

中学数学参考读物

北京师范学院附中

党钧 戴汝潜 主编

# 初等代数

习题选

原子能出版社

中学数学参考读物

# 初等代数习题选

北京师范学院附中  
党 钧 戴汝潜 主编

原子能出版社

• 1980 •

## 内 容 简 介

本书是根据教育部制订的《中学数学教学大纲》的内容和要求编写的数学参考读物的初等代数部分。

编者根据自己多年的教学经验，将中学初等代数课程的各部分内容作了简括的总结，系统地编排了各类精选的例题和习题，并作了提示或解答。

本书不同于一般的数学习题选解或高考复习参考资料；着眼于帮助读者掌握基础知识，掌握重点教材，适应统编教材的日常教学需要，力求作为统编教材的必要的补充，以助提高教学质量。

本书可供中学的数学教师和学生使用，也可供社会青年自修时参考。

### 初 等 代 数 习 题 选

北京师范学院附中

党 钧 戴汝潜 主编

原子能出版社出版

(北京 2108 信箱)

北京印刷一厂印刷

(北京市西便门)

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本  $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ ·印张  $11\frac{1}{4}$ ·字数 250 千字

1981 年 1 月第一版·1981 年 1 月第一次印刷

印数 001—350,800·统一书号: 15175·313

定价: 0.94 元

## 编者的话

中学数学参考读物是根据教育部制订的中学数学教学大纲(草案)的内容和要求编写的。这套书由《初等代数习题选》、《初等几何习题选》和《平面三角·平面解析几何习题选》三本组成。

编写《初等代数习题选》的目的是对中学数学统编教材的例题、习题作必要的补充，适用作教师日常教学参考和学生课外自修。本书除有相当数量的、类型齐全的基本练习题外，都有适量的综合性例题和习题，并作了解答或提示；对有些章节我们根据多年的教学经验作了一些简括的总结，并配以精选的例题和习题。但是，我们水平有限，书中不妥之处难免，敬请读者批评指正。

《初等代数习题选》由党钧、戴汝潜主编，邵元铭、田钦、霍恩儒等参加了本书部分章节的编写。在编写过程中得到了我校其他同志的大力帮助，特此致谢。

# 目 录

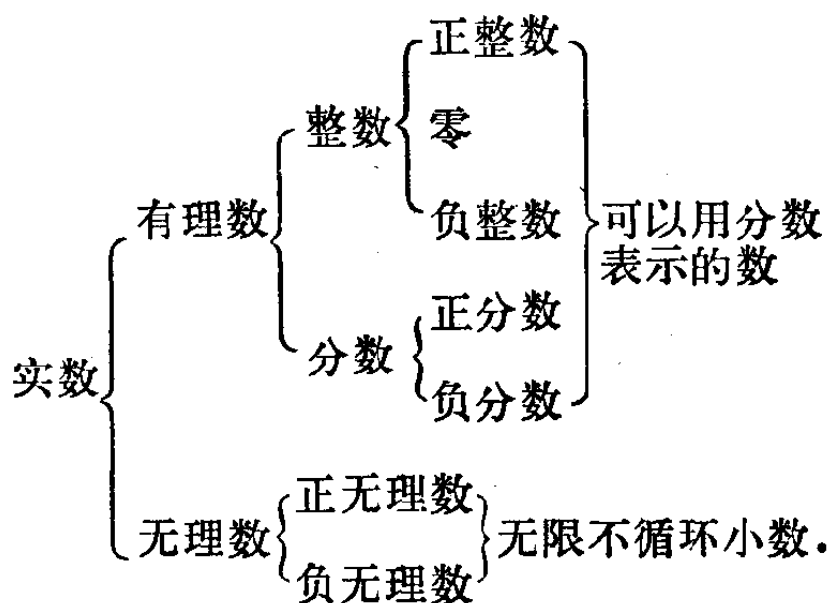
|       |                  |        |
|-------|------------------|--------|
| 第 一 章 | 数、式的基本知识.....    | ( 1 )  |
| 第 二 章 | 方程和不等式.....      | ( 30 ) |
| 第 三 章 | 函数.....          | ( 49 ) |
| 第 四 章 | 数列与极限.....       | ( 69 ) |
| 第 五 章 | 排列、组合及二项式定理..... | ( 87 ) |
| 第 六 章 | 复数.....          | (103)  |
| 第 七 章 | 数学归纳法.....       | (114)  |
| 第 八 章 | 简单的极值问题.....     | (130)  |
| 第 九 章 | 整除.....          | (149)  |
| 第 十 章 | 不等式的证明.....      | (158)  |
| 第十一章  | 列方程解应用题.....     | (169)  |
| 第十二章  | 综合练习题选解.....     | (201)  |

