考研数学题库精编系列丛书

考研者→备战应考的良师益友
大学生→训练提高的最佳选择

概率论与数理统计题库精编

关颖男

理工类

精讲指要
本题型例析
元练习题萃
自我检测试题

NEUPRESS
东北大学出版社

考研数学题库精编系列丛书

概率论与数理统计题库精编

（理　工　类）

吴　颖　男

东 北 大 学 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计题库精编．理工类/关颖男．一沈阳：东北大学出版社，2000.3

（考研数学题库精编系列丛书）

ISBN 7-81054-468-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．关…　Ⅲ．①概率论-研究生-入学考试-解题 ②数理统计-研究生-入学考试-解题　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 02556 号

©东北大学出版社出版

（沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号　邮政编码 110006）

电话：（024）23890881　　　传真：（024）23892538

沈阳市市政二公司印刷厂印刷　　　东北大学出版社发行

开本：850mm×1168mm　1/32　　字数：350 千字　　印张：13.5

2000 年 3 月第 1 版　　　2000 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑：刘淑芳　孟　颖　郭爱民　　责任校对：米　戎

封面设计：唐敏智　　　责任出版：杨华宁

定价：19.80 元

前 言

《概率论与数理统计题库精编》（理工类）是根据教育部颁布的《全国硕士研究生考试大纲》、近年来全国硕士研究生统考试题及作者在历年考研辅导班的讲授经验而编写的辅导教材。目的是帮助读者系统地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本方法和基本公式，提高其素质修养，了解、熟习和适应考研的题型、题路、题质和题量，全面培养考生举一反三、融会贯通、触类旁通的解题能力。

纵观十多年来全国硕士研究生概率论与数理统计（理工类）统考试题，与教科书的例题及习题有很大不同。后者是为理解、消化和掌握课本内容而配置的，只要掌握了课本内容，仿照例题的思路和步骤，就可以得出解答。而硕士研究生入学统考试题，是为了考查考生掌握和应用概率论与数理统计的学识水平和能力而设计的综合性题目。概率论与数理统计是一个二级学科，考研大纲所列内容也很多，但在考研数学试卷中，概率论与数理统计的考题数不能很多，一般只有 4～5 道题，同时这些试题又要尽量覆盖考研大纲的内容，所以，考研试题往往是“综合性”的，不能像教科书习题那样经简单运算就可得到解答。对于考研试题，往往需要按照题设条件进行分析、研究和判断，综合运用多个概念、公式和定理才能得到正确的答

案。这需要考生具有较高的概率统计知识素养和综合运用能力。考生需要把在课堂上所学的概率论与数理统计知识与考研试题进行“接轨”。本书力图帮助考生达到这一目的。

本书由两部分组成。前六章为第一部分，占三分之一篇幅，是按考研大纲所要求内容的顺序编写的，每章概述了主要定义、定理和公式，并配以适量的例题和习题。研读此部分内容可以使读者全面、系统地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本方法和基本公式。本书的第二部分是第七章——解题分析，占了三分之二篇幅。该部分首先从历年考研统考试题中精选出160道题，按题型进行分类解题分析，给出详解，说明解题技巧和解法评注。读者通过熟习考研题型、题路和掌握解题分析中的方法与技巧来提高概率统计的素养，适应考研试题和增强解题能力。本章中的“自我检测试题”是为考生自我检验概率统计素养和检测考研水平而设计的，并给出了详细解答。为便于读者研读，在书后也给出了第一部分各章习题的详细解答。

本书可以作为各类理工科考研辅导班的培训教材，是报考理工科硕士研究生的广大考生理想的学习参考书；对于正在教授和学习这门课的教师和大学生来说，也是一本开卷有益、帮助提高的参考读物。

关颖男 谨识

2000 年元月

目　　录

第一章 随机事件及其概率

第一单元 随机事件的概率

一、随机试验和随机事件

(1) 随机试验(记为 E) 若试验满足条件:

① 可以在相同条件下重复进行;

② 所有可能结果事先已知;

③ 作一次试验究竟哪一个结果出现, 事先不能确定,

则称该试验为随机试验.

