运筹学简明教程

运筹学简明教程

魏权龄　胡显佑　黄志民　编著

中国人民大学出版社

运筹学简明教程

魏权龄　胡显佑　黄志民　编著

•

中国人民大学出版社出版发行
（北京西郊海淀路39号）
中国人民大学出版社印刷厂印刷
（北京鼓楼西大石桥胡同61号）
新华书店经销

•

开本：850×1168毫米32开　印张：7.5　插页2
1987年6月第1版　1987年6月第1次印刷
字数：184,000　册数：1—15,000

•

ISBN 7-300-00043-6/F·14
书号：13011·34　　定价：1.70元

内 容 简 介

本书是一本关于运筹学的简明教程，主要讲述运筹学的基本内容及思想，包括线性规划、整数线性规划、非线性规划、多目标规划、动态规划、存贮论、决策论、对策论以及统筹方法等。

阅读本书全部内容，需要具有初等微积分、线性代数初步及最简单的概率论知识。对于那些具有高中毕业水平的读者，也可以看懂本书的大部分章节。本书可作为工科院校及财经院校大专班、函授大学、电视大学、职工夜大、厂长经理企业管理班等的运筹学教材。讲授全书内容需要64学时；讲授本书最基本内容（低标准）只需40学时。

编 者 的 话

运筹学在我国已有三十年的历史。近几年的管理实践表明，运筹学是实现管理现代化的有力工具。为了适应实现四个现代化的新形势，许多高等院校相继建立了工业经济、工商管理、系统工程、管理工程、统计运筹、经济数学等系或专业，运筹学已成为这些系或专业的重要课程之一。与此同时，运筹学的普及教育已受到各界的高度重视。我们深深感到需要有一本运筹学的简明教材，供工科院校及财经院校管理专业大专班、函授大学、电视大学、职工夜大、厂长班、经理班等使用。作为尝试，我们编写了这一简明教程，试图扼要介绍运筹学的一些基本内容及方法。

考虑到读者的数学水平，本书力求深入浅出，通俗易懂。着重于模型建立，尽量避开数学上的严格推导；阐述方法上，着重于思路分析和几何直观。阅读本书全部内容所需的数学基础是：初等微积分、线性代数初步及最简单的概率论知识（本书回避了运用概率论与数理统计知识较多的运筹学有关分支，例如：排队论、模拟、质量控制、可靠性等）。因此，本书对于具有高中毕业水平的读者，也可作为学习运筹学的参考教材。

讲述本书全部内容的学时安排如下（共计64学时）：

第一章	绪论	2学时
第二章	线性规划	12学时
第三章	整数线性规划*	6学时
第四章	非线性规划*	6学时
第五章	多目标规划*	6学时

第六章　动态规划　　8学时
第七章　存贮论　　6学时
第八章　决策论　　6学时
第九章　矩阵对策　　6学时
第十章　统筹方法*　　6学时

如果希望讲授学时再少些，我们建议删去带“*”的章节，这样总学时数为40学时。

鉴于我们水平有限，编写时间仓促，书中不足乃至错误之处在所难免，恳切希望读者指正。

本书在编写过程中，赵进钢同志提出了很多宝贵的修改意见，我们在此表示感谢。

1985年9月

目　录

第一章　绪论……………………………………………………1
§1.1　运筹学的历史 ……………………………………………1
§1.2　运筹学的分支 ……………………………………………2
第二章　线性规划……………………………………………………7
§2.1　线性规划问题的一般形式 ………………………………7
§2.2　两个变量的线性规划问题的图解法 ……………………10
§2.3　线性规划问题的标准形式 ………………………………14
§2.4　单纯形方法 ………………………………………………16
§2.5　矩阵形式 …………………………………………………28
§2.6　运输问题的解法 …………………………………………33
§2.7　线性规划应用举例 ………………………………………42
习　题 ……………………………………………………………47
第三章　整数线性规划………………………………………………51
§3.1　整数线性规划的例子 ……………………………………51
§3.2　全整数线性规划问题的解法 ……………………………55
§3.3　0－1规划的解法…………………………………………62
习　题 ……………………………………………………………67
第四章　非线性规划…………………………………………………69
§4.1　非线性规划的例子 ………………………………………69
§4.2　两个变量的非线性规划的几何意义及图解法 …………74
§4.3　函数的梯度及最速下降法 ………………………………79
§4.4　罚函数方法 ………………………………………………85
习　题 ……………………………………………………………94

