# 绝对值

〔苏〕И.И.盖杜科夫 著
刘培娜 门树蕙 编译
杨大淳 审校

测绘出版社

# 绝对值

〔苏〕И.И.盖杜科夫 著
刘培娜 门树蕙 编译
杨大淳 审校



测绘出版社

绝 对 值

〔苏〕И.И.盖杜科夫著

刘培娜 门树蕙 编译

杨大淳 审校

测绘出版社出版

朝阳区展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本787×1092 1/32·印张 5.625·字数130千字

1983年1月第一版·1983年1月第一次印刷

印数1—12,800 册·定价 0.52 元

统一书号：13039·新285

科目：45—206

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了有关绝对值的知识。包括：绝对值的概念、运算法则、含有绝对值符号的函数图象、含有绝对值符号的方程(组)和不等式(组)的解法(在实数集和复数集)以及绝对值的应用和应用绝对值时常见错误的分析。各节都配有练习，书末附有答案。

本书内容丰富、论述严谨、深入浅出、通俗易懂，可供中学生、大学低年级学生及具有中学文化水平的青年阅读，也可供中学数学教师参考和数学课外小组选用。

# 前　言

数与式的绝对值的概念是数学中一个重要概念，它有着广泛的应用。

中学以及其它中等学校的数学课程中，在相反数和绝对值概念的基础上，引出了有理数的大小比较，建立了有理数的运算法则；在研究算术根的性质时，绝对值的概念有了新的应用，例如$\sqrt{a^2}=|a|$，$\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$（这里$ab\geqslant 0$）等等；在研究有理数指数幂中讨论$n$次方根性质时，也应用了绝对值的概念；在函数的定义域、函数的有界性、函数的图象以及方程、方程组和不等式中，也经常运用绝对值的概念和运算；在高年级，有关复数的模（复数的绝对值）、解析几何中点到直线的距离等也都运用了绝对值的概念。

在高等数学、物理以及技术科学领域中，绝对值概念也有着广泛的应用。例如，在数学分析中，导数与微分是以极限为基础的，而极限的定义是以绝对值的形式出现的；近似数的绝对误差也要用绝对值的概念来定义；在力学中，向量的概念和重要性质也是用绝对值表示的。

在中学数学中，绝对值概念也是一个重要的概念，为了帮助学生理解和掌握有关绝对值的知识，根据我们的教育实践，我们编译了这本小册子。本书仅就在中学数学中出现的绝对值概念和运算作了介绍，并介绍了绝对值的应用及应用绝对值时常见错误的分析。书中每节都配有一定数量的例题、练习，并附有答案。在编译过程中，我们主要参照了苏联И·И·盖杜科夫(И·И·Гайдуков)所著《绝对值》一书。

本书可供中学生、大学低年级学生以及具有相应文化水平的青年阅读，也可供中学数学教师参考和数学课外小组选用。

北京教育学院杨大淳副教授在百忙中审阅了这本小册子，这里谨表谢意。

限于我们的水平，编译的内容可能有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编译者　　1982年4月于北京

# 目　录

# 一　绝对值的概念和几何意义

## 1　实数的绝对值

**定义 1**　正数的绝对值是这个正数本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零.

数 $a$ 的绝对值通常表示为：

$$|a|$$

读作“数 $a$ 的绝对值”或者“数 $a$ 的模”.

从绝对值的定义可以得出：

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{假如}\ a>0, \\ 0, & \text{假如}\ a=0, \\ -a, & \text{假如}\ a<0. \end{cases}$$

有时还用以下两种方法表示一个数的绝对值：

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{假如}\ a\geqslant 0, \\ -a, & \text{假如}\ a<0. \end{cases}$$

或

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{假如}\ a\geqslant 0, \\ -a, & \text{假如}\ a\leqslant 0. \end{cases}$$

**定理 1**　相反数有相等的绝对值，也就是 $|a|=|-a|$.

证明：显然，根据绝对值的定义有：

$$|-a|=\begin{cases} -a, & \text{假如}\ -a>0,\ \text{也就是}\ a<0, \\ 0, & \text{假如}\ -a=0,\ \text{也就是}\ a=0, \\ -(-a), & \text{假如}\ -a<0,\ \text{也就是}\ a>0, \end{cases}$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}-a, & \text{假如 } a<0, \\ 0, & \text{假如 } a=0, \\ a, & \text{假如 } a>0,\end{array}\right\}=|a|.$$

**定理2**　若$|x|\leqslant a(a>0)$，则$-a\leqslant x\leqslant a$.

证明：根据绝对值的定义，

当$x\geqslant 0$时，$|x|=x$，

此时$|x|\leqslant a$，即$0\leqslant x\leqslant a$.

