

控制测量程序汇编

(719机)

王国海 黄加惠 姚坤一

测绘出版社

控制测量程序汇编

(719 机)

王国海 黄加惠 姚坤一

测绘出版社

本汇编收集的程序是用 719 机 ALGOL 60 编写的通用程序。经过多年运用证明，这些程序具有计算速度较快、输入信息少、上机操作简便、输出数据表格化等优点。适用于城市、大型厂矿的各种控制测量内业计算。

控制测量程序汇编

(719 机)

王国海 黄加惠 姚坤一

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16·印张 15³/₄·字数 364 千字

1983 年 6 月 第一版·1983 年 6 月 第一次印刷

印数 1—4,000 册·定价 2.40 元

统一书号：15039·新 249

前 言

控制测量的计算工作，以往主要是依靠数学用表、手摇或电动计算机等工具进行的，由于这些计算工具运算速度的限制，因此计算速度慢，费劳动力大，远远适应不了国民经济发展和四个现代化的需要。近几年来，电子计算技术开始被用于测量内业计算，电子计算机运算速度快，并且能解决手工计算无法解决的一些计算问题，特别是用算法语言编制程序，容易为大家所掌握。随着测绘科学的发展，数字电子计算机必将成为处理测量成果不可缺少的有力计算工具。

从74年开始，我们先后编写了一些控制测量方面的计算程序，几年来，经过全国工程测量规范组、上海、山东、江苏、安徽、浙江、陕西、河北、河南、黑龙江、辽宁、内蒙、四川、湖北、湖南、山西、南京部队等有关测绘单位的应用，实践证明，计算速度快、填写原始数据简便、输出内容齐全，适用范围较广，能满足城市、大型厂矿控制测量内业的各种计算。程序用719机算法语言编写，略微修改即可适用709、TQ-16等机器。

华孝先、匡云太同志参加了本程序汇编中的三角网和水准网的程序编写与调试；王家瑄同志参加了城市测量新旧坐标换算程序的编制；陈龙飞、洪莉芳同志参加了部分程序的调试工作。全书插图由刘静绥、周宝珍同志绘画。

由于编者水平有限，书中难免有缺点和错误，期望读者批评和指正。

编者

一九八〇年五月

目 录

第一章 数学描述	(1)
§ 1-1 控制测量的概算公式	(1)
§ 1-2 控制网按间接平差计算公式	(6)
§ 1-3 控制网按条件平差计算公式	(10)
§ 1-4 法方程式组成及解算	(14)
§ 1-5 精度评定计算	(20)
§ 1-6 坐标换带计算公式	(25)
§ 1-7 城市测量新旧坐标换算公式	(26)
第二章 测量计算中的常用过程	(29)
§ 2-1 角度化弧度、弧度化角度计算过程	(29)
§ 2-2 根据坐标增量 dx 、 dy 计算方向角 α 的过程	(30)
§ 2-3 间接平差中法方程系数形成的计算过程	(30)
§ 2-4 间接平差法方程系数矩阵带宽的确定与解算的计算过程	(33)
§ 2-5 对称线性方程组的几种解算过程	(38)
第三章 控制测量计算程序	(48)
§ 3-1 坐标换带程序	(48)
§ 3-2 城市测量新旧坐标换算程序	(53)
§ 3-3 线形锁 (按角度) 严密平差程序	(62)
§ 3-4 水准网 (或三角高程) 按间接平差程序	(78)
§ 3-5 导线网按间接平差程序	(89)
§ 3-6 三角网按间接平差程序 (附有条件的间接平差法)	(115)
§ 3-7 三角网导线网联合及分别平差程序	(146)
§ 3-8 三角网按条件平差程序 (附有未知数的条件平差法)	(173)
§ 3-9 工程边角网按间接平差及精度评定程序	(217)
附录 719 机算法语言常用语句简介	(241)

第一章 数学描述

控制测量的基本任务是在地球表面上精密测定地面点的位置(x, y, H), 而地球表面近似于一个旋转椭球面, 在椭球面上进行控制网的平差和坐标计算是极其复杂的。为了计算简单和使用方便, 通常将三角网投影到高斯平面上, 使平差和坐标计算在平面上进行。虽然如此, 仍要涉及一些较为复杂的数学公式。当编制控制网平差程序时, 为了提高运算速度和精度, 适应程序的编写还需要对某些计算公式进行改造。程序设计应力求简短, 通用性强, 填写输入数据简便, 输出内容齐全, 上机操作方便。

控制网的计算通常分为概算, 平差计算和精度评定及成果表的编制三个部分。本章将分节叙述三部分计算过程的数学模型。便于阅读程序。

§ 1-1 控制测量的概算公式

一、待定点的坐标计算

待定点的坐标计算, 根据控制网形式的不同, 有下面几种计算方法。

(一) 三角网中待定点的坐标计算公式

图1-1, 已知 A, B 两点坐标 $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$, 计算 C 点坐标 (x_c, y_c) 。