(2) 基本事件 随机试验 E 的每一个不可再分解的结果称为试验的一个基本事件(样本点)用记号 ω 表示.

(3) 样本空间 所有基本事件(样本点)的集合称为样本空间, 用记号 Ω 表示.

(4) 随机事件 样本空间 Ω 的一个子集, 用记号 A, B, C 等表示.

(5) 必然事件 在一定的条件下, 每次试验中一定要发生的事件, 用记号 Ω 表示.

(6) 不可能事件 在一定的条件下, 每次试验中一定不发生的事件, 用记号 $\varnothing$ 表示.

二、事件的关系及其运算

(1) 事件的包含 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生, 则称事

件 B 包含事件 A(或称 A 被 B 包含)，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

(2) 事件的相等　若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

(3) 事件的和(并)　事件 A 与 B 的和(并)是一个事件 C，它表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，记为 $C = A \cup B$ 或 $C = A + B$.

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和(并)是一个事件 C，它表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，记为

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和(并)是一个事件 C，它表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生，记为

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

(4) 事件的积(交)　事件 A 与事件 B 的积(交)是一个事件 C，它表示事件 A 与事件 B 同时发生，记为 $C = A \cap B$ 或 $C = AB$.

n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积(并)是一个事件 C，它表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生，记为

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$$

无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积(并)是一个事件 C，它表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生，记为

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

(5) 事件的差　事件 A 与事件 B 的差是一个事件 C，它表示事件 A 发生而事件 B 不发生，记为 $C = A - B$.

(6) 互斥事件(不相容事件)　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互斥事件(不相容事件).

若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个都是互斥的，则称该事件组是互斥事件组.

特殊地，同一样本空间中任意两个基本事件都是互斥的.

(7) 对立事件　“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

关于对立事件，有性质

① $A\cup\overline{A}=\Omega$(必然事件)；

② $A\cap\overline{A}=\varnothing$(不可能事件)；

③ $\overline{\overline{A}}=A$.

两个互为对立的事件，一定是互斥事件；反之，互斥事件不一定是对立事件.

(8) 事件加法和乘法运算律　与数的加法和乘法运算律类似，有

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$；　$A\cap B=B\cap A$.

② 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③ 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$.

(9) 对减法运算满足　$A-B=A\overline{B}$.

(10) 摩尔根定律　关于对立运算，加法与乘法可以互相转化：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}；\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

推广：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i；\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i；\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$$

【例 1-1】　设有一批产品共 100 件，其中有 95 件合格品，5 件次品，从中任取 10 件. (1) 求样本空间所含基本事件个数 n 是多少? (2) 求事件 A_1=“所取 10 件全是合格品”所含基本事件的个数 m_1 是多少? (3) 求 A_2=“取出 10 件中恰有两件次品”所含基本事件个数 m_2 是多少.

【解】　(1) 在此随机试验中，从 100 件产品取出 10 件，每次得到的一个结果就是一个基本事件. 总共有 C_{100}^{10} 种取法，所以，$n=$

C_{100}^{10}.

(2) 要求每次取出的 10 件产品都是合格品，这只能从 95 件合格品中取，总共有 C_{95}^{10}种取法，所以，$m_1 = C_{95}^{10}$.

(3) 要求每次取出的 10 件产品中有两件次品，只能从 5 件次品中取，共有 C_5^2种取法；而对于已取定的两件次品，还要配上 8 件合格品，这 8 件合格品要从 95 件合格品中取出，有 C_{95}^8种取法. 这样，使"取出 10 件中恰有两件次品"，总共有 $C_5^2C_{95}^8$种取法，所以，$m_2 = C_5^2C_{95}^8$.

