数学解题规律与思路分析

山东教育出版社

数学解题规律与思路分析

方　华　编写

山东教育出版社

一九八二年·济南

数学解题规律与思路分析

方 华 编写

*

山东教育出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

☆

787×1092毫米32开本　11.5印张　243千字

1982年2月第1版　1982年2月第1次印刷

印数：1—28,000

书号 7275·6　定价 0.95 元

前 言

我们常常看到，有一些学生虽然做题不少，但一遇到综合性、思考性、实践性较强的题目，就束手无策，展不开思路。问题的关键是他们偏重于数学的具体形式和技巧，忽视研究数学的思维方法和分析方法，未能真正领会和掌握数学基本的理论和活的思维过程。

我们编写本书的目的，就是要切中时弊地紧紧抓住这一核心环节，帮助他们从题海战术中解脱出来，培养他们的逻辑思维能力，发展他们的智力。为此，我们把各类数学问题，按照思路分析的难易程度和方法的差异，分类介绍了基本思路和方法；并作了四种思路分析：基本理论和基本概念的思路分析，分类思路分析，典型解法思路分析和综合类比思路分析。同时，为了进一步培养学生们的空间想象能力和计算能力，我们在每一节中又注意了代数、几何、三角知识的综合运用，介绍了解题规律和解题中应特别注意的关键点。以使本书适合于中学生课外阅读，教师教学参考和学生总复习之用。

限于作者水平，可能有不当之处，热诚欢迎读者批评指正。

方　华

一九八一年十一月

目　录

第一章　不等式的证明与思考能力的培养 ………………………… 1

　第一节　不等式的基本性质和基本概念

　　——思考问题的基础 ………………………………………………… 2

　第二节　不等式的常用证法

　　——八种常用证法的思路分析 …………………………………… 3

　第三节　三个著名不等式

　　——进行思考和灵活运用数学技巧的工具 ……………… 54

　第四节　某些著名不等式的共同来源

　　——基本理论的内在联系和规律 ………………………… 73

　第五节　不等式和极值

　　——理论及应用的思考 …………………………………………… 80

第二章　复数计算与空间想象力 ………………………………… 97

　第一节　复数的几何表示与向量表示

　　——复数的表示与空间想象力 ………………………………… 99

　第二节　复数运算的几何解释

　　——运算与形象思维 ……………………………………………… 112

　第三节　几何图形及其复数关系式

　　——计算能力与空间想象力的结合 ………………………… 124

　第四节　复数的几何、三角应用

　　——“数”与“形”的统一 ……………………………………… 141

第三章　几何证题与逻辑思维能力的培养 …………………… 160

　第一节　关于定值问题的证法

——几何证题中常量的探求 …… 161
第二节　成比例线段证题法
——代数式的变换与几何证题 …… 185
第三节　有关面积问题的证法
——割补法与等积问题应用 …… 205
第四节　反证法与等价命题
——间接证题法思路分析 …… 220
第五节　解析法证题与坐标系的选取
——解析化能力的培养 …… 230
第六节　三角法证题与正余弦定理的应用
——推理论证中的辅助未知量 …… 247
第七节　几何证题中的辅助线
——引入中间辅助量探寻证题思路 …… 258
第四章　数学归纳原理、抽屉原则与逻辑推理能力的培养 …… 267
第一节　归纳法与演绎法
——推理论证的两种基本方法 …… 267
第二节　数学归纳法及其实质
——相邻命题间延续性的论证思路 …… 271
第三节　抽屉原则与反证法思路
——原则和应用的思考 …… 280
第五章　化实际问题为数学模型与解决实际问题能力的培养 …… 291
第一节　数学语言的准确性、严密性和逻辑性
——化普通语言为数学语言能力的培养 …… 293
第二节　实际问题中数量关系的数学表示
——方程和函数理论的应用 …… 307
第三节　生产实践中的最优化问题

——有关极值理论应用的思考 ………… …………………… 322
第四节　事物形态外貌与位置关系的数学描述
——科学抽象能力的培养 ………………………………………… 343