# 第一章 数、式的基本知识

## § 1 实 数

### 1. 基本概念

#### (1) 实数系



数的概念的发展是适应实践的需要的结果，也是克服数的一些运算中出现的矛盾的必然。如：负数的引入来自生产实践，同时又使减法运算能够永远进行下去。

实数集完成了数与数轴上点集的一一对应。

#### (2) 绝对值

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}.$$

实数绝对值的几何意义：在数轴上表示对应于实数的点到原点的距离。

### (3) 算术根

在实数范围内，一个正数的  $n$  次方根中的正值。

$$\text{算术平方根: } \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}.$$

例 在实数范围内，化简  $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{a^2}$ 。

【解】据算术根的定义，

$$\text{原式} = |a-1| + |a| = \begin{cases} 2a-1 & (a \geq 1) \\ 1 & (0 \leq a < 1) \\ 1-2a & (a < 0) \end{cases}.$$

## 2. 实数的运算

由于减法可以转化为加法，除法和乘方运算可以转化为乘法，所以，实数的运算实际上是由加法、乘法和开方（除负数开偶次方外）三种运算组成的。在掌握实数运算法则、运算定律和运算顺序的基础上，要特别注重有理数运算能力的训练，它是实数运算的重点。

例 1. 化简：

$$\frac{0.027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} - 16^{\frac{1}{4}} \times 3^{-2}}{(-1000)^0 - 3^{-1}}$$

$$\text{【解】 原式} = \frac{[(0.3)^3]^{-\frac{1}{3}} - (-2^{-2})^{-2} - (2^4)^{\frac{1}{4}} \times \frac{1}{3^2}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{10}{3} - 16 - \frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} \\
 &= -\frac{58}{3} = -19\frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

例2. 化简:  $\frac{\lg 3 + \lg 2}{\frac{1}{4}\lg 16 + \sqrt{(\lg 1 - \lg 10)^2} + \frac{1}{2}\lg 0.09}$ .

【解】 原式 =  $\frac{\lg 6}{\frac{1}{4}\lg 2^4 + \sqrt{(-1)^2} + \frac{1}{2}\lg (0.3)^2}$

$$= \frac{\lg 6}{\lg 2 + 1 + \lg 3 - \lg 10} = \frac{\lg 6}{\lg 6} = 1.$$

### 基本练习题

1. 解答下列问题:

- (1) 最大的负整数是几? 最大的负数呢?
- (2) 绝对值最小的数是几?
- (3) 互为倒数的两个数能不能互为相反数?
- (4) 如果一个数的相反数比这个数大, 这个数是怎样的数? 比这个数小呢? 与这个数相等呢?
- (5) 一个负数大于另一个负数, 则它们的绝对值谁大谁小? 如果一个数大于另一个数, 则它们的相反数谁大谁小?
- (6)  $a$  是正数还是负数?  $-a$  呢?  $a$  与  $-a$  谁大谁小?
- (7) 若  $|a| = -a$ , 则  $a$  是怎样的数?
- (8) 若  $|a| = |b|$ , 则  $a, b$  是怎样的数?

