的大小与间隙及电压

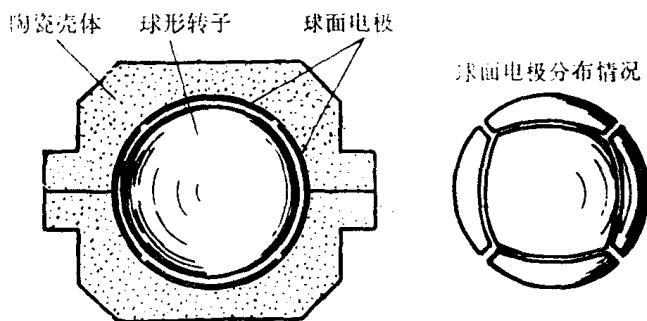


图 0-9 静电陀螺仪示意图

的大小有关。若转子中心相对球腔中心位移，则调节间隙变小一端电极上的控制电压减小，从而静电吸力减小；同时调节间隙变大一端电极上的控制电压增大，从而静电吸力增大，于是使转子回到中心位置。也就是说，这里是靠调节静电吸力来起到支承转子的作用。转子由起动线圈驱动绕自转轴高速旋转。该静电支承可允许转子绕垂直于自转轴的两个正交轴转动，因此自转轴具有两个转动自由度。

三、单自由度陀螺仪的基本组成

单自由度陀螺仪是指自转轴具有一个转动自由度的陀螺仪，其基本组成如图 0-10 所示。同双自由度陀螺仪相比，它只有一个框架，故少了一个转动自由度。对转子而言，具有绕自转轴和框架轴这两根轴的两个转动自由度。而对自转轴而言，仅具有绕框架轴这一根轴的一个转动自由度。

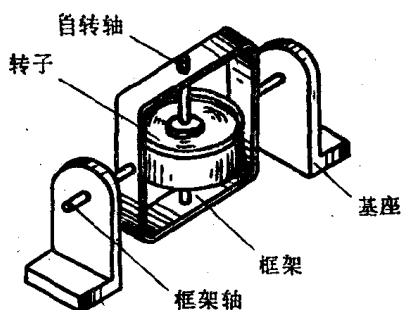


图 0-10 单自由度陀螺仪的基本组成

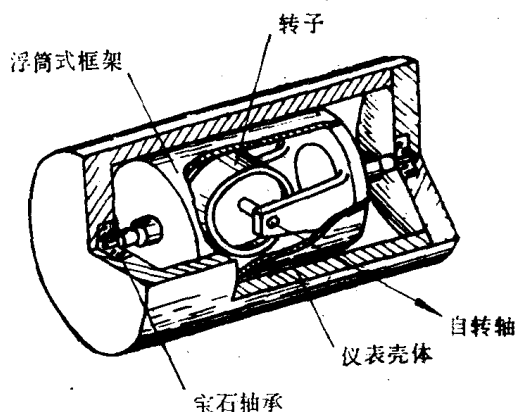


图 0-11 单自由度液浮陀螺仪示意图

在实际的陀螺仪结构中，该框架的形状除做成方形外，也常做成陀螺房形式。框架轴上的支承，应用比较广泛的也是滚珠轴承。同样，采用液浮的办法可提高陀螺仪的精度。单自由度液浮陀螺仪如图 0-11 所示。它的框架做成圆筒形密封浮子，并且用特殊液体将框架组件悬浮起来，而框架轴上的支承则采用宝石轴承。当液体对框架组件的浮力与框架组件的

重量相等时,便极大地减小了框架轴上支承的摩擦力矩。

此外,还可采用静压气浮的办法来提高陀螺仪的精度。静压气浮陀螺仪如图 0-12 所示。它的框架也是做成圆筒形密封浮子,并且用高压气体将框架组件悬浮起来。高压气体在外部泵的作用下流到浮筒与表壳的间隙中,由气体的静压所产生的支承力对框架组件起到支承作用,这样就消除了框架轴上支承的摩擦力矩。