第一章

不等式的证明与思考能力的培养

不等式是许多数学分支的重要基石。我们不但在学习函数的定义域，方程中根的性质等方面，要利用不等式的知识，在高等数学里也将经常用到。如我们知道，极限概念是高等数学最重要的理论基础，而不等式又是极限概念的基础。正如著名数学家闵嗣鹤教授所说："极限概念本身的建立，完全依靠在一组不等式上，在数学分析全部理论建立过程中，不断出现不等式，不断地通过不等式获得最后的等式。必须牢固地掌握不等式的重要性质，并且能灵活运用它，才有条件彻底了解和真正掌握极限的理论和应用。因此，可以说，不等式是数学分析里最深的一块基石，也是极限理论的一块基石。"

正因为不等式在数学中占有如此重要的地位，近几年来，国内外的高考试题和数学竞赛试题，都把不等式作为初等数学的一个极其重要的基础理论来考查。另外不等式的证明，也是锻炼思考能力的重要手段。在中学教育中应对不等式在数学中的地位和作用有足够的重视，那种认为等式是最重要的；完美整齐有趣而又便于理解，而不等式是次要的，累赘而难以理解的错误认识应该纠正。否则将给青年学生今

后的学习造成不必要的困难。

本章在简要介绍不等式的若干重要性质后，将通过对有关不等式典型题目的分析，着重阐述不等式基本理论的内在联系和基本证题思路的归类分析，以锻炼学生的思考力。

第一节　不等式的基本性质和基本概念

——思考问题的基础

基本概念和基本性质，是思考问题的基础，是解决各类不等式问题的依据。因此，必须正确理解和熟练掌握。

这些基本性质是：

1. 如果$a>b$，则$b<a$；反之，如果$b<a$，则$a>b$；
2. 如果$a>b$，$b>c$，则$a>c$；
3. 如果$a>b$，则$a+c>b+c$，这里c为任意实数；
4. 如果$a>b$，$c>0$，则$ac>bc$；如果$a>b$，$c<0$，则$ac<bc$。

根据以上四条基本性质还可以推出以下七条不等式的性质：

1. 如果$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$；
2. 如果$a>b$，$c<d$，则$a-c>b-d$；
3. 如果$a>b$，$c>d$，b、d都是正数，则$ac>bd$；
4. 如果$a>b$，a、b是符号相同的两个数，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；
5. 如果$a>b$，$c<d$，b、c都是正数，则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；
6. 如果$a>b$，a、b都是正数，n是自然数，则$a^n>b^n$；

7. 如果$a>b$，a、b都是正数，n是自然数，则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

绝对值不等式有如下四条基本性质：

1. $|a|+|b|\geqslant|a+b|$；（当a、b同号或b等于零而a是任何数时，两边才相等）

2. $|a|-|b|\leqslant|a-b|$；（当a、b同号或b等于零而a是任何数时，两边才相等）

3. $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$；

4. $\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq0)$.

还必须指出，对于两个任意的复数，（其中至少有一个不是实数）不能规定它们之间谁大谁小，所以不等式只在实数范围内研究。

第二节　不等式的常用证法

——八种常用证法的思路分析

不等式的证明问题，包括两大类：一类是给出两个式子的大小关系，要我们证明这种关系；另一类是要我们判断两个式子的大小关系。不等式的证明，因为没有固定的程序可循，难度较大，故同学们一般感到较为困难。下面我们将通过对一些典型问题的分析，提出一套证题方法和常用技巧，重点放在对八种常用证法的思路分析上，以探求不等式证明的某些规律。

1. **比较法**　要证$a>b$（或$a<b$），只需证$a-b>0$（$a-b<0$），这种方法我们称为比较法。

【问题一】 设A、B、C为三角形的三个内角，x、y、z为任意实数，求证：

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C.$$

思路分析：显然$\cos A$、$\cos B$、$\cos C$，均为实数，且已知x、y、z也为任意实数。我们用比较法，即考查不等式两边之差正负情况的方法来证明。

证明：

左边－右边

$$=x^2+y^2+z^2-2yz\cos A-2zx\cos B-2xy\cos C$$

$$=(x-y\cos C-z\cos B)^2+y^2+z^2-2yz\cos A-y^2\cos^2 C-z^2\cos^2 B-2yz\cos B\cos C$$

$$=(x-y\cos C-z\cos B)^2+y^2(1-\cos^2 C)+z^2(1-\cos^2 B)-2yz[\cos(\pi-B-C)+\cos B\cos C]$$

$$=(x-y\cos C-z\cos B)^2+y^2\sin^2 C+z^2\sin^2 B-2yz\sin B\sin C$$

$$=(x-y\cos C-z\cos B)^2+(y\sin C-z\sin B)^2\geqslant 0.$$

【问题二】 已知a_1，a_2，……，a_k，……，为两两各不相同的正整数，求证对任何正整数n，下列不等式成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