(9) 何时  $\frac{|a|}{a}$  等于 1, 何时等于 -1?

(10) 何时  $\frac{b}{a}$  大于零? 何时小于零? 何时等于零? 何时无意义?

(11) 两个有理数的和是有理数吗? 两个无理数的和呢?

(12) 等式  $\sqrt{a^2} = a$  是不是恒等式? 为什么?

(13) 怎样用负指数把分数表示为整数形式的数? 反之, 怎样去掉负指数? 怎样用分数指数将无理数(指开方形式)表示为整数形式的数? 反之, 怎样去掉分数指数?

(14) 30 和 45 的公约数有哪些? 其最小公倍数呢?

(15) 欲使五位数 3427  $\Delta$  分别作为 2、3、5、11 的倍数,  $\Delta$  应是哪些数字?

2. 完成下列运算:

(1) 分别写出  $-1$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $0$ 、 $-3\frac{2}{3}$ 、 $1$ 、 $0.3$ 、 $0.\dot{3}$  和  $\sqrt{2}-$

$\sqrt{3}$  等数的相反数、倒数和绝对值;

(2) 求出分别符合下列条件的  $x$ ;

①  $|x| < 5$  的所有整数之和与积;

②  $2 < |x| < 5$  的所有整数之和与积.

(3) 试求  $\frac{1}{\sqrt{11+4\sqrt{7}}}$  精确到 0.001 的近似值;

(4) 化  $0.3264$ 、 $-0.\dot{2}\dot{4}$ 、 $-1.3\dot{1}0\dot{2}$  为分数;

(5) 不查表求: ①  $\sqrt{32041}$ ; ②  $\sqrt{0.5776}$ ;

③  $\sqrt{322.5616}$ ; ④  $\sqrt{5}$  (精确到 0.001);

⑤  $\sqrt{144.7}$  (精确到 0.01).

(6) 以科学计数法表示下列各数:

- ① 4076;                      ② 0.5381;  
③ 32400000000000000;    ④ 0.0000000007010.

3. 在数轴上表示下列各数:

- (1) 绝对值等于 4 的数;  
(2)  $|-3|$  的相反数;  
(3)  $-\frac{1}{5}$  的倒数的相反数;

(4)  $-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ ;

(5)  $(-1)^n$ ;

(6)  $8^{\frac{2}{3}}$ ;

(7) 零的相反数;

(8) 绝对值不大于 2 的整数;

(9)  $\sqrt{a^2}=5$  的数;

(10) 与 -3 的倒数之和为零的数。

4. 计算下列各题:

$$(1) -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \div \left[ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(1\frac{1}{2}\right)^2 \right] \times \left| \frac{-1}{2} \right| - \frac{1}{2};$$

$$(2) (-2)^4 \div \left(-2\frac{2}{3}\right)^2 + 5\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{6}\right) - 0.5^2;$$

$$(3) |5-7| - (|5| + |-5|) + |(-4) - (+4)| - |3 - |-5||;$$

$$(4) \frac{3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1\frac{1}{2} - 4 \times \left(1\frac{1}{2}\right)^2}{2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 1};$$

$$(5) \left\{ 2\frac{3}{16} - \left[ 4 - \left( 2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5} \right) \times 3.5 \right] \div 0.16 \right\} \\ \times \left( 2\frac{23}{84} - 1\frac{49}{60} \right).$$

5. 求下列各幂的值:

$$(1) \left( 3\frac{1}{8} \right)^{\frac{3}{2}}; (2) 81^{\frac{3}{4}}; (3) (-27)^{\frac{2}{3}}; (4) 8^{-\frac{5}{2}};$$

$$(5) \left( -\frac{1}{6} \right)^{-2}; (6) 256^{0.75}; (7) (0.216)^{-\frac{1}{3}};$$

$$(8) \left( \frac{64}{125} \right)^{-\frac{1}{3}}; (9) (-5.25)^0; (10) (4^{-3\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{7}};$$

$$(11) 81^{-0.75}; (12) \left( 2\frac{10}{27} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