应当指出,按转动自由度的数目对陀螺仪进行分类,有两种并行的称法。一种是这里所说的按自转轴所具有的转动自由度数目,分为双自由度陀螺仪和单自由度陀螺仪(本书采用此种称法)。另一种是计入转子绕自转轴的转动自由度,即按转子所具有的转动自由度数目,分为三自由度陀螺仪和二自由度陀螺仪。也就是说,把上述的双自由度陀螺仪对应叫做三自由度陀螺仪,而把上述的单自由度陀螺仪对应叫做二自由度陀螺仪。美、英采用前一种称法,苏联采用后一种称法,我国目前还没有统一的称法。我们应该弄清两种称法的对应关系,以免在阅读参考书和今后工作中发生混淆。

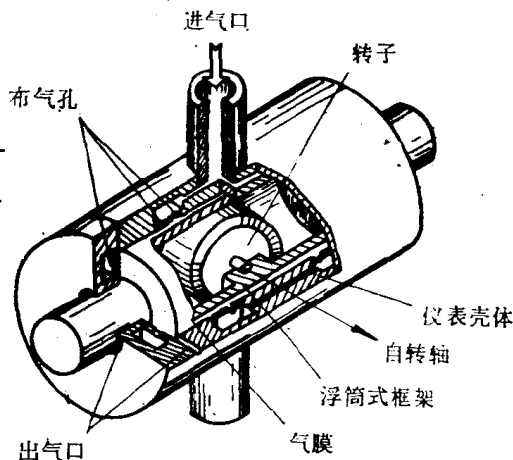


图 0-12 静压气浮陀螺仪示意图

四、陀螺仪的应用

在双自由度陀螺仪或单自由度陀螺仪的基础上,附加适当的元件、装置或机构,则可做成各种用途的陀螺仪,通常称之为陀螺仪表或陀螺仪器。总括来看,陀螺仪的主要功能是测量运载体(如飞机、导弹、舰船等)的角位移和角速度,此外还能测量运载体的加速度和角加速度。

在航空上,陀螺仪的基本用途是测量飞机的姿态角(俯仰角和倾斜角)、航向角和角速度,因此它成为飞机航行驾驶的重要仪表。飞行自动控制系统例如自动驾驶仪和增稳系统,以及其它机载特种设备例如机载雷达系统、火力控制系统和航空照相系统等,也需要用陀螺仪测量出飞机的这些参数,因此它也是这些系统和设备的重要部件。现将航空上应用的陀螺仪名称及其用途列在表 0-1 中。

从使用角度看,可把表中所列的陀螺仪表分为指示式的与传感式的两类。给出判读指示的属于指示式陀螺仪表;输出电气信号的属于传感式陀螺仪表,即通常所称的陀螺传感器。当然,并不是一架飞机都同时装备表中所列的各种陀螺仪表,而是根据不同飞机的要求,选择其中的几种来进行配套。

在导弹、人造卫星和宇宙飞船的姿态控制系统中,也是用陀螺仪来测量姿态及其变化。在舰船上,则使用陀螺罗盘测量航向,使用陀螺稳定平台测量纵摇和横摇。陀螺仪还用于鱼雷和反坦克导弹的定向以及坦克火炮的控制系统。在民用方面,陀螺仪可用于矿山开采和石油钻井的定向、铁轨倾斜度和汽车性能的测量、以及制造精密的称重衡器,等等。

特别需要指出,在惯性导航和惯性制导系统中,陀螺仪是极其重要的敏感元件。所谓惯性导航,就是通过测量运载体的加速度,经过计算机数学运算,从而确定出运载体的瞬时速度和瞬时位置。所谓惯性制导,则是在得到这些参数的基础上,控制运载体的位置以及速度的大小和方向,从而引导运载体飞向预定的目标。在平台式惯性导航和惯性制导系统中,为