思路分析：仍用考查不等式两边之差的正负情况的思路加以证明，即只须证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant 0 \quad \text{即可。}$$

因为a_1，a_2，……，a_k……，是互不相同的正整数，把它们由小到大排列，则其间第一个数大于或等于1，第二个

数大于或等于 2，……，第k个数大于或等于k，

于是：

$a_1+a_2+\cdots+a_k\geqslant 1+2+\cdots+k,(k=1,2,\cdots,n)$

考查：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_K}{k^2}-\sum\limits_{K=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum\limits_{K=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}$

$$=\frac{a_1-1}{1^2}+\frac{a_2-2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n-n}{n^2}$$

$$\geqslant\frac{a_1-1}{2^2}+\frac{a_2-2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n-n}{n^2}$$

$$=\frac{(a_1+a_2)-(1+2)}{2^2}+\frac{a_3-3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n-n}{n^2}$$

$$\geqslant\frac{(a_1+a_2)-(1+2)}{3^2}+\frac{a_3-3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n-n}{n^2}$$

$$=\frac{(a_1+a_2+a_3)-(1+2+3)}{3^2}+\frac{a_4-4}{4^2}+\cdots+\frac{a_n-n}{n^2}$$

$$\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)-(1+2+3+4)}{4^2}+\frac{a_5-5}{5^2}+\cdots++\frac{a_n-n}{n^2}$$

$$\geqslant\cdots\cdots\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)}{n^2}\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

对任意n都成立。

2.**配方法**　要证一式大于或等于零，可用配方法把它表示成一个或若干个平方之和。

【问题一】试证：对任意θ，均有

$$5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta\geqslant 0.$$

思路分析：用配方法，将左式配方：左边

$$=5+8\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

$$=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta$$

$$=(1+\cos\theta)(4\cos^2\theta+4\cos\theta+1)$$

$$=(1+\cos\theta)(2\cos\theta+1)^2.$$

∵对任意θ，有

$$(1+\cos\theta)\geqslant 0;\ (2\cos\theta+1)^2\geqslant 0.$$

故有：$5+8\cos\theta+4\cos2\theta+\cos3\theta\geqslant 0$.

【问题二】 对每一个正角$\alpha<180°$，有不等式

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{3}\sin3\alpha>0.$$

思路分析：首先把左边化为同角的三角函数表示式，然后再通过三角函数式的变换，进行配方，故可将待证的不等式左边变成：

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{3}\sin3\alpha$$

$$=\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha-\frac{\sin^3\alpha}{3}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{3}(3+3\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$=\frac{\sin\alpha}{3}[(1+\cos\alpha)^2+(1+\cos\alpha)+3\cos^2\alpha).$$

∵ $0<\alpha<180°$,

∴函数$\sin\alpha>0$，$1+\cos\alpha>0$，$\cos^2\alpha>0$.

故最后一式的所有各项都是正的，

原不等式可证.

3.求比法 用考查不等式两边之比的方法证明某些不等

式，我们称为求比法。

【问题】设a、b、c都是正数，试证：

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

思路分析：这个不等式的特点是：不等式的两边都只有一项，且均为某种幂的形式，这些特点比较适合于用考查不等式两边之比的思路来证明不等式。

为此，不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，

则：$\frac{a}{b}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{a}{c}$均不小于1，

$a-b$，$b-c$，$a-c$，均不小于0。

又∵ $$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} = a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}} b^{\frac{b-c}{3}+\frac{b-a}{3}} c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \geqslant 1.$$

故本题可证。

4.**放缩法** 即利用"放大"、"缩小"的观点证明不等式。

【问题一】设x_1，x_2，x_3，x_4均为正数，求证：

$$\frac{(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)(x_3^2+x_3+1)(x_4^2+x_4+1)}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \geqslant 81$$