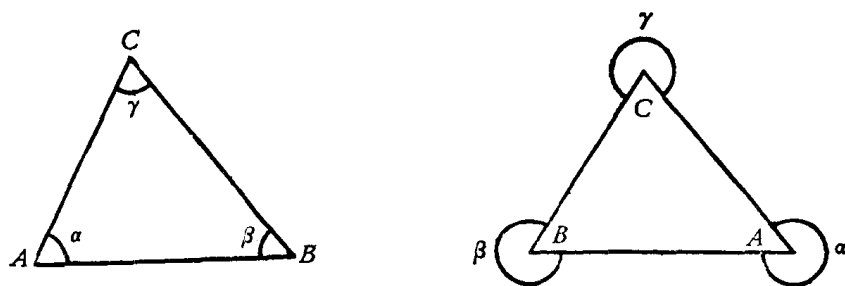


图1-1

根据戎格公式可写成如下两种算式:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{x_a \operatorname{ctg} \beta + x_b \operatorname{ctg} \alpha - y_a + y_b}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \\ y_c &= \frac{y_a \operatorname{ctg} \beta + y_b \operatorname{ctg} \alpha + x_a - x_b}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x_o &= \frac{x_a \operatorname{tg} \alpha + x_b \operatorname{tg} \beta + (y_b - y_a) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \\ y_o &= \frac{y_a \operatorname{tg} \alpha + y_b \operatorname{tg} \beta + (x_a - x_b) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 α 和 β 有下面两种约定的计算方法:

1. 约定点 A 、 B 、 C 按逆时针方向编号, 即 α 、 β 是三角形的内角。

如果原编号是顺时针方向, 则应把 A 、 B 的点号互换, 使其编号方向成为逆时针, 点的编号方向可按下面方法判断:

$$\gamma = CA \text{ 方向观测值} - CB \text{ 方向观测值}$$

若 $\gamma > 180^\circ$ 或 $-180^\circ < \gamma < 0^\circ$ 则编号为顺时针, 否则为逆时针。

2. 不论编号的方向如何, 一律约定 α 、 β 为“左角”(即 ABC 排列方向的左侧角, 如图 1-1 所示)。为了方便, 当左角大于 180° 时, 以“负角”表示。例如, 当 $\alpha = 300^\circ$ 时, 可写为:

$$\alpha = -60^\circ$$

具体计算如下:

$$\alpha' = AB \text{ 方向观测值} - AC \text{ 方向观测值}$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha' + 2\pi, & \text{当 } \alpha' < -\pi \text{ 时} \\ \alpha' - 2\pi, & \text{当 } \alpha' > \pi \text{ 时} \\ \alpha', & \text{其余} \end{cases}$$

(二) 线形网(锁)和自由网中的待定点坐标计算

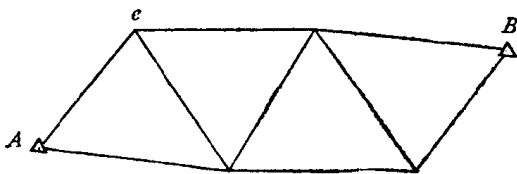


图 1-2

图 1-2 中, A 、 B 两点的坐标为已知, 为了仍使用 (1-1) 式计算各待定点的坐标, 应首先算出 e 点坐标。方法如下:

假定 A 点为坐标原点, Ae 为 x 轴, Ae 边的边长 $S'_{ae} = 1$ 米, 即假设点 A 、 e 的坐标分别为 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$, 根据各三角形的内角可以算出 B 点的假定坐标 (x'_b, y'_b) 。然后计

算 Ae 边的边长 S_{ae} 和方位角 α_{ae} :

$$\left. \begin{aligned} S_{ae} &= \frac{S_{ab}}{\sqrt{x'^2_b + y'^2_b}} \\ \alpha_{ae} &= \alpha_{ab} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y'_b}{x'_b} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式中: S_{ab} 和 α_{ab} 是已知点 A 、 B 之间的边长和方位角。

$$S_{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

$$\alpha_{ab} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(y_b - y_a)}{(x_b - x_a)}$$

则 e 点的坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x_e &= x_a + S_{ae} \cos \alpha_{ae} \\ y_e &= y_a + S_{ae} \sin \alpha_{ae} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

据此, 再按(1-1)式计算其余各待定点的坐标。

若控制网是自由网, 如图(1-3)所示, A 为已知点, S_0 为实测边。由已知边长 S_0 , 按正弦公式可算得 Ae 边长。由 Ae 边长及 Ae 边的已知方位角 (由联测方向推算得), 按(1-4)式计算 e 点坐标, 其余各待定点的坐标仍以(1-1)式计算