表 0-1 航空上应用的陀螺仪表名称及其用途

陀螺仪表名称	在 航 空 上 的 用 途
陀螺地平仪	测量飞机的姿态角, 给飞行员提供姿态指示
垂直陀螺仪	测量飞机的姿态角, 给飞行自动控制系统或其它机载特种设备提供姿态信号
陀螺半罗盘	测量飞机的航向角, 给飞行员提供航向指示
航向陀螺仪	测量飞机的航向角, 给飞行自动控制系统或其它机载特种设备提供航向信号
陀螺磁罗盘	由陀螺半罗盘与磁罗盘组合而成, 用来测量飞机的航向角, 给飞行员提供航向指示
陀螺转弯仪	测量飞机的转弯或盘旋, 给飞行员提供转弯或盘旋指示
速率陀螺仪	测量飞机绕其主轴的角速度, 给飞行自动控制系统或其它机载特种设备提供角速度信号
全姿态组合陀螺仪	由垂直陀螺仪与航向陀螺仪组合而成, 用来测量飞机的姿态角和航向角, 给地平指示器、航向指示器、飞行自动控制系统或其它机载特种设备提供姿态和航向信号
双轴陀螺稳定平台	测量飞机的姿态角, 给地平指示器、飞行自动控制系统或其它机载特种设备提供姿态信号; 此外, 还可直接用来稳定航空相机
三轴陀螺稳定平台	除作为平台式惯性导航系统的核心部件外, 还可用来测量飞机的姿态角和航向角, 给地平指示器、航向指示器、飞行自动控制系统或其它机载特种设备提供姿态和航向信号

使加速度计精确地测量出运载体沿导航坐标系三个轴向的加速度, 需要高精度的陀螺仪做成的三轴陀螺稳定平台来安装三个加速度计。在捷联式惯性导航和惯性制导系统中, 加速度计直接安装在运载体上, 这时需要高精度的陀螺仪来测量运载体的角位移或角速度, 利用计算机求解出运载体沿导航坐标系三个轴向的加速度。

以陀螺仪和加速度计为敏感元件的惯性导航和惯性制导系统, 是一种完全自主式的系统。它不依赖外界任何信息, 也不向外发射任何能量, 具有隐蔽性、全天候和全球导航能力。因此, 惯性导航成为现代飞机、大型舰只和核潜艇的一种重要导航手段, 而惯性制导则成为地地战术导弹、战略导弹、巡航导弹和运载火箭的一种重要制导方法。此外, 惯性导航还可用于陆军炮兵测位、地面战车导航以及大地测绘等领域。

由此可见, 陀螺仪在航空、航天、航海、兵器以至国民经济的某些部门中都有着广泛的应用, 掌握好陀螺仪理论知识, 研制出高性能的陀螺仪, 对于实现我国的四个现代化无疑是十分重要的。

五、陀螺仪技术发展概况

对于高速旋转刚体的力学问题, 早在十七世纪中叶至十八世纪初, 牛顿、欧拉、波松、班索和雅科毕等学者都作了详细的理论研究, 并先后指出这种刚体具有进动性和定轴性。法国科学家傅科于 1852 年称这种刚体为陀螺, 并利用它对惯性空间方位稳定的特性, 设计和制成了一种最早的陀螺仪, 用来观察地球的自转现象。不过, 当时仅仅停留在实验室研究阶段。

从十八世纪中叶到十九世纪末的一百五十年左右的时间里，多次有人提出并设法解决在轮船上应用陀螺仪建立方位基准。但是，一方面由于需要还不十分迫切，另一方面又受到当时技术水平的限制，所以长时间未能制造出可供实际使用的陀螺仪。二十世纪初，由于航海事业的兴起和北极探险的需要，促进了陀螺仪技术的发展；而且，当时异步电动机和滚珠轴承也都达到了一定的水平。安休兹于1908年在德国、斯派利于1911年在美国，先后各制成一种原理基本相同而结构不同的陀螺罗盘，用来测量轮船的航向。本世纪初陀螺罗盘的发明和制成，开辟了陀螺仪在工程实际中应用的道路，可以作为陀螺仪技术形成和发展的开端。

