

微分 动力系统 导引

罗定军 滕利邦

高等教育出版社



微分动力系统导引

罗定军 滕利邦

J41/132/25



高等教育出版社

本书系根据最近二十多年来国内、外微分动力系统大范围分析理论编写而成，全书共分五章，第一章介绍微分流形及微分拓扑方面的准备知识，其余四章分别介绍动力系统中的一些基本概念，局部性态，大范围理论，分支与混沌，符号动力系统，Smale马随映射，通有性理论等内容。本书内容约60~70学时可以授完。

本书内容简明，重点突出，叙述清楚。每章有适量的习题，利于学生加深理解各章的内容。本书可作为综合大学数学专业高年级学生选修课和研究生课的教材，也可作为教师及有关科研人员的参考书。

微分动力系统导引

罗定军 滕利邦

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 7.125 字数 170 000

1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷

印数 0001—550

ISBN 7-04-002746-1/O · 871

定价 2.00元

序

自本世纪六十年代初微分动力系统理论创始，到现在已将近三十年了。它主要研究可微流形上的可微动力系统的定性理论，结构稳定性和分枝问题。然而国内常微界对这方面很熟悉并进行工作的人并不多，至于把微分动力系统理论和常微所定义的动力系统结合起来做研究工作的人就更少了。这对于我国常微与动力系统研究工作的现代化和进一步提高其质量是很不利的。为此，对下一代的青年数学家普及微分动力系统的知识实为当务之急。罗定军、滕利邦两同志在为研究生讲授微分动力系统课程的基础之上编写了这本书，它不仅适合于作常微研究生的教材，并且也适合于数学其它分支对此有兴趣的人自学之用。他们已试用过多次，并作了相应的修改。这本书内容精练，由浅入深，既有严格的证明，又有直观的几何解释。书末并附有详细的文献目录，可供读者在此基础之上进一步深入了解情况或从事研究工作做参考。我相信此书的出版必将受到广大读者们的欢迎。

叶彦谦

一九八八年三月

编者的话

从1983年起,我们为南京大学数学系历届研究生开设了微分动力系统课程。在1985年所编的微分动力系统讲义(南京大学数学系印)的基础上,经过再次修改补充,我们完成了这本书稿。目的是在六、七十个学时的时间内,向研究生等介绍现代微分动力系统理论发展中的主要研究成果及基本研究方法。

七十年代以来,动力系统理论、分枝与混沌等课题的研究越来越引起国际上数学、力学等方面的众多科学家的重视。在国内对这一领域感兴趣的学者也在日益增多。我们希望此书将能成为有志于这一研究领域的人们的一本入门参考书。

全书共分五章,第一章介绍了微分流形及微分拓扑方面的一些必要的准备知识,以使此书能自成体系,便于教学。第二、三两章涉及动力系统理论中的一些基本概念与局部性态的研究。第四、第五章则主要涉及大范围的理论。第四章从结构稳定性问题引伸到分枝与混沌性态的研究,在引入符号动力系统及Smale马蹄映射的基础上,从数学角度介绍了混沌研究的初步。在分枝理论方面则主要是结合我们对某些平面和环面系统研究中所得出的极限环分枝加以分析。第五章介绍了通有性理论的主要内容,对六十年代西方学者得出的有名的Kryka-Smale定理予以详细而又较直观的证明,与之并行的我国廖山涛教授的有关结果则未能涉及,关于这方面将有董镇喜同志所写的书出版。

本书前三章由滕利邦主笔,第四、五章由罗定军主笔,最后由罗定军统稿。限于我们的知识水平,书中定会出现不少错漏之处,请读者不吝指正。

叶彦谦先生一直很关心在我国能出版一些微分动力系统方面的教材、专著，在本书出版过程中得到了他的关心鼓励，并提出许多宝贵意见。金福临先生，黄启昌、李继彬、盛立人、董镇喜、俞伯华、梁肇军、阮炯等同志都很关心本书的出版，对原讲义提出宝贵意见。此外，在进修过程中，严忠、孙建华、陈植荫、赵申琪、俞军等同志及南京大学数学系已毕业的研究生朱德明、韩茂安、钱南天、董梅芳、吴星、黄先华、尤建功、章熙康等同志对讲义内容也提出过好的建议，在此我们对所有这些同志表示衷心的感谢。