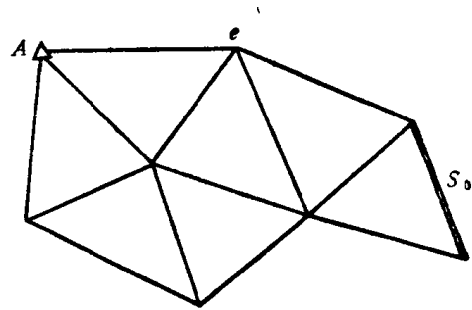


图 1-3

(三) 导线点的坐标计算
导线点的坐标计算, 均由(1-4)式计算。式中方位角 α 按左角 β_{\pm} 推算, 如图 1-4 所示。计算公式如下:

$\beta = jk$ 方向观测值 - ji 方向观测值

$$\beta_{\pm} = \begin{cases} \beta + 2\pi, & \text{当 } \beta < 0 \text{ 时} \\ \beta, & \text{其余} \end{cases}$$

$$\alpha'_{jk} = \alpha_{ji} + \beta_{\pm} + \pi$$

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} \alpha'_{jk} - 2\pi, & \text{当 } \alpha'_{jk} > 2\pi \\ \alpha'_{jk}, & \text{其余} \end{cases} \quad (1-5)$$

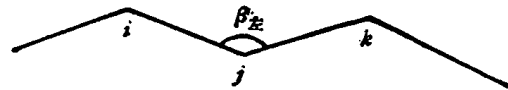


图 1-4

(四) 三边网中待定点的坐标计算

1. 按距离计算公式

图 1-5 中, A 、 B 为已知点, 观测了 S_1 和 S_2 两条边长, 求待定点 P 的坐标。

设 已知边 AB 的边长为 S_0 , 即

$$S_0 = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

利用余弦公式:

$$\cos \theta = \frac{S_0^2 + S_1^2 - S_2^2}{2 S_1 S_0}$$

按图示符号, 有:

$$\left. \begin{aligned} q &= S_1 \cos \theta = \frac{S_0^2 + S_1^2 - S_2^2}{2 S_0} \\ l &= \sqrt{S_1^2 - q^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

再根据坐标轴旋转公式, 得:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_a &= q \sin \delta + l \cos \delta \\ \Delta y_a &= q \cos \delta - l \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

δ 是已知边 AB 与 y 轴的夹角, 由图 1-5 可得:

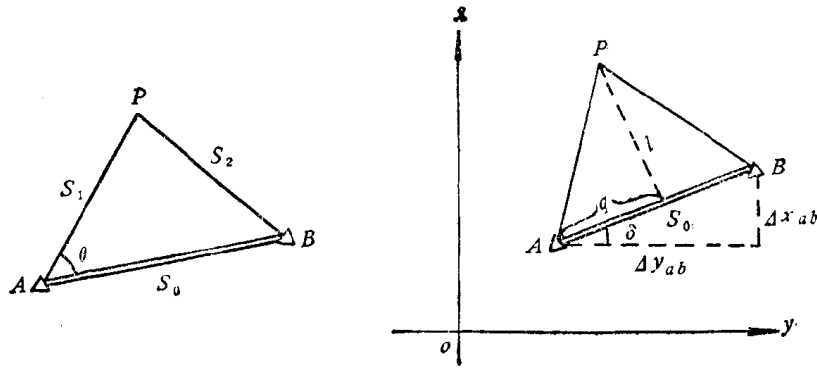


图 1-5

$$\cos \delta = \frac{\Delta y_{ab}}{S_0}; \quad \sin \delta = \frac{\Delta x_{ab}}{S_0}$$

代入(1-7)式, 得:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{ap} &= \frac{1}{S_0} (\Delta x_{ab} \cdot q + \Delta y_{ab} \cdot l) \\ \Delta y_{ap} &= \frac{1}{S_0} (\Delta y_{ab} \cdot q - \Delta x_{ab} \cdot l) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

$$\left. \begin{aligned} x_p &= x_a + \Delta x_{ap} \\ y_p &= y_a + \Delta y_{ap} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

(1-6)、(1-8)和(1-9)式就是由边长计算待定点坐标的公式。

2. 仿照角度前方交会公式计算

(1-1)式是角度前方交会的坐标计算公式, 由图 1-6 可得如下关系式:

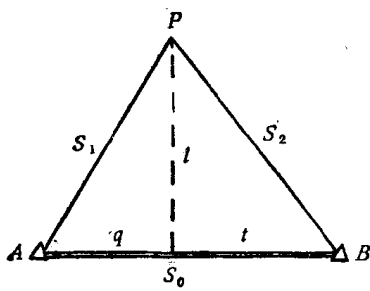


图 1-6

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} A &= \frac{q}{l}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{t}{l} \\ \frac{1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} &= \frac{l}{S_0} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