陀螺仪在航空上的应用比航海稍晚些。从二十年代到三十年代，在飞机上相继使用了陀螺转弯仪、陀螺地平仪和陀螺半罗盘，提供飞机转弯、姿态和航向指示。三十年代中期，在飞机自动驾驶仪中使用了垂直陀螺仪、航向陀螺仪和速率陀螺仪，作为飞机姿态、航向和角速度的敏感元件。从四十年代到五十年代，航空陀螺仪表向组合式方向发展，相继出现了陀螺磁罗盘、全姿态组合陀螺仪和陀螺稳定平台。六十年代以后，姿态和航向的显示从原先机械式的发展成为电子式的综合显示，如在平视显示仪中就把姿态和航向等多种信息综合在一起显示，使得飞行员能够直观、形象而迅速地判读出各种信息。

惯性导航和惯性制导所依据的力学原理，最早也可追溯到牛顿定律的提出。但在当时的条件下，并没有人认识到这种力学原理可以用来进行导航定位。另一方面，惯性导航和惯性制导对陀螺仪和加速度计的精度要求极高，例如一般要求陀螺仪的随机漂移率达到0.01度/小时以至更小，加速度计的分辨率达到 $10^{-5}g$ (g 为重力加速度)以至更精，这就需要有极高的设计和工艺水平才能实现。所以，要做出可供实际使用的惯性导航和惯性制导系统，只有在科学技术高度发展的情况下才能办到。正因为如此，牛顿时代之后经过了漫长的岁月，一直到第二次世界大战期间，德国的V-2火箭使用陀螺仪和加速度计进行测量和定位，才形成了惯性制导的雏形。虽然受到当时技术和工艺水平的限制，它的导航定位精度还比较低，但这却是惯性制导在工程上开创性的应用。

第二次世界大战以后，在德国惯性制导技术的基础上，美国和苏联都投入大量的人力和物力，开展惯性导航和惯性制导的研制工作。到了五十年代，由于技术和工艺的进步以及电子计算机的发展，为比较完善的惯性导航和惯性制导系统的工程实现提供了较好的物质条件。当时，美国首先在陀螺仪精度上取得突破，麻省理工学院仪表实验室研制成功高精度的液浮陀螺仪。1954年，惯性导航系统在飞机上试飞成功。1958年，“缸鱼”号潜艇依靠惯性导航系统穿过北极在冰下航行21天。随后，各种惯性导航和惯性制导系统得到迅速发展，并大量装备各种飞机、导弹和舰船。六十年代，美国研制出比液浮陀螺仪结构简单的挠性陀螺仪，也在各种惯性导航和惯性制导系统中得到广泛应用。

七十年代，由于科学技术的进一步发展，使平台式惯性导航和惯性制导系统的精度更加提高，功能更趋完善。在这期间，美国还开始研制捷联式惯性导航和惯性制导系统，并很快付诸工程应用。当代计算机技术特别是微型计算机的成就，为捷联式惯性系统提供了快速有效的运算工具；而激光陀螺仪在精度上的突破，又为捷联式惯性系统提供了比较理想的敏感元件。因此，捷联式惯性导航和惯性制导系统将具有十分广阔的发展和应用前景。

目前，惯性仪表（陀螺仪和加速度计）与惯性系统（惯性导航系统和惯性制导系统），已经作为一门重要的技术而被称为“惯性技术”。世界各工业强国对此都予以极大重视，除了上面已提到的美国 and 苏联以外，英国、法国和西德等国也都投入大量的人力和物力，从事这