证明：∵ $$\frac{x_1^2+x_1+1}{x_1} = x_1 + \frac{1}{x_1} + 1$$

$$= (\sqrt{x_1})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2 - 2 + 3$$

$$=\left(\sqrt{x_1}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)^2+3$$

$$\therefore\quad \frac{x_1^2+x_1+1}{x_1}\geqslant 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

同理可证：

$$\frac{x_2^2+x_2+1}{x_2}\geqslant 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$$\frac{x_3^2+x_3+1}{x_3}\geqslant 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

$$\frac{x_4^2+x_4+1}{x_4}\geqslant 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

将这四个不等式两边相乘得：

$$\frac{(x_1{}^2+x_1+1)(x_2{}^2+x_2+1)(x_3{}^2+x_3+1)(x_4{}^2+x_4+1)}{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}$$

$\geqslant 81$.

【问题二】若$a+b+c=1$，且a、b、c均为正数,试 证：$(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$

证明：$\because(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$

同理可证：$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$

$c+a\geqslant 2\sqrt{ac}$

将这三个不等式两边相乘得：

$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$。

又$\because$ $a+b+c=1$，

$a+b=1-c$，$b+c=1-a$，$c+a=1-b$

故有： $(1-a)(1-b)(1-c)\geqslant 8abc$。

【问题三】设$a>1$，n为正整数，试证：

$$n\left(a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}\right)>a^{\frac{1}{n+1}}-1$$

思路分析：这是一个与正整数n有关的不等式，我们采取由n个适当不等式相加的思路，来加以证明，问题是如何寻求这些适当不等式。我们先来考查$a^{\frac{1}{n+1}}$的情况。

$\because a>1$，故必有 $a^{\frac{j}{n+1}}>1$

故必有：$a^{\frac{1}{n+1}}>\left(a^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{j}{n}}$ $(j=1, 2, 3, \cdots\cdots, n-1)$

将这n个不等式相加，得

$$na^{\frac{1}{n+1}}>1+a^{\frac{1}{n(n+1)}}+a^{\frac{2}{n(n+1)}}+\cdots+a^{\frac{n-1}{n(n+1)}}=\frac{(a^{\frac{1}{n+1}}-1)}{a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1}\cdots①$$

$\because a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1>0$，将①式两边同乘以$(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)$得

$na^{\frac{1}{n+1}}(a^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)>a^{\frac{1}{n+1}}-1$。即知原题可证。

综合思路分析：

从以上三个问题的证明过程中看出，都是将不等式两边同乘一个大于0的式子或若干不等式两边相加，得一个新的不等式。实际上新的不等式可以看成是由它的两边"放大"或"缩小"得到的。

为了进一步掌握由"放大"或"缩小"的观点来证明不等式，我们再来分析以下几个问题：

【问题四】 已知a_1，$a_2\cdots\cdots$，a_k，$\cdots\cdots$，为互不相同的正整数，求证：$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$.

我们可用"放大"或"缩小"的观点证明。

证法一：数列a_1，a_2，……，a_n，不一定是按由小到大的顺序排列。设其中a_i和a_j顺序相反，也即 若$i<j$则$a_i>a_j$则：

$$\frac{a_i}{i^2}+\frac{a_j}{j^2}=\frac{a_j}{i^2}+\frac{a_i}{j^2}+\frac{a_i-a_j}{i^2}-\frac{a_i-a_j}{j^2}$$

$$=\frac{a_j}{i^2}+\frac{a_i}{j^2}+(a_i-a_j)\frac{j^2-i^2}{i^2j^2}>\frac{a_j}{i^2}+\frac{a_i}{j^2}.$$

这说明，在原来不等式左边，若把分子顺序相反的两项的分子加以对换，则这两项之和减少，从而使左边的总和减少。这样，我们将a_1，a_2，……a_n中的逆序各数对换，使之得到一个从小到大排列的数列：

a_1'，a_2'，……，a_n'

则有：$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>a_1'+\frac{a_2'}{2^2}+\cdots+\frac{a_n'}{n^2}$.

因为a_1'，a_2'，……，a_n'是互不相同的正整数，故有：

$a_1'\geqslant1$，$a_2'\geqslant2$，……，$a_n'\geqslant n$，

即有：

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}>a_1'+\frac{a_2'}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{a_n'}{n^2}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n},$$

若原a_1，a_2，……，a_n是由小到大排列，且

$a_1=1$，$a_2=2$，……，$a_n=n$，