罗定军

滕利邦

1988年3月

常用符号表

$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{R}^m$	m 维欧氏空间
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{Z}$	整数集
S^1	单位圆周
S^2	2 维球面
T^2	2 维环面
$a \in A$	a 是集合 A 的元素
$a \notin A$	a 不属于集合 A
$A \subset B$	集合 A 包含于集合 B 内
$A \cup B$	两集合 A 与 B 的并集
$A \cap B$	两集合 A 与 B 的交集
$\text{mes } A$	集合 A 的测度
$\emptyset$	空集
$\text{int } A$	集合 A 的内点集
$\bar{A}$	集合 A 的闭包
$\dim M$	流形 M 的维数
$\text{codim } S$	S 的余维数
$\prec$	偏序中的次序, 例如 $a \prec b$ 表 a 先于 b .
$T_p M$	M 在 P 点的切空间
TM	M 的切空间丛
$M/\sim$	M 在等价关系 $\sim$ 之下的商空间

$\pi: M \rightarrow M/\sim$	M 到其商空间的投影
$f: M \rightarrow N$	f 为 M 到 N 的映射
$Tf: TM \rightarrow TN$	f 的切映射
Df	f 的导算子(当 f 为欧氏空间的映射时)
$f: x \mapsto f(x)$	f 把点 x 映到点 $f(x)$
id	恒同映射
$g \circ f$ 或 gf	映射 f 与 g 的复合(迭置)
$f^n = f \circ f^{n-1}$	f 的 n 次迭置
$C^r(M, N)$	$M \rightarrow N$ 的所有 C^r 映射组成的空间
$\text{Diff}^r(M)$	M 上的 C^r 微分同胚的空间
$\mathcal{X}^r(M)$	M 上的 C^r 向量场的空间
$\deg(f, \bar{S}, O)$	映射 f 关于集 $\bar{S}$ 及点 O 的拓扑度
$\text{ind}(h, p)$	映射 h 关于点 p 的指标
$\text{ind}(O)$	向量场的奇点 O 的指标
$f \pitchfork S$	映射 f 与集合 S 横截相交
$K \pitchfork L$	集合 K 与 L 横截相交
MS	Morse-Smale 系统类
KS	Kypka-Smale 系统类
$\mathcal{S}$	结构稳定系统类
(Σ, σ)	符号空间在移位映射下组成的符号动力系统
$\text{Per}(f)$	f 的周期点的集合
$\Omega(f) (\Omega(X))$	$f(X)$ 的非游荡集
$\omega(p)$	过 p 的轨道的 ω 极限点集
$\alpha(p)$	过 p 的轨道的 α 极限点集
$W_{\text{loc}}^s(p)$	p 点的局部稳定流形

$W_{loc}^u(p)$	p 点的局部不稳定流形
$W^s(p)$	p 点的全局稳定流形
$W^u(p)$	p 点的全局不稳定流形
$W_{loc}^s(\gamma)$	闭轨 γ 的局部稳定流形
$W_{loc}^u(\gamma)$	闭轨 γ 的局部不稳定流形
$W^s(\gamma)$	闭轨 γ 的全局稳定流形
$W^u(\gamma)$	闭轨 γ 的全局不稳定流形
HFB	Hopf 分枝
Hoc	简记 Homoclinic——同宿
Hec	简记 Heteroclinic——异宿
Hoc(N)	通过鞍点 N 的同宿闭轨
Hec(N_1, N_2)	通过鞍点 N_1, N_2 的异宿闭轨
L 环	半稳定极限环
$\implies$	推出、蕴含
$\iff$	当且仅当
$\square$	定理或引理证毕

目 录

第一章 微分流形与微分拓扑的准备知识	1
§1 拓扑流形与微分流形	1
§2 可微映射的局部性质	15
§3 切空间与切映射	23
§4 Morse 理论初步	32
§5 Sard 定理	41
§6 横截性理论	46
第二章 流形上的动力系统	58
§1 流形上的向量场	58
§2 向量场的奇点	65
§3 拓扑度与奇点的指标	68
§4 流与微分同胚	72
§5 极限集、非游荡集与极小集	76
第三章 流与微分同胚的局部性质	88
§1 常点流的直化定理	88
§2 奇点邻域的性质、线性化	90
附录 KAM 理论简介	96
§3 双曲奇点与闭轨、局部稳定与不稳定流形	100
§4 λ -引理	109
§5 全局稳定流形与全局不稳定流形	113
第四章 结构稳定性、分枝与混沌	118
§1 结构稳定性	118
§2 符号动力系统	121
§3 Smale 马蹄	124
§4 混沌性态	130
§5 双曲环面自同构	141
§6 Ω 稳定性及相关问题	150