方面的研制工作。据初步估计，国外研究和生产惯性仪表与惯性系统的公司、研究机构、生产厂家、试验中心和高等院校约有二百个以上。

值得指出的是，远在数千年前我国民间就有了陀螺玩具，西汉时期“被褥香炉”中的框架与现代陀螺仪中框架的原理也完全相同。但中国历史上长期处于落后状态，不可能把这些应用于工程实际中。新中国成立后，积极发展陀螺仪表工业，生产出了各种类型的陀螺仪表。同时，还大力开展惯性系统的研制工作。经过多年艰苦不懈的努力，1970年以来，我国自行研制的惯性系统已在多种现代武器中获得了成功的应用。可以预计，在不久的将来，我国的惯性技术必将进入世界的先进行列。

1.3 刚体角动量定理：

i) 质点动量： $m\mathbf{v}$

ii) 动量定理： $\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}$

iii) 力矩： $M_0(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

iiii) 质点动量矩： $\mathbf{h}_0 = M_0(m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

v) 角动量定理： $\frac{d\mathbf{h}_0}{dt} = M_0(\mathbf{F}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$

vi) 质点系角动量： $\mathbf{H}_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{h}_{0i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$

vii) 刚体角动量：

$$\mathbf{v}_L = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_L \quad \mathbf{r}_L = \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b_z & b_y \\ -b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = -\mathbf{B} \mathbf{b}$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$: 反对称矩阵

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = - \sum_{i=1}^{\infty} m_i \vec{r}_i \vec{r}_i^T \vec{\omega} \\ &= - \sum_{i=1}^{\infty} m_i \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \text{若刚体对称} \begin{pmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$I_x \dots I_y \dots I_z$
见 P. 27

第一章 刚体定点转动的力学基础

本门教材的主要内容是阐述刚体转子陀螺仪的理论及其应用。刚体转子陀螺仪的运动实际上就是刚体的定点转动。本章将根据研究这种陀螺仪基本理论的需要，有针对性地介绍刚体定点转动的力学基础知识。

研究陀螺仪运动

§ 1-1 刚体角位置和角速度的表示方法 前提

在研究刚体定点转动时，首先一个问题是在运动学上要给它以某种描述，这就是要把它在空间的角位置和角速度表示出来。掌握这些表示方法是研究陀螺仪运动的前提。

一、用方向余弦描述刚体的角位置

如图 1-1 所示，设取直角坐标系 $Oxyz$ ，沿各坐标轴的单位矢量分别为 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ ；并设过坐标原点 O 有一矢量 $\vec{R}$ ，它在各坐标轴上的投影分别为 R_x 、 R_y 、 R_z 。矢量 $\vec{R}$ 可以用它的投影来表示：

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

而投影 R_x 、 R_y 和 R_z 又可分别表示为：

$$R_x = R \cos(\widehat{R, x})$$

$$R_y = R \cos(\widehat{R, y})$$

$$R_z = R \cos(\widehat{R, z})$$

其中 $\cos(\widehat{R, x})$ 、 $\cos(\widehat{R, y})$ 和 $\cos(\widehat{R, z})$ 是矢量 $\vec{R}$ 与坐标轴 x 、 y 、 z 正向之间夹角的余弦。知道了它们的数值，便可确定出矢量 $\vec{R}$ 在坐标系 $Oxyz$ 中的方向，所以把它们叫做方向余弦。