【例 1-2】 电话号码是由 0，1，2，…，9 中的 8 个数字排列而成. (1) 求全部电话号码总数 n 是多少？即样本空间所含样本点个数 n 是多少？(2) 求事件 A ="出现 8 个数字全不同的电话号码"所含样本点个数 m 是多少？

【解】 (1) 8 位电话号码的每个位置上，都可以安排 0，1，2，…，9 中的任一个数字，有 10 种可能，故总共可以排列成 10^8 个电话号码，即样本空间总共含 10^8 个样本点.

(2) 对于事件 A 说来，第一个位置可以安排 0，1，2，…，9 这 10 个数字中的任何一个，第一个位置排定之后，第二个位置只能安排与第一个位置数字不同的 9 个数字中的任何一个，有 9 种可能，等等，从而，总共可以排列成 $A_{10}^8 = 10 \times 9 \times \cdots \times 3$ 个 8 位数字完全不同的电话号码，即随机事件 A 包含 A_{10}^8个样本点.

例 1-1 和例 1-2 计算了样本空间所含基本事件的个数和某些随机事件所含基本事件的个数. 在这两个例子中，分别用到了组合与排列. 在有些问题中，为计算指定的随机事件 A 所含基本事件的个数，要同时用到排列和组合. 何时用排列，何时用组合，还是排列组合同时使用，这要对具体问题进行分析而定，不要硬套.

【例 1-3】 设 A，B，C 是三个随机事件，试用 A，B，C 表示下列各事件：

(1) 恰有 A 发生；

(2) A 和 B 都发生而 C 不发生;

(3) A, B, C 都发生;

(4) A, B, C 至少有一个发生;

(5) 至少有两个事件发生;

(6) 恰有一个事件发生;

(7) 恰有两个事件发生;

(8) 不多于一个事件发生;

(9) 不多于两个事件发生;

(10) 三个事件都不发生.

【解】 (1) $A\bar{B}\bar{C}$　　(2) $AB\bar{C}$　　(3) ABC

(4) $A\cup B\cup C$　(5) $(AB)\cup(AC)\cup(BC)$

(6) $(A\bar{B}\bar{C})\cup(\bar{A}B\bar{C})\cup(\bar{A}\bar{B}C)$

(7) $(AB\bar{C})\cup(A\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC)$

(8) $\overline{(AB)\cup(AC)\cup(BC)}$

(9) $\overline{ABC}$

(10) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

【例 1-4】 指出下列各式成立的条件并说明条件的意义:

(1) $ABC=A$;　　(2) $A+B+C=A$;

(3) $A+B=AB$;　　(4) $(A+B)-A=B$;

(5) $A+B=\bar{A}$;　　(6) $AB=\bar{A}$.

【解】 (1) $ABC=A(BC)=A \Rightarrow A\subset BC \Rightarrow A\subset B$ 且 $A\subset C$.

(2) $A+B+C=A+(B+C)$

$$=A \Rightarrow B+C\subset A \Rightarrow B\subset A \text{ 且 } C\subset A.$$

(3) $A=B$.

(4) $(A+B)-B=(A+B)\bar{B}=A\bar{B}+B\bar{B}=A\bar{B}=B$

$\Rightarrow A=\varnothing$ 且 $B=\varnothing$.

(5) $A+B=\bar{A} \Rightarrow A(A+B)=A\bar{A}=\varnothing \Rightarrow A=\varnothing$

$\Rightarrow \varnothing+B=\overline{\varnothing}=\Omega \Rightarrow B=\Omega$.

(6) $AB=\bar{A} \Rightarrow A=\Omega$ 且 $B=\varnothing$.

【例 1-5】 下列关系式中哪些是正确的？哪些是错误的？哪些关系式成立是有条件的？条件是什么？

(1) $(A+B)-C=A+(B-C)$；

(2) $ABC=AB(C+B)$；

(3) $A+B+C=A+(B-AB)+(C-AC)$；

(4) $A+B=(A-AB)+B$；

(5) $AB+BC+CA\supset ABC$；

(6) $AB+BC+CA\subset A+B+C$；

(7) $A\overline{B}\overline{C}\subset A+B$；

(8) $\overline{A+B+C}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

(9) $\overline{(A+B)}C=\overline{A}C+\overline{B}C$；

(10) $\overline{(A+B)}C=\overline{A}\overline{B}C$；

(11) $\overline{(A+B)}C=C-C(A+B)$.

