CHANG WEI FEN FANG CHENG

常微分方程

刘志汉 主编

陕西师范大学出版社

常 微 分 方 程

刘 志 汉 主编

陕 西 师 范 大 学 出 版 社

常 微 分 方 程

刘志汉　主编

●

陕西师范大学出版社出版

（西安市陕西师大120信箱）

陕西省新华书店经销

西安小寨印刷厂印刷

●

开本787×1092　1/32　印张13.25　字数273千字

1987年5月第1版　1987年5月第1次印刷

印数：1—3 000册

ISBN7-5613-0035-2/G·39

统一书号：7043·39　定价：2.15元

内容提要

本书是根据1980年教育部颁布的高等师范院校《常微分方程教学大纲》编写的。全书共分六章：第一章介绍微分方程的一般概念；第二、三、四章介绍各类方程的基本解法和基本理论；第五章讲解存在唯一性定理的证明；第六章介绍定性理论和稳定性理论中的基本概念。

本书可作为高等师范院校和高师函授数学专业的教材和参考书，也可供业余大学、自修读者及在职中学教师进修使用。

前　言

我们早就希望有一本适合师范院校的常微分方程教材。过去使用的综合性大学教材，内容多，在规定的课时内讲不完，只好删删减减。为了解决这个矛盾，我们按教学大纲编写了本教材，并根据过去的教学实践，对教材中某些部分作了适当的处理，使学生易于接受。下面就编写过程中的想法作几点说明。

一、常微分方程是师范院校数学系的一门基础课，规定用72学时讲完。因此，在教材中应当重点讲授其中最基本的内容。除此之外，还要根据科技发展的需要，使学生注意本学科的发展方向，为进一步学习这门学科做些准备。为此，根据大纲的要求，我们增加了有关定性理论和稳定性理论的一些基本概念；引入了向量、矩阵等有关概念，并多次采用对比的方法，使用和熟悉其符号和意义。

二、为了使学生对常微分方程的内容有一个清晰的轮廓，我们按照循序渐进的原则进行了编排，即由一阶方程到高阶方程，再到微分方程组，然后在第五章中看到它们之间的互相转化，从而将各种方程联系起来，这样使讲授的内容集中，收到良好的教学效果。

三、在编写过程中，我们采取由浅入深，由具体到抽象的方法，努力做到容易理解，便于自学。例如，为了更好地理解定性理论的概念，我们在第二章强调了方程的几何解释，

介绍了几何解法，这就对定性理论有一个初步的感性认识。又如，n阶常系数齐次线性方程组基本解组的结构，用到许多线性代数知识，历来都是教学中的难点，在编写中，我们从具体分析三阶方程组入手，得到基本解组的结构。从而，n阶方程组化成约当型后，基本解组的结构就比较清楚了。

四、为了在加强基础理论的同时，也注意基本运算技能的培养和训练，在教材中配有适当的例题，每节后都配有习题，这些习题除了围绕巩固基本理论、基本方法而设置外，也有引导学生思考的习题。书后附有习题答案，以供读者练习时参考。

五、教材中所安排的内容，基本上符合教学计划所规定的学时要求。我们认为在师范院校的基本教材中，不宜写入超过学时过多的内容。如果学时有余，任课教师就有自选补充教材或介绍自己专长的余地。如果学生有余力，可以参考综合性大学的教材，这样既保证了教学大纲的要求，又发挥了任课教师的特长和学生学习的积极性。

六、在教材中介绍了科技工作者常用的拉普拉斯变换法求初值解，将拉氏变换表作为附录Ⅰ备查。又考虑到与其它课程的联系和配合，将一阶偏微分方程作为附录Ⅱ。

七、本教材是由微分方程组刘志汉同志主编的。全坚同志编选了本教材的全部习题，担任了解题工作，并编写了附录Ⅱ。艾克仁、陈菊芳同志一直参加本教材的讨论、修改和使用工作。本教材虽经多次讨论和修改，由于水平有限，也由于我们教学实践中总结的经验不全面，所以对教材的内容和处理方法一定还存在不少缺点和错误，诚恳地希望同志们批评指正。

本教材曾经两次印刷，有几十所师范院校和高师函授使用，反映良好，经过修改后，由陕西师大出版社出版发行，以满足教学的需要。

本教材在编写和修改过程中，得到了北京师大、北京师院、南京师院、湖南师院、西北师院，青海师院、西安师专等兄弟院校有关老师们的鼓励和帮助，并对教材提出了许多宝贵意见，特此表示感谢。