6. 求下列对数的值:

$$(1) \log_2 \frac{1}{64}; (2) \log_{\frac{3}{2}} \frac{8}{27}; (3) \log_4 2; (4) \log_8 16;$$

$$(5) \log_{\sqrt{2}} 8; (6) \log_5 625; (7) \log_{10} 0.001; (8) \log_{\frac{1}{3}} 81;$$

$$(9) \log_{729} 3; (10) \log_{1024} 2; (11) \lg 10^n; (12) \lg 10^{-n}.$$

7. 求下列各值:

$$(1) 3^{2\log_3 \sqrt{5}}; (2) 8^{2+\log_2 7}; (3) 3^{1-\log_3 4}; (4) 100^{\frac{1}{3}\lg 3};$$

$$(5) 27^{1+\log_3 2}; (6) 100^{0.5+\lg \sqrt{3}}; (7) 5^{1-\log_5 5};$$

$$(8) 10^{1-\lg 1\frac{2}{3}}; (9) 10^{2\lg 3}; (10) 2^{\frac{1}{2}\log_2 3}; (11) 5^{-\frac{1}{2}\log_5 9};$$

$$(12) \log_{6\sqrt{17}} \sqrt{17}.$$

8. 求下列各式中的  $x$ :

$$(1) \log_x 27 = \frac{3}{2}; (2) \log_7 x = 1; (3) \log_{11} x = 0;$$

$$(4) \log_3 \sqrt[3]{3} = x; (5) \log_{\pi} x = \pi; (6) 5^x = \frac{1}{5^3 \sqrt[3]{5}};$$

$$(7) x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}; (8) 2^x = 0.125; (9) \log_5 625 = x;$$

$$(10) \log_{16} \frac{1}{2} = x; (11) 4 \log_{16} x = \sqrt{7};$$

$$(12) \log_{\sqrt{3}} x = -\frac{2}{3}.$$

9. 计算下列各题:

$$(1) \left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} + (-1)^{-4} - (2^{-2} + 4^{-2})^{\frac{1}{2}} \\ \times (-2)^0;$$

$$(2) \left[\frac{1}{4}(0.027^{\frac{2}{3}} + 15 \times 0.0016^{\frac{3}{4}} + 1)\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$(3) (0.0081)^{-\frac{1}{4}} - \left[\left(\frac{7}{8}\right)^{-2.6}\right]^0 + ({}^3\sqrt{2})^{-16} \times \\ (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}} + 16^{-0.75};$$

$$(4) {}^3\sqrt{{}^3\sqrt{5^9} \times {}^3\sqrt{5^{-3}}} \div \sqrt{5^{-\frac{7}{3}} \times {}^3\sqrt{5^{13}}};$$

$$(5) 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}};$$

$$(6) [9^{-\frac{1}{4}} + (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}] \times [9^{-\frac{1}{4}} - (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}];$$

$$(7) 0.25 \times (-2)^2 - 4 \div (\sqrt{5} - 1)^0 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}};$$

$$(8) \left(\frac{1}{300}\right)^{-\frac{1}{2}} + 10 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}} - 10 \times (2 -$$

$$\sqrt[3]{3})^{-1};$$

$$(9) (\sqrt[3]{9} - 7\sqrt[3]{72} + 6\sqrt[3]{1125}) \times 4\sqrt[3]{\frac{1}{9}};$$

$$(10) \left[ 0.027^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{0.75} - 3^{-1} + (5.5)^0 \right] \times \left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