【解】 (1) 一般情况下结合律不适用事件的减法运算. 式(1)变形为：$(A+B)\overline{C}=A+B\overline{C}\Rightarrow A\overline{C}+B\overline{C}=A+B\overline{C}\Rightarrow AC=\varnothing$ 时式，(1) 成立.

(2) $AB(C+B)=ABC+AB=ABC\Rightarrow AB=ABC\Rightarrow$ 仅当 $C\supset AB$ 时，式(2) 成立.

(3)，(4)，(5)，(6) 一般情况下成立.

(7) $A\overline{B}\overline{C}=A-B-C\subset A\subset A+B$，所以，此式一般情况下成立.

(8) $\overline{A+B+C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$（摩尔根定律），所以，此式一般情况下成立.

(9) $\overline{(A+B)}C=\overline{A}\overline{B}C\neq\overline{A}C+\overline{B}C$，此式错误.

(10) $\overline{(A+B)}C=\overline{A}\overline{B}C$（摩尔根定律），此式正确.

(11) $\overline{(A+B)}C=[\Omega-(A+B)]C=C-(A+B)C$
$=C-C(A+B)$，此式正确.

三、事件的概率

1. 古典概率定义

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$，$n$ 为有限正整数，且每个样本点 $w_i(i=1, 2, \cdots, n)$出现的可能性相等，则事件 $A=\{w_{i_1}, w_{i_2}, \cdots, w_{i_m}\}$出现的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}(1\leqslant i_1, i_2, \cdots, i_m\leqslant n)$$

即
$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含基本事件数 } m}{\text{样本空间所含基本事件数 } n}$$

2. 概率的统计定义

在一组不变的条件 S 下，重复作 n 次试验. 当试验次数 n 较大时，如果事件 A 的频率 μ/n 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，而且一般说来随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈来愈小，则称 A 为随机事件，并称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的概率，记为

$$P(A)=p$$

3. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果它满足三条公理：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 中，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j, i, j=1, 2, \cdots)$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_i)+\cdots$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

4. 概率的性质

性质 1　设 n 个随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质 2 对于任意的随机事件 A，有

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

性质 3 设 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(A)\leqslant P(B)$$

性质 4 （加法公式） 设 A，B 为任意两个随机事件，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

性质 4 可推广为：对于 n 个随机事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

注 ① 性质 4 对于一般的 n 个随机事件都成立，而性质 1 仅当 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥时才成立.

② 性质 2 是解概率论问题常用的一种方法：当事件 A 比较“复杂”时，它的概率不易直接计算，如果它的对立事件 $\overline{A}$“较简单”，概率易计算，则可通过计算 $\overline{A}$ 的概率 $P(\overline{A})$ 来得到 A 的概率 $P(A)$. 一般地，求若干个事件之中“至少”出现其中一件的概率，用对立事件求解较方便.

【例 1-6】 设一批产品共有 100 件，其中合格品 95 件，次品 5 件，从中任取 10 件，求：(1) 10 件全是合格品的概率；(2) 恰有两件次品的概率.

【解】 (1) 设 A =“取出 10 件产品全是合格品”. 从 100 件产品中任取 10 件产品，有一种结果就是一个基本事件，总共有 C_{100}^{10} 种取法，所以，样本空间所含基本事件个数 $n=C_{100}^{10}$. 为使所取出的 10 件产品都是合格品，只能从 95 件合格品中取 10 件，共有 C_{95}^{10} 种取法，即 A 所含基本事件个数 $m=C_{95}^{10}$，所以，随机事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{C_{95}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 0.583\ 8$$

(2) 设 B = "取出 10 件产品，其中恰有两件次品". 取出两件次品有 C_5^2 种取法，取出 8 件合格品有 C_{95}^8 种取法，任意两件次品再配上任意 8 件合格品则是 B 所含的一个基本事件，可见 B 所含基本事件数 $m=C_5^2\times C_{95}^8$，所以，事件 B 的概率

$$P(B)=\frac{C_5^2C_{95}^8}{C_{100}^{10}}\approx 0.070\ 2$$

【例 1-7】 电话号码由 0，1，…，9 中的五个数字排列而成，求出现五个数字全都不相同的电话号码的概率.