编　者

1987年2月

目　录

第一章　微分方程实例和基本概念

这一章主要介绍几个微分方程的实例，通过这些例题可以看到从各方面都提出了微分方程问题。因此，研究微分方程是非常必要的。然后通过例题介绍微分方程的一些基本概念。

§1·1 微分方程实例

在几何学中的问题：

例1　求曲线，使它在每点处的切线斜率都等于该点的横坐标的二倍，并求出过点(1,1)的那一条曲线。

解　求的是曲线，曲线方程是个未知函数，设$y=y(x)$表示所求的曲线方程。

由数学分析可知，在每点处的切线斜率就是在该点的导数$\frac{dy}{dx}$，由题意有以下的关系式：

$$\frac{dy}{dx}=2x。\tag{1}$$

满足(1)的函数$y(x)$就是我们所求的曲线方程。

用积分的方法，对(1)积分得

$$y=x^2+c,$$

其中c是任意常数。

可知满足要求的曲线是抛物线，当c任意取值时，就可得到一个抛物线族。

在这一族抛物线中，我们还要选出过点(1,1)的那一条曲线来（见图1·1）。

实际上就是用“过点(1,1)”这个条件，确定任意常数c，将点(1,1)代入$y=x^2+c$中得

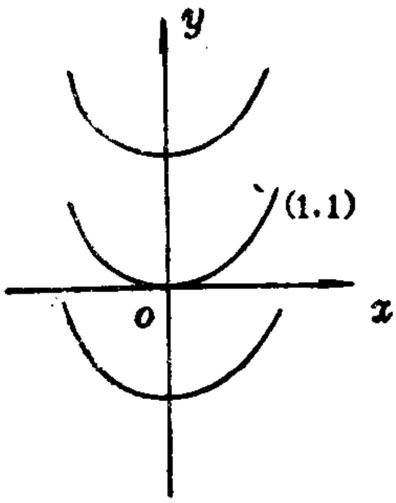

图 1·1

$$1=1^2+c,\quad c=0,$$

故我们所求的过点(1,1)的那条曲线为

$$y=x^2.$$

这个例题是求一个未知函数，由给出的要求，建立方程(1)，从(1)中可以看出它是一个关于未知函数和未知函数的导数的一个关系式。这就是我们所说的微分方程，由于解出(1)的未知函数，使所求的问题得到解决。

在动力学中的问题：

例2 一质量为m的物体，在空中由静止自由下落，设空气阻力与运动速度成正比，试求物体运动速度的变化规律。

解 所求的物体运动速度变化规律，是时间t的未知函数，我们用$v=v(t)$表示。

物体下落时，受到重力和阻力的影响，

重力为mg，与运动方向一致，

阻力为kv，k是比例系数，与运动方向相反。

运动所受的净力为

$$F = mg - kv.$$

按照牛顿第二定律，即

$$F = ma,$$

a是加速度，得到关系式为

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

或

$$m\frac{dv}{dt} + kv = mg. \qquad (2)$$

满足(2)的函数$v(t)$，就是所求的速度变化规律。

还要注意，这个变化规律还要满足一个特定条件，即"物体由静止自由下落"的，当运动开始时，速度是零，即

当$t = 0$时，$v = 0$。

求满足这个条件的一个确定的变化规律，最后得到的应当是一个确定函数$v(t)$。

从(2)中看到它是未知函数及其导数按照物理中的规律建立起来的关系式，是一个微分方程，这个问题仍是求满足微分方程的未知函数。

在电学中的问题：

例3 $R—L$电路

在闭合电路中，电阻R,电感L是串联的(见图1·2)，R、L是常数，电源供给电动势$E = E(t)$，电路中的电流$i = i(t)$，t是时间，试求电流的变化规律。