当$x<0$时，$|x|=-x\leqslant a$，即$-a\leqslant x<0$.

因此有
$$-a\leqslant x\leqslant a.$$

**定理3**　若$|x|\geqslant a(a>0)$，则$x\geqslant a$，$x\leqslant -a$.

证明：根据绝对值的定义，

当$x\geqslant 0$时，$|x|=x$，

此时$|x|\geqslant a$，即$x\geqslant a$.

当$x<0$时，$|x|=-x\geqslant a$，即$x\leqslant -a$.

因此有$x\geqslant a$和$x\leqslant -a$.

【例1】　计算下列各值：$|8|$；$|2-\sqrt{2}|$；$|-8|$；$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$；$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

解：(1)$|8|=8$；

(2)$|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}$；

(3)因为$-(-8)=8$，所以$|-8|=8$；

(4)因为$-(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

所以$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

(5)$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$.

【例2】　若$|x|<4.3$，且$x$为非负整数，求$x$的值.

解：$x$的值为0，1，2，3，4.

【例3】　求绝对值不大于3的正、负整数值.

解：绝对值不大于3的正、负整数为$\pm 3$，$\pm 2$，$\pm 1$.

【例4】　求绝对值大于6.9，并小于10的整数值，指出

其中哪些是偶数、奇数、自然数、质数、合数.

解：绝对值大于6.9并小于10的整数有$\pm 7$，$\pm 8$，$\pm 9$.

其中8是偶数；7、9是奇数；7、8、9是自然数；7是质数；8、9是合数.

【例5】 $a$是什么数时，下列各式成立：

(1) $|a| = |-a|$；

(2) $|a| = -a$；

(3) $|a| = a$；

(4) $\frac{|a|}{a} = 1$；

(5) $\frac{|a|}{a} = -1$.

解：(1) $a$为任意实数；

(2) $a \leqslant 0$；

(3) $a \geqslant 0$；

(4) $a$为正数；

(5) $a$为负数.

【例6】 写出负数$a$和它的相反数的差的绝对值，并把它化简.

解：$|a-(-a)| = |a+a| = -2a$.

【例7】 比较下列各组数的大小：

(1) $|-7|$，$|-2|$；

(2) $-|-7|$，$|-2|$；

(3) $0$，$|-2|$.

解：(1) $|-2| < |-7|$；

(2) $-|-7| < |-2|$；

(3) $0 < |-2|$.

【例8】 计算$|2a-3|$.

解： $|2a-3|=\begin{cases}2a-3, & 当\ 2a-3>0;\\ 0, & 当\ 2a-3=0;\\ -(2a-3), & 当\ 2a-3<0.\end{cases}$

$$=\begin{cases}2a-3, & 当\ a>\frac{3}{2};\\ 0, & 当\ a=\frac{3}{2};\\ 3-2a, & 当\ a<\frac{3}{2}.\end{cases}$$

【例9】 计算 $1-\frac{a}{|a|}$.

解：$1-\frac{a}{|a|}=\begin{cases}0, & 当\ a>0;\\ 2, & 当\ a<0.\end{cases}$

【例10】 计算 $|-9.5|+|+0.5|+|-2\frac{5}{6}|+|-1|$.

解：$|-9.5|+|+0.5|+|-2\frac{5}{6}|+|-1|$

$=9.5+0.5+2\frac{5}{6}+1$

$=13\frac{5}{6}$.

【例11】 若 $a$ 是负数，求 $\frac{|a|+a}{|a|+1}-\frac{|a|}{a}$ 的值.

解：当 $a$ 为负数时，

$\frac{|a|+a}{|a|+1}-\frac{|a|}{a}$

$=0+1$

$=1$.

【例12】 化简：

（1）已知 $-5<x<0$，求 $|-2x|-|x+5|$；

（2）$x-y-|x-y|$.

解：（1） $|-2x|-|x+5|$

$=-2x-(x+5)$

$=-2x-x-5$

$=-3x-5$.

（2） $x-y-|x-y|$.

当 $x>y$ 时，

$x-y-|x-y|$

$=x-y-(x-y)$

$=0$；

当 $x=y$ 时，

$x-y-|x-y|$

$=x-y-(x-y)$

$=0$；

当 $x<y$ 时，

$x-y-|x-y|$

$=x-y-y+x$

$=2x-2y$.