【解】 五位电话号码的每个位置上，可以排 0，1，2，…，9 中的任何一个，所以，五位电话号码总共有 10^5 个，即样本空间所含基本事件个数是 10^5.

设 A = "出现五个数字全都不相同的电话号码"，由于在第一个位置可以排 0，1，2，…，9 中的任一个，有 10 种可能，而当第一个位置排定以后，第二个位置只可能排其余 9 个数字中的某一个，等等. 所以，A 所含的基本事件个数是 $10\times 9\times 8\times 7\times 6$. 从而，$A$ 的概率是

$$P(A)=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{10^5}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{10^4}=0.302\ 4$$

【例 1-8】 袋中有 a 个黑球，b 个白球. 现将球随机地一个个摸出来，求第 k 次摸出的球是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

【解法一】 将 $a+b$ 个球编号，把球依摸出的先后次序排队，则样本点总数就是 $a+b$ 个相异元素的全排列 $(a+b)!$. 设 A_k = "第 k 次摸出黑球"，这相当于在第 k 位置放一个黑球，在其余 $a+b-1$ 个位置上放另外 $(a+b-1)$ 个球，所以，A_k 包含的样本点数为 $a(a+b-1)!$，所以，A_k 的概率是

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

【解法二】 将球看作是各不相同的，只考虑前 k 次摸球. 此时样本空间包含的样本点总数为 A_{a+b}^{k}. 设 A_k = “第 k 次摸出黑球”，这相当于在第 k 个位置上放一个黑球(有 $\mathrm{C}_a^1=a$ 种放法)，在其余 $k-1$个位置上摆放从余下的 $a+b-1$ 个球中任取的 $k-1$ 个球(有 A_{a+b-1}^{k-1}种放法)，总共有放法 $a\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}$种，于是事件 A_k 的概率为

$$P(A_k)=\frac{a\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{A}_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}$$

注 ① 如每次抽取完再放回，则第 k 次抽到黑球的概率仍然是$a/(a+b)$. 也就是说，不管是放回抽样还是不放回抽样，第 k 次抽取到黑球的概率都是 $a/(a+b)$.

② 上述结果与 k 无关，也就是说，对于任意的 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$，第 k 次抽取到黑球的概率都是$a/(a+b)$，而且不管是放回抽样还是不放回抽样，此结果具有一般性，直觉经验也能说明这一点：$a+b$ 个人摸$a+b$ 个彩票，其中有 a 个彩票有奖，则哪个人摸到奖的概率都是 $a/(a+b)$，否则“摸彩票”这种办法就“不公平”了.

【例 1-9】 在 1～2 000 中随机取一整数，问取到的整数不能被 6 或 8 整除的概率是多少?

【解】 设 A = “取到能被 6 整除的数”，B = “取到能被 8 整除的数”，C = “取到不能被 6 或 8 整除的数”，则有 $C=\overline{A+B}$，从而，有

$$P(C)=P\,\overline{(A+B)}=1-P(A+B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

在此随机试验中，从 1～2 000 的数中，任取一个就是一个基本事件，所以，样本空间共含2 000 个基本事件. 而 $333<\frac{2\,000}{6}<334$，所以，事件 A 含有 333 个基本事件. $\frac{2\,000}{8}=250$，所以，事件 B 含有 250 个基本事件. 事件 AB 出现意味着任取一数既能被 6 整除又能被 8 整除，而 6 与 8 的最小公倍数是 24，$83<\frac{2\,000}{24}<84$，所以，事件 AB 含有 83 个基本事件，所以，