解 所求的电流变化规律，就是未知函数$i = i(t)$。

在电学中知道线圈的感应电动势为 $-L\frac{di}{dt}$，故在电路中

总电动势为

$$E-L\frac{di}{dt},$$

又知电流通过电阻时产生的电压降为iR。

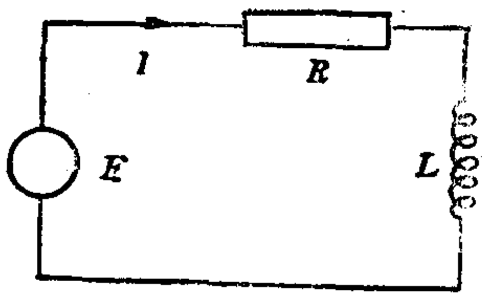

图 1·2

由电学中的规律知道：电路中的总电动势等于整个电路中的电压降。

由此可得

$$E-L\frac{di}{dt}=Ri,$$

或

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E. \tag{3}$$

满足(3)的函数$i(t)$就是所求的电流变化规律。

我们所求的电流变化规律，是一个特定的规律，它要满足以下条件：

当$t=0$时，$i(0)=i_0$（i_0是一个常数）。

在解决电学问题中仍用到微分方程这个数学工具。

在这里我们指出一个重要现象，在例2中解决动力学中的问题得到微分方程为(2)式

$$m\frac{dv}{dt}+kv=mg. \tag{2}$$

在例3中解决电学中的问题得到微分方程为(3)式

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E. \tag{3}$$

(2)、(3)两式中只是字母用的不同，所代表的物理意义不同，但从微分方程的形式看是完全相同的，也就是说，讨论不同的物理现象，可以得到相同的微分方程；反过来，研究一种类型的微分方程可以解决多方面具有同样规律的问题。所以，在微分方程中抽象地讨论某种类型的微分方程是非常必要的，也只有这样，才能更好的解决实际问题。在后面讲到各种类型微分方程的解法时，会更多的看到这种现象。

在化学中的问题：

例4 混合溶液问题：在一容器中(见图1·3)含有盐的溶液，以流速为v_1流入浓度为c_1的盐溶液，经过搅拌后，成均匀的混合溶液，其浓度为c_2，又以v_2的流速流出，设开始时含盐量为x_0，求经过t时后在容器中的含盐量。

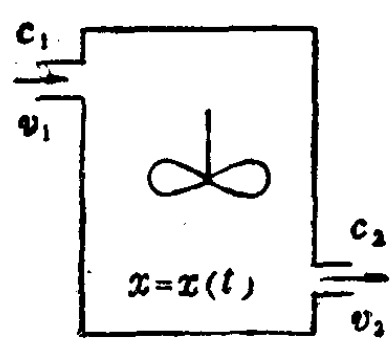

图 1·3

解 所求的含盐量是时间t的未知函数，用$x=x(t)$表示。

在Δt时间内有以下的关系：

流入的盐量为$c_1v_1\Delta t$，

流出的盐量为$c_2v_2\Delta t$，

容器中的盐的增量Δx为

$x(t+\Delta t)-x(t)$。

这里按照化学中的物质守恒定律，即

$$入量-出量=增量。$$

由此得

$$\Delta x=c_1v_1\Delta t-c_2v_2\Delta t,$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=c_1v_1-c_2v_2,$$

当$\Delta t \to 0$时，则得到时间t的变化规律为

$$\frac{dx}{dt}=c_1v_1-c_2v_2. \tag{4}$$

我们所求的变化规律还要满足下列条件：

当$t=0$时　　$x(0)=x_0$。

这个化学问题也要用微分方程解决。

在各种增长和衰减中的问题：

例5　例如某国人口在30年内增长一倍，设人口增长率与人口的数量成正比，问多少年后人口为原人口的三倍。

解　人口的数量是时间t的未知函数，我们用$y=y(t)$表示，用y_0表示原人口数量，从题意知人口增长率与人口数量成正比，由此得

$$\frac{dy}{dt}=ky, \tag{5}$$

k是比例系数。

我们所求的人口数量是满足以下条件的：

当$t=0$时，$y(0)=y_0$，

当$t=30$时，$y(30)=2y_0$。

例如镭的衰减等等，这类增长和衰减问题中，仍是用微分方程解决，可以看到它们也是用同一类型微分方程解决。

再看动力学中的一个问题：

例6　假若在例2的同样条件下，求物体运动的变化规律。

解　物体运动的变化规律是位移与时间的关系，用$s=s(t)$表示。

物体运动仍是受到重力和阻力的影响。

重力为mg，

阻力为$-kv=-k\frac{ds}{dt}$,

由牛顿第二定律有

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\frac{ds}{dt}$$

或

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+k\frac{ds}{dt}=mg. \tag{6}$$

我们所求的运动规律还要满足以下条件:

当$t=0$时, $s(0)=0$, $s'(0)=0$.

在(6)中,我们看到不但出现未知函数的一阶导数,也出现了未知函数的二阶导数,这又是一种不同类型的微分方程.

通过上面的例题,我们看到微分方程的一些背景.当然,我们还可以举出大量的实例,例如在物理、化学、天文、生物、电子技术、自动控制、宇宙飞行等多方面,都存在着大量的微分方程问题.因此,社会生产实践是微分方程取之不尽的基本源泉.微分方程是解决这类问题的一个非常有力的数学工具,这也是微分方程理论联系实际的一个重要方面.

通过上面的例题,我们还可以看到,要想解决实际问题,都要根据所讨论问题本身的规律来进行.如牛顿第二定律、化学中的某些原理等等,然后得到一个微分方程,想要建立微分方程就要熟悉自然科学和工程技术方面的专业知识.

通过上面的例题,我们还可以看到,不同的物理现象可以得到同样类型的微分方程,这个微分方程叫做实际问题的数学模型,实际问题有千千万万,我们不能一个一个地去研究,我们可将它们的微分方程归类,然后对某种类型的微分