## 2 绝对值 $|a|$ 的几何意义

显然，每一个实数都与数轴上的一个点相对应，这个点表示了已知实数的几何意义。数轴上的每个点都对应着一个从原点算起的距离（或线段的长），这线段的起点是原点，而终点是已知点，线段的长度是非负数。

另外，已知长度和方向的线段叫做有向线段，数轴上的

每一个点都与数轴上的一个有向线段相对应.

实数集与有原点、长度单位和确定的正方向的有向直线上的点集一一对应.

可以认为，实数的几何意义就是以原点为起点，以已知数所对应的点为终点的向量.

这个向量的长度，就是已知实数的绝对值的几何意义.

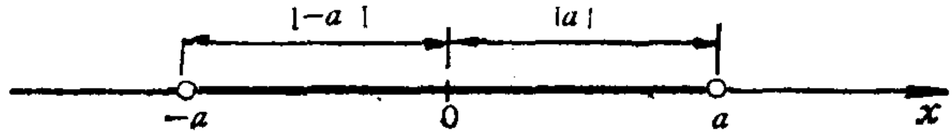


图 1

$|a|$的直观的几何意义见图1，它证实了$|a|=|-a|$.

由此容易看出，$|\sqrt{5}-\sqrt{2}|=|\sqrt{2}-\sqrt{5}|$；$|x-a|=|a-x|$等等.

根据$|a|$的几何意义，可知假如$|a|=5$，那么$a_1=5$和$a_2=-5$，或者$a=\pm5$. 因而，有两个数满足这个等式，这两个数对应着数轴上的两个点，如图2（1）所示.

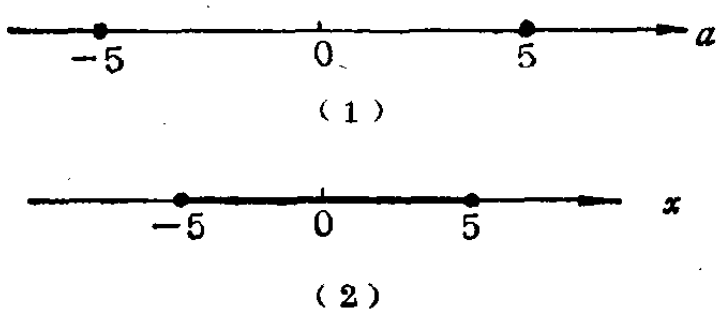


图 2

若$|x|=a$，则必须$a\geqslant0$，这里$x_1=a$，$x_2=-a$.

若$|x|=|a|$，则有$x_1=a$，$x_2=-a$.

【例1】 若$|x|\leqslant5$，求$x$的值并作出相应的图形.

解：根据定理2，若$|x|\leqslant5$，则有$-5\leqslant x\leqslant5$，如图2（2）所示，区间$[-5,5]$中的数满足这个不等式，相应的图

形表示为数轴上区间$[-5, 5]$内点的集合.

【例2】 若$|a|>10$，求$a$的值并作出相应的图形.

解：根据定理3，若$|a|>10$，则有$a>10$和$a<-10$.

因而，在区间$(-\infty, -10)$和$(10, \infty)$里的数都满足已知的不等式，在数轴上相应的两个区间如图3所示.

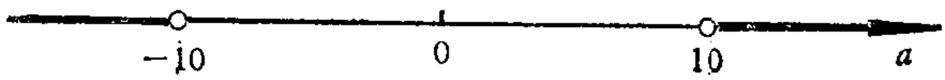


图 3

【例3】 $A$和$B$是数轴上的两个点，已知这两个点间的距离是8个单位，点$A$表示的数与点$B$表示的数的和是$-2.6$，分别求出$A$、$B$所表示的数.

解：$\because |OA-OB|=8$,

$$OA+OB=-2.6,$$

由此可见$OA$、$OB$所表示的数中负数的绝对值大，假定这个数是$A$点表示的数.于是

$$|OA|-|OB|=2.6.$$

如图4所示，$OB=\dfrac{8-2.6}{2}=2.7$

$$OA=-2.7-2.6=-5.3.$$

所以点$A$、$B$所表示的数分别为$-5.3$和$2.7$.

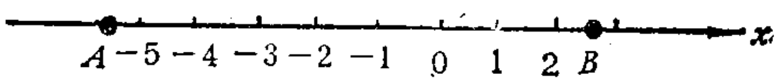


图 4

## 练　习

求下列各题中$x$的值，并作出相应的图形.

1. $|x-3|=2$.

2. $|x-1|<3$.

3. $|x+2|\leqslant 5$.

4. $|x-2|\geqslant 4$.

5. $|3-x|>1$.

6. $|x-2|<0.001$.

7. $|2x-3|\leqslant 7$.