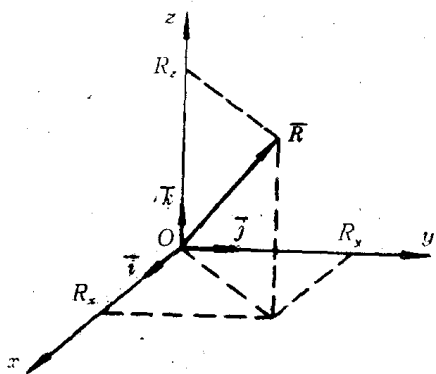


图 1-1 直角坐标系中的矢量

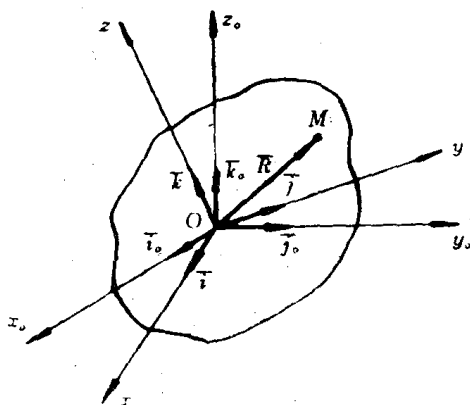


图 1-2 刚体坐标系相对参考坐标系的角位置

方向余弦可以用来描述刚体的角位置。如图 1-2 所示，设刚体绕定点 O 相对参考坐标系作定点转动；取直角坐标系 $Oxyz$ 与刚体固连，沿各坐标轴的单位矢量分别为 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ ；又

取直角坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 代表参考坐标系，沿各坐标轴的单位矢量分别为 $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ 。很显然，如果要确定刚体的角位置，只要确定出刚体坐标系 $Oxyz$ 在参考坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 中的角位置。而要做到这一点，实际上只需知道刚体坐标系 x, y 和 z 三根轴的九个方向余弦就行了。这三根轴的九个方向余弦列在表 1-1 中。

表 1-1 两坐标系各轴之间的方向余弦

	x_0	y_0	z_0
x	$C_{11} = \cos(\widehat{x, x_0})$	$C_{12} = \cos(\widehat{x, y_0})$	$C_{13} = \cos(\widehat{x, z_0})$
y	$C_{21} = \cos(\widehat{y, x_0})$	$C_{22} = \cos(\widehat{y, y_0})$	$C_{23} = \cos(\widehat{y, z_0})$
z	$C_{31} = \cos(\widehat{z, x_0})$	$C_{32} = \cos(\widehat{z, y_0})$	$C_{33} = \cos(\widehat{z, z_0})$

对于刚体坐标系的一个角位置，就有唯一的一组方向余弦的数值，反之亦然，所以这一组方向余弦可以用来确定刚体的角位置。利用方向余弦，我们还可以很方便地进行坐标变换，即把某一点或某一矢量在一个坐标系里的坐标，变换成用另一坐标系里的坐标来表示。

设过坐标原点 O 有一矢量 $\vec{R}$ ，矢量端点为 M (见图 1-2)。现直接用 x, y, z 代表 $\vec{R}$ 在刚体坐标系 $Oxyz$ 上的投影，并直接用 x_0, y_0, z_0 代表 $\vec{R}$ 在参考坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 上的投影。矢量 $\vec{R}$ 在刚体坐标系 $Oxyz$ 与参考坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 中可分别表示为：

$$\begin{aligned}\vec{R} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{R} &= x_0\vec{i}_0 + y_0\vec{j}_0 + z_0\vec{k}_0\end{aligned}\quad (1-1)$$

若用方向余弦表示矢量 $\vec{R}$ 在刚体坐标系 $Oxyz$ 上的投影，则有：

$$\begin{aligned}x &= x_0 \cos(\widehat{x, x_0}) + y_0 \cos(\widehat{x, y_0}) + z_0 \cos(\widehat{x, z_0}) \\ y &= x_0 \cos(\widehat{y, x_0}) + y_0 \cos(\widehat{y, y_0}) + z_0 \cos(\widehat{y, z_0}) \\ z &= x_0 \cos(\widehat{z, x_0}) + y_0 \cos(\widehat{z, y_0}) + z_0 \cos(\widehat{z, z_0})\end{aligned}$$

将上式写成矩阵形式，并采用表 1-1 中的简记符号，可得：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

按照类似的方法，矢量 $\vec{R}$ 在参考坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 上的投影可表示为：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

容易看出，对于任一确定点 M 或确定矢量 $\vec{R}$ 来说，利用 (1-2) 和 (1-3) 式，就可以在两个坐标系之间进行坐标变换。

上述式子中的方阵叫做方向余弦矩阵。为简单起见，用 o 代表参考坐标系 $Ox_0y_0z_0$ ，用 r 代表刚体坐标系 $Oxyz$ ，并用下列记号代表相应的方向余弦矩阵：

$$C_o^r = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}; \quad C_r^o = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