§ 7 分枝理论初步.....	155
第五章 通有性问题	175
§ 1 通有性概念 $g_0, g_1(G_0, G_1)$ 通有性.....	175
§ 2 g_{12} 通有性.....	179
§ 3 Kypka-Smale 定理.....	193
§ 4 G_{123} 通有性.....	200
参考文献	210

第一章 微分流形与微分拓扑的准备知识

§ 1 拓扑流形与微分流形

粗略地说,流形是局部地“类似”于欧氏空间 R^n 的一个拓扑空间. 通常的 1 维圆周, 2 维球面、环面和射影平面等都是最基本的流形. 从实际问题来看, 许多动力系统的位置空间或位相空间往往不是占据了整个欧氏空间, 而只是限制于某个流形上, 例如平面单摆限制在圆周上运动, 球面摆的运动位置是限制在球面上, 再如太阳、地球、月亮组成的三体系统中若把太阳视为不动的话, 则月亮大体是在一个环面上运动(当然真实的运动是在一个复杂的高维流形上).

流形的特点是它只能局部地同胚于欧氏空间(或者更一般地, 赋范线性空间)的开集, 例如整个球面不能和欧氏平面的开集同胚, 但球面上每一点有一邻域和平面上的开集同胚. 因此, 一般来说, 流形只有局部坐标系而不能建立适用于整个流形的全局坐标系, 这是流形不同于欧氏空间的一个特性. 另一个特性是流形为非线性, 亦即其上两点的连线一般不能整个保持在该流形内, 例如球面, 其上的任二点就是如此.

微分方程所涉及的微分运算只用到了欧氏空间的局部几何性质, 故可把这种运算推广到局部类似于欧氏空间的流形上去. 但是由于流形的拓扑特性比欧氏空间复杂, 因此流形上的系统也往往比古典欧氏系统的结构要复杂得多. 以简单的方程 $\frac{dy}{dx}=0$ 为例, 如把它看成平面系统, 则极其简单, 它的解为一族平行直

线: $y = \alpha x + b$; 但也可把它理解为环面上的方程, 把 x, y 视为周期坐标, 譬如当 $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ 均为整数时, 把 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 视为同一点, 这时 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的两对对边相迭合而成为环面, 解曲线族在环面上的结构依 α 为有理数或无理数而有本质的不同. 若 $\alpha = \frac{n}{m}$, 则当 x 增加 m 时 y 增加 n , 因此环面上的每条解曲线都是闭合的, 即环面为一族闭轨线所充满, 称为周期环型; 若 α 为无理数, 则称为遍历 (或各态历经, ergodic) 型, 这时可证每条解曲线都不闭合, 而在环面上处处稠密, 以整个环面作为 α 极限集与 ω 极限集 (其定义在第二章给出), 这是平面系统所不能具有的性质.

任何流形必须以某一欧氏空间或赋范线性空间 E 作为模式, 称这样的空间 E 为流形在其上取模的空间, 或简称为流形的模空间. 现给出如下精确的定义:

定义 1.1 如果拓扑空间 S 为开集族 $\{U_\alpha\}$ 所覆盖, 且对每一 U_α 存在同胚 $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$, U'_α 为赋范线性空间 E 的开子集, 则称 S 为一拓扑流形 (见图 1.1).

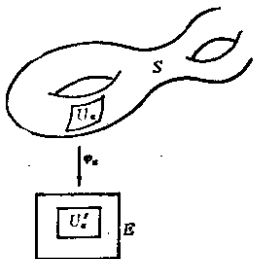


图 1.1

这时, 每一 U_α 连同其对应的同胚 $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ 一道称为一个图 (chart), 记为 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 所有图的集合 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 称为 S 的一个图集 (atlas). 也称 S 是取模于 E 上的一个拓扑流形. U'_α 中的坐标可通过 φ_α^{-1} 输送到 S 的子集 U_α 上面建立坐标, 由于这个缘故, 也常称图 (局部) 坐标图. 若 E 为 n 维的, 则称 S 为 n 维流形. 以下为叙述简洁起见, 除非特别指明, 一般均就 E 为有限维欧氏空间的情况来研究.