第五章 多目标规划……96
§5.1 多目标规划的一般形式和特点……96
§5.2 评价函数方法……103
§5.3 目标规划……108
习 题……121

第六章 动态规划……123
§6.1 动态规划的基本思想和最短路线问题……123
§6.2 投资分配问题……127
§6.3 "背包"问题……135
§6.4 多阶段生产安排问题……139
习 题……144

第七章 存贮论……146
§7.1 研究存贮的必要性……146
§7.2 存贮的基本概念……147
§7.3 第一类存贮模型……149
§7.4 第二类存贮模型……159
§7.5 多阶段存贮问题……163
习 题……168

第八章 决策论……170
§8.1 概论……170
§8.2 确定型决策问题……175
§8.3 风险型决策问题……178
§8.4 不确定型决策问题……189
习 题……195

第九章 矩阵对策……198
§9.1 对策问题的三要素……198
§9.2 矩阵对策……200
§9.3 矩阵对策的线性规划解法……212
习 题……215

第十章 统筹方法 ……217
§10.1 统筹图……217
§10.2 统筹图中有关参数的计算……223
习 题……230
参考文献 ……231

第一章 绪 论

§1.1 运筹学的历史

运筹学这个名称，最早于1938年出现在英国，英国人称之为Operational Research。1942年美国开始从事这项工作时，称之为Operations Research。我国运筹学的先驱者从《史记》“运筹于帷幄之中，决胜于千里之外”一语摘取“运筹”二字作为这门科学的名称，既显示其军事的起源，也表明其萌芽早已出现在我国。

运筹学作为一门近代新兴的科学，始源于第二次世界大战期间。三十年代后期，英国军事管理部门邀请了一批科学家（绝大部分为自然科学家），研究与防御有关的战略和战术问题，以便最有效地利用有限的军事资源，最成功地使用现有的武器装备。早期的工作包括研究新式雷达的有效使用，野外火炮控制设备的效能（尤其是火炮在实战中的应用）等。这个小组的建立及其工作标志着第一次正式的运筹学活动。英国运筹小组的卓有成效的工作促使美国军事管理部门也开始进行类似的活动。美国运筹小组的工作包括反潜艇策略、深水炸弹的起爆深度研究等。这些早期的运筹学工作，使用的方法一般说来都极为浅显，而成效卓著。人们开始认识到武器系统的有效使用和估价是必不可少的工作；用定量分析方法研究实际问题、建立数学模型等方法也是行之有效的。

第二次世界大战以后，各兵种的运筹学组织转而研究在各种

作战条件下的现代和未来战争中，武器系统的有效的、准确的、客观的分析和评价。而那些企业管理家们也注意到了运筹小组的成就，想利用运筹学方法来解决产业部门内部新型的管理问题，以提高生产率和增加利润。甚至在政府部门制定计划、进行决策时，也试图采用运筹学方法。所有这些都使得运筹学的研究队伍和应用领域不断扩大。五十年代，计算机科学与计算技术的成就，对运筹学的发展也起着很大的推动作用。与此同时，运筹学本身也获得了坚实的数学基础，诸如线性规划、动态规划、非线性规划、对策论、图论网络等运筹学分支日趋成熟。在以后的二十多年中，运筹学已被人们普遍公认为是一门学术性和应用性很强的学科。世界上有许多国家，把运筹学列为大学生高年级及研究生学习课程的一部分，有关运筹学的书籍和杂志如雨后春笋般涌现，建立了许多新的运筹学会等学术组织。如果说七十年代是运筹学的巩固时期，那么到了八十年代，在当今世界上许多急待解决的问题面前（例如，人口问题，能源问题，粮食问题，裁军问题，第三世界经济发展问题等等），运筹学所面临的挑战是：如何为当今世界做出贡献。