## 3 复数的绝对值(模)

**定义 2** $a^2+b^2$的非负平方根叫做复数$Z=a+bi$的绝对值(模)，也就是

$$|Z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

从这个定义可以看出，已知复数所表示的点和一个向量相对应，复数的绝对值或模表示这个向量的长度.

如图5，点$M(a, b)$表示数$Z=a+bi$，而$r=|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$就是$|Z|$的几何意义.

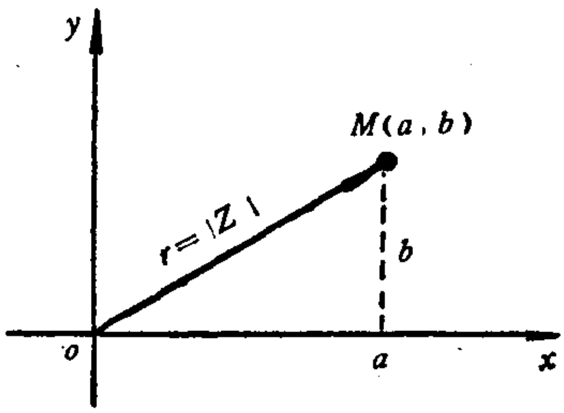

图 5

若$b=0$，则$Z=a$，$|Z|=|a|$.

因此，复数的绝对值的概念不同于以前所研究过的实数的绝对值的概念，而是它的发展和推广.

【例1】 已知$Z=3+4i$，求$|Z|$.

解：$|Z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

【例2】 已知$Z=3i$，求$|Z|$.

解：$|Z|=\sqrt{0^2+3^2}=3$.

【例 3】 求$|\pm5\pm12i|$.

解：$|\pm5\pm12i|=\sqrt{(\pm5)^2+(\pm12)^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

从例 3 可以看出，复数$5\pm12i$和复数$-5\pm12i$有相等的模.共轭复数也有相等的模.

如图 6 中，$r=r_1$，$r=r_2$

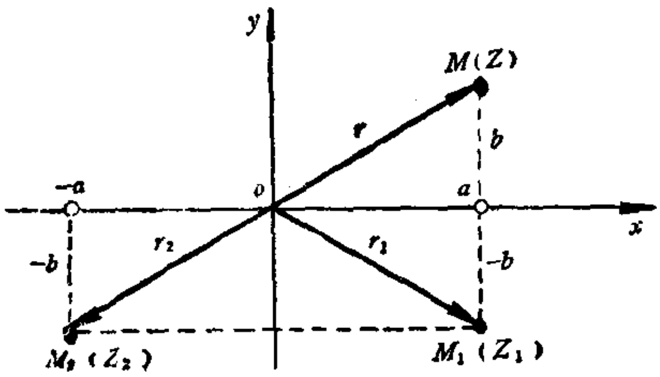


图 6

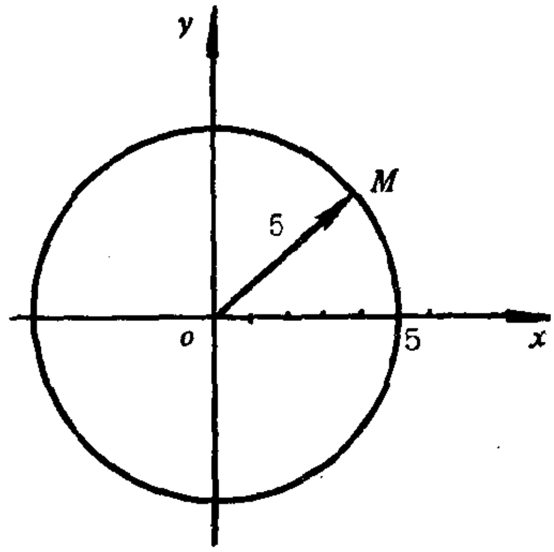


图 7

【例 4】 若$|Z|=5$，求出满足这个方程的复数$Z$的图形.

解：若$|Z|=5$，则模为 5 的所有复数都满足这个等式，这些复数所对应的平面上的点，都应与坐标原点等距离，都等于 5，所以这个等式表示中心在坐标原点，半径等于 5 的圆的方程，复数$Z$的轨迹为一圆，如图 7 所示.

【例 5】 如果$|Z|<3$(或$|Z|\leqslant3$)，画出满足这个不等式的复数$Z$的图形.

解：若$|Z|<3$，则满足这个不等式的复数$Z$的集合，应与以原点为中心，半径等于 3 的圆的内部的点相对应，如图 8 所示.

若$|Z|\leqslant3$，则满足这个不等式的复数$Z$的集合，应与以