有了坐标之后,就可具体地表示流形之间的映射. 设 S, T 为流形, $f: S \rightarrow T$ 为连续映射. 对任一 $x \in S$, 有 S 的图 (U, φ) 使 $x \in U$ 且 $\varphi: U \rightarrow U'$ 为同胚, U' 为 S 的模空间 E 的开子集, 同样有 T 的图 (V, ψ) , 使 $f(x) \in V$ 且 $\psi: V \rightarrow V'$ 为同胚, 其中 V' 为 T 的模空间 F 的开子集, 又由 f 的连续性 $f(U) \subset V$, 那末复合映射 $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 就是 E 的开子集 U' 到 F 的开子集 V' 的连续映射(图1.2). 称 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 为 f 的一个局部表示. f 的一个局部表示实际上是 S, T 所取模的空间 E, F 的开集之间的映射, 故可用它们的坐标表示出来. 从而能对它作微分运算. 特别当 E, F 为有限维时, 可通过矩阵来表示导数, 这些在下一节再详述.

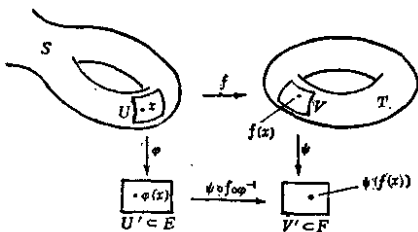


图 1.2

拓扑流形的例

例1 根据定义, 赋范线性空间 E 本身或 E 的任一开子集都是流形. 此时只要取一个图 (E, id_E) 组成的图集即可. 特别, 欧氏空间 R^n 及其开子集均为 n 维流形. 一般地, 任何流形 M 的开子集 S 仍为一流形. 事实上, 设 M 的图集为 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, 则 S 的图集可取为

$$\{(S \cap U_\alpha, \varphi_\alpha|_{S \cap U_\alpha})\}.$$

例2 圆周 $S^1 = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ 为拓扑流形. 可取

以下几种常用的图集:

1. 取四个开集 U_1, U_2, U_3, U_4 分别为 $x_1 > 0, x_1 < 0, x_2 > 0, x_2 < 0$ 部分的半圆周, 它们构成 S^1 的开覆盖, 模空间为 R , 相应的同胚 φ_i 取为到区间 $(-1, 1)$ 的投影, 对左、右半圆用 U_3, U_1 投影到 x_2 轴, 即

$$\varphi_3(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1, x_2) = x_2$$

对上、下半圆周 U_3, U_4 投影到 x_1 轴, 即 $\varphi_3(x_1, x_2) = \varphi_4(x_1, x_2) = x_1$. 易知它们都是双方单值且连续的映射, 故 $\{(U_i, \varphi_i), i=1, \dots, 4\}$ 构成 S^1 的图集.

2. 取 $U_1 = S^1 - \{e^{i0}\}, \varphi_1: U_1 \rightarrow (0, 2\pi) \subset R$,

$$e^{i\theta} \mapsto \varphi_1(e^{i\theta}) = \theta, \quad 0 < \theta < 2\pi;$$

$$U_2 = S^1 - \{e^{i\pi}\}, \quad \varphi_2: U_2 \rightarrow (\pi, 3\pi) \subset R,$$

$$e^{i\eta} \mapsto \varphi_2(e^{i\eta}) = \eta, \quad \pi < \eta < 3\pi.$$

易知 φ_1, φ_2 为同胚, $\{(U_i, \varphi_i), i=1, 2\}$ 构成 S^1 的一个图集.