10. 计算下列各题:

$$(1) \log_5 \log_4 \log_3 81;$$

$$(2) \log_5 120 - 5^{\log_5 2} - 2\log_5 (1 - 5^{-2}) + \log_5 (0.2 - 5^{-3});$$

$$(3) \lg \frac{300}{7} + \lg \frac{700}{3} + \lg 1;$$

$$(4) \frac{1}{2} \lg 20449 + \lg \frac{4}{7} - \lg \frac{13}{35} + \lg \frac{5}{11};$$

$$(5) (\lg 5)^2 - \lg 2 \times \lg 50;$$

$$(6) \frac{\lg 4 + \lg 5 - 1}{\lg 0.5 + \lg 8};$$

$$(7) \frac{2 \lg 2 + \lg 3}{1 + \frac{1}{2} \lg 0.36 + \frac{1}{3} \lg 8};$$

$$(8) \frac{\lg \sqrt{27} + \lg 8 - \lg \sqrt{1000}}{\lg 1.2};$$

$$(9) \log_{36} 6 - \log_6 36 + \log_6 \frac{1}{36} - \log_{35} \frac{1}{6};$$

$$(10) (\log_4 3 + \log_8 3) \times (\log_3 2 + \log_9 2).$$

11. 求值:

$$(1) \text{已知: } \lg 16 = a, \text{ 求 } \lg 8;$$

(2) 已知:  $\lg 25 = b$ , 求  $\lg 2$ ;

(3) 已知:  $\log_{12} 3 = a$ , 求  $\log_{\sqrt{3}} 8$ ;

(4) 已知:  $\lg 3 = a$ ,  $\lg 2 = b$ , 求  $\log_5 6$ ;

(5) 已知:  $\log_3 5 = m$ , 求  $\log_{3\sqrt{5}} 9$ ;

(6) 已知:  $\log_5 3 = a$ ,  $\log_5 4 = b$ , 求  $\log_{25} 12$ ;

(7) 已知:  $\log_7 3 = a$ ,  $\log_7 4 = b$ , 求  $\log_{49} 12$ ;

(8) 已知:  $\log_{12} 7 = m$ ,  $\log_{12} 3 = n$ , 求  $\log_{28} 63$ .

12. 已知:  $\lg 2 = 0.3010$ ,  $\lg 3 = 0.4771$ , 试确定  $\left(\frac{81}{80}\right)^{1000}$

与 100000 的大小.

13. 已知:  $\lg 2 = 0.3010$ , 试判定  $2^7 \times 8^{11} \times 5^{10}$  是几位数.

14. 已知:  $\lg 5 = 0.6990$ , 试求  $4^{50}$  是几位数.

15. 已知:  $\lg 2 = 0.3010$ , 试判断  $\lg x = -69.6990$  中真数  $x$  的第一个不是零的数字前面有几个零 (包括个位数字上的零).

16. 已知:  $\lg 3 = 0.4771$ , 且  $3^{n-1} < 1000000 < 3^n$ , 求正整数  $n$  的值.

17. 已知:  $\lg 29 = 1.462$ , 求 2.9, 0.029, 2900,  $29 \times 10^{10}$  的对数.

18. 已知:  $\lg 2 = 0.3010$ , 试求  $\lg_{25} 200$  之值.

19. 试证:  $\log_3 \sqrt[3]{81 \times \sqrt[4]{729 \times 9^{-\frac{2}{3}}}} = \frac{31}{18}$ .

20. 试证:  $\log_8 (\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}) = \frac{1}{6}$ .

21. 试证: 当  $\log_2 3 = a$ ,  $\log_3 11 = b$  时,

$$\log_{66} 44 = \frac{2+ab}{1+a+ab}.$$

22. 试证:  $\frac{1}{\log_5 19} + \frac{2}{\log_3 19} + \frac{3}{\log_2 19} < 2.$

23. 试证:  $(\log_4 3 + \log_8 3) \times (\log_3 2 + \log_9 2) = \frac{5}{4}.$

24. 某化肥厂 1977 年化肥的生产量为 5400 吨, 经调整后计划以后每年增产 15%, 问该厂 1985 年化肥的产量是多少?

25. 一种产品, 原来成本是 350 元, 五年后预计成本降为 315 元, 试求年平均降价率(精确到 0.01).