这里 C_{ij}^o 称为 o 系对 r 系的方向余弦矩阵；而 C_{ij}^r 则称为 r 系对 o 系的方向余弦矩阵。

根据方向余弦矩阵的正交性质，方向余弦矩阵之间有下列关系：

① 两个方向余弦矩阵互为转置矩阵，即

$$[C_{ij}^o]^T = C_{ij}^r; [C_{ij}^r]^T = C_{ij}^o \quad (1-5)$$

② 两个方向余弦矩阵互为逆矩阵，即

$$[C_{ij}^o]^{-1} = C_{ij}^r; [C_{ij}^r]^{-1} = C_{ij}^o \quad (1-6)$$

③ 各个方向余弦矩阵的转置矩阵与逆矩阵相等，即

$$[C_{ij}^o]^T = [C_{ij}^o]^{-1}; [C_{ij}^r]^T = [C_{ij}^r]^{-1} \quad (1-7)$$

根据以上关系，可以写出如下矩阵等式：

$$C_{ij}^o [C_{ij}^o]^T = C_{ij}^o [C_{ij}^o]^{-1} = I$$

这里 I 为单位阵。现把上式具体写成：

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此得到下列等式：

$$\begin{aligned} C_{11}^2 + C_{12}^2 + C_{13}^2 &= 1 \\ C_{21}^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 &= 1 \\ C_{31}^2 + C_{32}^2 + C_{33}^2 &= 1 \\ C_{11}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{13}C_{23} &= 0 \\ C_{21}C_{31} + C_{22}C_{32} + C_{23}C_{33} &= 0 \\ C_{31}C_{11} + C_{32}C_{12} + C_{33}C_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (1-8)$$

(1-8) 式中的六个方程是九个方向余弦之间的六个关系式。也就是说，九个方向余弦之间存在六个约束条件，因而实际上只有三个方向余弦是独立的。

但是，由给定的三个方向余弦的数值，通过约束条件来求其余六个方向余弦的数值，实际上很困难，而且它的解往往不是唯一的。所以一般地说，仅仅给定三个独立的方向余弦，并不能唯一地确定两个坐标系之间的相对角位置。为了解决这个问题，通常采用三个独立的转角即欧拉角，来求出九个方向余弦的数值，这样便能唯一地确定两个坐标系之间的相对角位置。

二、用欧拉角描述刚体的角位置

两个坐标系之间的相对角位置可以用三次独立转动的三个转角来确定。第一次转动可以绕刚体坐标系的任意一根轴进行；第二次转动可以绕其余两根轴中的任意一根轴进行；而第三次转动可以绕第二次转动之外的两根轴中的任意一根轴进行。依照这样三次转动所得到的三个独立的转角，统称为欧拉角。陀螺仪的角位置就是用欧拉角来描述的，这里介绍其中比较典型的两种。

第一种欧拉角如图 1-3 所示。假定在起始时

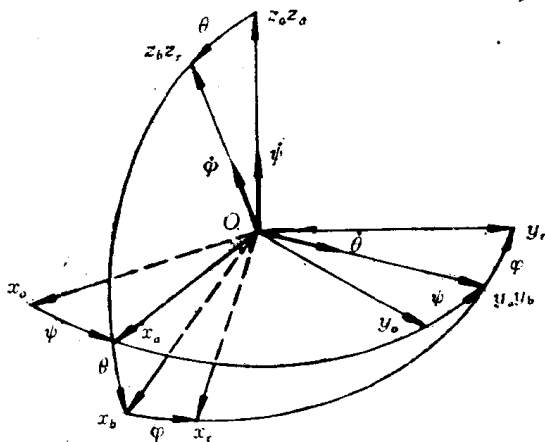


图 1-3 第一种欧拉角