§1.2 运筹学的分支

运筹学有着很多的应用领域和研究领域，时至今日仍在不断发展和扩充。这里只能简单叙述一下它的最主要的几个分支。

（一）线性规划（Linear Programming）

线性规划是运筹学的最主要的分支之一。1939年，苏联数学家康特罗维奇（Л.В.Канторович）就提出了生产组织与计划中的线性规划模型，四十年代末丹西格（G.B.Dantzig）、查恩斯（A.Charnes）等人关于线性规划的工作，都是线性规划的最卓著的开创

性工作。线性规划是研究在线性不等式或等式的限制条件下，使得某一个线性目标取得最大（或最小）的问题。由于线性规划模型比较简单，理论与计算方法比较成熟，因而，线性规划在交通、工业、农业、军事、经济、管理等方面有很多成功应用的实例。

（二）整数规划（Integer Programming）

由于在实际问题中某些变量的取值只能为整数（例如，机器的台数，完成工作的人数等），因此，在线性规划的模型中有一部分或全部变量要求是整数，这就构成了（线性）整数规划问题。在整数规划的解法当中，最具有代表性的是割平面法和分支定界法。这两类方法的共同特点是把一个整数规划问题的求解，转化为多次线性规划的求解。

（三）非线性规划（Nonlinear Programming）

非线性规划也是运筹学的最主要分支之一。在很多实际问题当中，变量与变量之间的关系大多是非线性关系。如果在数学规划模型当中，至少有一个非线性函数出现（不论是目标函数，还是约束函数），我们就称其为非线性规划问题。非线性规划的发展是与寇恩-塔凯尔（H.W.Kuhn,A.W.Tucker)于1951年发表的非线性规划基本定理分不开的，此后非线性规划的工作日益增多，出现了很多算法。随着运筹学应用领域的不断扩大和深入，近二十年来这一分支的研究发展很快。

（四）多目标规划（Multiobjective Programming）

由于客观情况比较复杂，有时判断一个方案的优劣难以用一个目标来权衡，即需用一个以上的目标来衡量，而这些目标之间又往往不是那么协调（甚至是彼此完全对立的）。多目标规划是研究具有多个目标的规划问题的理论与方法的一个新分支。多目

标规划应用广泛，近十年这一分支的研究十分活跃。

（五）动态规划（Dynamic Programming）

动态规划也是运筹学的一个最主要的分支。它是贝尔曼（R. Bellman）等人在1951年，根据一类多阶段决策问题的特性，提出了解决这类问题的著名的“最优化原理”，随后又应用这一原理解决了很多实际问题，从而创建了解决多阶段决策问题的一种新方法——动态规划。动态规划在工程技术、经济、管理、军事等有关部门都有着广泛的应用。

（六）对策论（Theory of Games）

对策论也是运筹学的一个重要分支。1928年冯·诺意曼（J von Neumann）等人由于经济问题的启发，研究了一类具有某种特性的博弈问题，这是对策论的最早期的工作。在我国古代的战国时期，“齐王与田忌赛马”就是一个非常典型的对策论的例子。对策论所研究的主要对象是带有斗争性质（或至少含有斗争成分）的现象。由于对策论研究的对象与政治、军事、工业、农业、交通运输等领域有密切关系，处理问题的方法又有着明显的特色，所以越来越受到人们的注意。

（七）决策分析（Decision Analysis）

决策分析的最终目的是从若干个行动方案中，合理地分析和决定满足一定要求的方案来。这一分支的历史不是很长，尽管就它本身的内容和方法来说还不够完善，但它毕竟是一个很实用、又很有前途的运筹学新分支。

（八）存贮论（Inventory Control）

在人类的实践活动中，都会遇到存贮问题，存贮量过大或过

小往往都会带来损失（例如，水库的蓄水量，商品的库存量，机器零件的备用量，血库的贮血量等等）。存贮论是研究在各种不同情况下的库存问题，形成数学模型，选择合理的存贮决策，以使相应问题中考虑的各项费用的总和为最小。随着社会经济的不断发展，需要存贮的对象越来越多，因而，研究存贮问题对我们来说是十分有意义的。