## § 2 代 数 式

### 1. 代数式

$$\text{代数式} \begin{cases} \text{有理式} \\ \text{无理式(根式)} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{整式} \\ \text{分式} \end{cases} \begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases}$$

**注意:** 用字母表示数的意义甚大, 必须加强训练; 特别要注意变数字母的允许取值的范围。

### 2. 整式

(1) 整式的加减法与合并同类项(注意符号法则)

**例 1.** 用代数式表示  $a$  与  $b$  的平方差减去  $a$  与  $b$  差的平方, 并求出  $a = -2$ ,  $b = -3$  时代数式之值。

**【解】** 依题意所求的代数式  $f(a, b) = (a^2 - b^2) - (a - b)^2$ , 当  $a = -2$ ,  $b = -3$  时,

$$f(-2, -3) = [(-2)^2 - (-3)^2] - [(-2) - (-3)]^2 =$$

$$=4-9-1=-6.$$

例 2. 求  $a=-\frac{1}{2}$ 、 $b=1979$  时, 代数式

$$2\frac{7}{31}(a^2+b) - 9\frac{1}{29}(a-b) - 10\frac{7}{31}(a^2+b) + \\ + \frac{30}{29}(a-b) \text{ 的值.}$$

【解】 原式  $= \left(2\frac{7}{31} - 10\frac{7}{31}\right)(a^2+b) -$   
 $\left(9\frac{1}{29} - 1\frac{1}{29}\right)(a-b)$   
 $= -8(a^2+b) - 8(a-b) = -8(a^2+a)$   
 $= -8\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2.$

注: 求代数式的值时一般要先将代数式化简, 最后再代入求值较为简便。

## (2) 整式乘法与基本乘法公式

整式乘法建立在乘法对加法的分配律上。

基本乘法公式:

$$1) (a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$

$$2) (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$3) (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$4) (a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3;$$

$$5) (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

例 1. 计算  $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)(x^6-1).$

【解】 原式  $= (x^2-1)(x^4+x^2+1)(x^6-1)$   
 $= (x^6-1)(x^6-1) = x^{12}-2x^6+1.$

例 2. 计算  $(-x-y-z)(x+y-z).$

【解】 原式  $= -(x+y+z)(x+y-z)$

$$\begin{aligned}
 &= -[(x+y)+z][(x+y)-z] \\
 &= -[(x+y)^2 - z^2] \\
 &= -(x^2 + 2xy + y^2 - z^2) \\
 &= z^2 - x^2 - 2xy - y^2.
 \end{aligned}$$

### (3) 整式除法

多项式  $f(x)$  除以  $(x-a)$ , 商式为  $Q(x)$ , 余数为  $r$ , 则多项式可表示为:  $f(x) = (x-a)Q(x) + r$ .

余数定理: 多项式  $f(x)$  除以  $(x-a)$ , 则余数为  $r = f(a)$ .

推论: 多项式  $f(x)$  被  $(x-a)$  整除的充分必要条件是  $f(a) = 0$ . 即  $f(x) = (x-a)Q(x)$  成立.

**例 1.** 证明多项式  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 6$  可以被  $(x-2)$  整除.

**【证明 1】** 据余数定理, 当  $x=2$  时, 有

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \times 2 - 6 = 0,$$

$\therefore f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 6$  可被  $(x-2)$  整除.

**【证明 2】** 据综合除法有

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & -3 & -6 & 2 \\
 & 2 & 6 & 6 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 3 & 0=r
 \end{array}$$

$\therefore r=0$ , 故  $f(x) = (x-2)(x^2 + 3x + 3)$  可被  $(x-2)$  整除.

**例 2.** 设  $f(x) = x^3 + 2x^2 - m$  可被  $(x+3)$  整除, 试求  $m$  的值.

**【解 1】** 据余数定理, 可知

$$f(-3) = (-3)^3 + 2 \times (-3)^2 - m = 0, \therefore m = -9.$$

**【解 2】** 据综合除法, 有