3. 取开集 U_+, U_- 分别为 S^1 上除去一点 $x_2 = 1$ (北极) 和 $x_2 = -1$ (南极), 相应的同胚 φ_+, φ_- 取为球极投影. 其定义以 φ_+ 为例, 任一点 $(x_1, x_2) \in U_+$, 将它与 $x_2 = -1$ 连线, 与 x_1 轴交点 (有且只有一个) 的 x_1 坐标即为 $\varphi_+(x_1, x_2)$. 由图 1.3 中的相似三角形易求得 $\varphi_+(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1+x_2}$. 类似地 $\varphi_-(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1-x_2}$, 两图 $(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)$ 构成一图集.

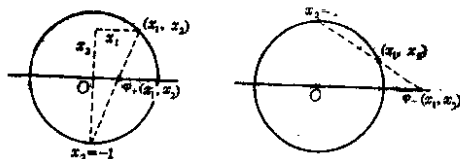


图 1.3

故 S^1 为一拓扑流形.

可推广此例到高维情况, 易证 n 维球面

$$S^n = \left\{ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

为拓扑流形.

例 3 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维拓扑流形, 则拓扑积 $M \times N$ 为 $(m+n)$ 维流形, 称为 M 和 N 的积拓扑流形. 因由 M 的图 (U, φ) , N 的图 (V, ψ) 可得 $M \times N$ 的图 $(U \times V, \varphi \times \psi)$, 其中 $\varphi \times \psi$ 为积映射. 环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 就是一个积流形.

例 4 平面上的十字形不是一个拓扑流形. 为说明这一点, 可取交点 O 的邻域, 它不能同胚于任何 $\mathbb{R}^n$ 的开集. 因为十字形在 O 邻域内的补集分为四个不相交的开子集, 而 $\mathbb{R}^n$ 内一点的任何连通邻域的补集或者是两个分开的开集 ($n=1$ 时), 或者为连通开集 ($n>1$ 时), 它们与上述四个不相交的开集之间当然不能建立同胚关系.

我们的目标是讨论具有一定光滑性的流形. 下面来说明这种必要性. 设给了拓扑流形 S 的两个图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) , 如果 $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta}$ 非空, 则可得迭置映射

$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ (图 1.4), 它是 $\mathbb{R}^n$ (或赋范线性空间 E) 的两个开子集之间的同胚, 如图 1.4 中的可换图表所示. 正是这些迭置映射说明了图集中不同的图区域是如何粘连在一起而构成流形的. 如果除拓扑性质之外, 还希望将另外一些性质从 $\mathbb{R}^n$ 的开子集推广到由适当的图集定义的流形上去, 我们就必须保证此定义与图集中图的选取无关, 或者说保证这些性质与迭置映射无关. 这就要求迭置映射应具有很好的性能, 例如要求它们是可微的, 由此即可导致微分流形的概念. 问题是这样, 设 M, N 为流形, $f: M \rightarrow N$ 为连续映射. 它在 M 的一个图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 之下的局

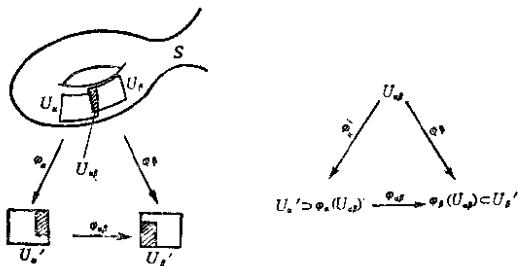


图 1.4

部表示为 $\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$, 在另一图 (U_β, φ_β) 之下的局部表示为 $\psi \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}$, 其中 (V, ψ) 为 N 中的图 (图 1.5). 如果 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, 则可能发生这样的情形: f 的局部表示 $\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(x)$ 可微, 而另一局部表示 $\psi \circ f \circ \varphi_\beta^{-1}$ 在对应点 $\varphi_\beta(x)$ 却不可微. 为了避免这种情况发生, 就必须假定迭置映射的可微性. 因两种局部表示分别为映射

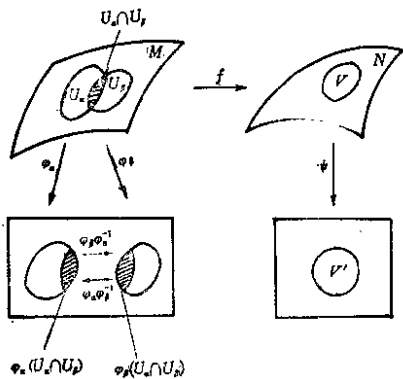


图 1.5