（九）排队论（Queuing Theory）

排队论有时也被称为随机服务系统，它同样是运筹学的一个重要分支。它是研究系统拥挤现象和排队现象的一门学科，其目的是研究排队系统的运行效率，估计服务质量，确定系统参数的最佳值，以决定系统结构是否合理、研究设计改进措施等。排队论的开创性工作是1915年丹麦数学家埃尔朗（A.K.Erlang）在研究自动电话系统中通话线路与电话用户呼叫的数量关系问题时，建立了呼叫生灭模型，推导出了后来被人们命名的埃尔朗公式，它极为成功地解决了这一问题。排队论在城市管理、计算机研制、卫星通讯、水库调度、生产管理等方面都得到了广泛应用。

（十）图论（Graph Theory）

图论作为数学的一个分支，迄今已有二百多年的历史。随着科学技术的发展及电子计算机的出现与广泛应用，在二十世纪五十年代，图论的理论得到进一步发展。图论在物理、化学、电学、计算机科学等方面得到应用。特别是许多运筹学问题可以化为纯图论问题，使用图论的理论和方法来求解便显得十分方便。因此，图论中的某些理论和方法也可看作是运筹学的一个重要分支。

（十一）其它

运筹学的研究领域和应用领域在不断地扩大，而且运筹学与

其它有关学科（例如，系统工程，系统分析，管理学等）有其相同之处，因此，运筹学应包括哪些分支并不是很严格的。现将国内、外一些文献中出现的与运筹学有关的内容罗列如下：

1. 模拟；
2. 可靠性；
3. 质量控制；
4. 模型论；
5. 可行性研究；
6. 统筹方法；
7. 投入产出分析。

有兴趣的读者可查看有关文献，本书不作详细介绍。

第二章 线性规划

线性规划是运筹学中研究较早、理论和算法比较成熟的一个重要分支。它主要研究在一定的线性约束条件下，使得某个线性指标最优的问题。我们在工农业生产、交通运输、军事等各领域都会遇到这类问题，因此，线性规划也是运筹学中应用最广的分支之一。

§2.1 线性规划问题的一般形式

为了说明线性规划问题的特点，可先看一个例子。

例1.某工厂利用甲、乙、丙三种原料，生产A_1、A_2、A_3、A_4四种产品。每月可供应该厂原料甲500吨、乙300吨、丙200吨。生产一吨的不同产品可获得的利润以及生产一吨不同产品所消耗的原料数量见表2-1。

表 2-1

消耗原料 \ 产品	A_1	A_2	A_3	A_4	每月原料供应量(吨)
甲	1	1	2	2	500
乙	0	1	1	3	300
丙	1	2	1	0	200
利润（元/吨）	200	250	300	150	

问工厂每月应如何安排生产计划，使总利润最大？

为了用数学形式来表达这一问题，设该厂每月应生产x_1吨产品A_1，x_2吨产品A_2，x_3吨产品A_3，x_4吨产品A_4。

生产这四种产品所消耗原料甲的总数量就是$x_1+x_2+2x_3+2x_4$（吨），但原料甲每月只能供应500吨，因此应有

$$x_1+x_2+2x_3+2x_4\leqslant 500$$

类似地，我们还可以得到

$$x_2+x_3+3x_4\leqslant 300$$

$$x_1+2x_2+x_3\leqslant 200$$

各种产品的数量不应是负数，因此还应有

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0$$

生产x_1吨产品A_1，x_2吨产品A_2，x_3吨产品A_3，x_4吨产品A_4所获得的总利润是

$$f=200x_1+250x_2+300x_3+150x_4$$

我们要求f的最大值。

综合起来，可以把这个问题的数学形式写成

$$\text{求}\quad \max f=200x_1+250x_2+300x_3+150x_4 \tag{2.1}$$

$$\text{满足}\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+2x_4\leqslant 500 & (2.2)\\ x_2+x_3+3x_4\leqslant 300 & (2.3)\\ x_1+2x_2+x_3\leqslant 200 & (2.4)\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0 & (2.5)\end{cases}$$

其中，记号“$\max f$”表示函数f的最大值。$f=200x_1+250x_2+300x_3+150x_4$称为目标函数；(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5)称为约束条件。满足约束条件(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5)的一组x_1，x_2，x_3，x_4的值称为此问题的可行解，使目标函数f达到最大值的可行解称为最优解。从制定生产计划的角度来看，可行解就是一个生产安排的方案，最优解就是一个最好的生产安排方案。(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5)就是一个线性规划