和

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{S_0^2 + S_1^2 - S_2^2}{2 S_0} \\ t &= \frac{S_0^2 + S_2^2 - S_1^2}{2 S_0} \\ l &= \sqrt{S_1^2 - q^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

将(1-10)和(1-11)式代入(1-1)式, 得

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \frac{1}{S_0} \{ t \cdot x_a + q \cdot x_b + l (y_b - y_a) \} \\ y_p &= \frac{1}{S_0} \{ t \cdot y_a + q \cdot y_b + l (x_a - x_b) \} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

二、归心改正数计算

参加平差计算的外业观测值，应是以测站点标石中心至照准点标石中心为标准。如果观测时仪器中心不是正好在标石中心的铅垂线上，就必须计算测站归心改正。同样，如果照准点的目标不是在照准点的标石中心的铅垂线上，也必须计算照准点归心改正。只有在观测值上加入上述两种归心改正数，才能得到由测站点标石中心至照准点标石中心的水平方向值或距离。

程序中限定：归心角度元素 $\theta(\theta')$ 的起始方向必须与测站零方向一致。如果不一致，应对 $\theta(\theta')$ 进行归算。

(一) 方向观测值的归心改正

设： c 为测站点归心改正数； r 为照准点归心改正数。

$$\left. \begin{aligned} c_{i,k} &= \frac{e_i \sin(m_{i,k} + \theta_i)}{S_{i,k}} \rho \\ r_{i,k} &= \frac{e'_k \sin(m_{k,i} + \theta'_k)}{S_{i,k}} \rho \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中： i 为测站点号， k 为照准点号；

e 和 θ 为测站点归心元素(长度和角元素)；

e' 和 θ' 为照准点归心元素；

$m_{i,k}$ 和 $m_{k,i}$ 为 $i-k$ 和 $k-i$ 的方向观测值；

$S_{i,k}$ 为 $i-k$ 的近似边长。

如果照准点 k 未设站观测，其方向观测值 $m_{k,i}$ 可由近似坐标反算得出(即零方向的近似方位角与 $k-i$ 方向的近似方位角之差)。

(二) 边长观测值的归心改正

在图 1-7 中，设 A_1 为仪器点， A 为标石中心， B 为照准点。测量了边长 d ，偏心距 e ，偏心角 θ ，则

$$S^2 = e^2 + d^2 - 2ed \cos \theta$$

$$S^2 - d^2 = e^2 - 2ed \cos \theta$$

$$(S-d)(S+d) = e^2 - 2ed \cos \theta$$

令 δ_s 为归心改正数， $\delta_s = S - d$ ，即

$$\delta_s = (e^2 - 2ed \cos \theta) / (S + d)$$

因为改正数 δ_s 是较小的数值，所以 S 可用近似值 ($S \approx d - e \cos \theta$) 代入，

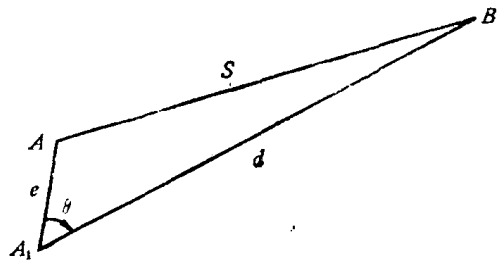


图 1-7

$$(S+d)^{-1} \approx (2d - e \cos \theta)^{-1} = \frac{1}{2d} \left(1 - \frac{e}{2d} \cos \theta \right)^{-1}$$

顾及 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$ ，即

$$(S+d)^{-1} \approx \frac{1}{2d} \left(1 + \frac{e}{2d} \cos \theta \right)$$

最后得边长归心改正数:

$$\begin{aligned} \delta_s &= (e^2 - 2ed \cos \theta) \cdot \frac{1}{2d} \left(1 + \frac{e}{2d} \cos \theta \right) = \frac{e^2}{2d} - e \cos \theta - \frac{e^3}{2d} \cos^2 \theta \\ &+ \frac{e^3}{4d^2} \cos \theta = -e \cos \theta + \frac{e}{2d} \sin^2 \theta + \frac{e^3}{4d^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (1-14)$$

当偏心距 e 较小时, 可用如下近似式

$$\delta_s = -e \cos \theta \quad (1-15)$$

三、曲率改正和距离改正数的计算

控制网的平差计算是在高斯投影平面上进行的。曲率改正和距离改正的目的是将球面上观测值(方向和距离)归算到高斯投影平面上。以 $\delta_{i,k}$ 表示曲率改正(方向变化), 以 Δ_i 表示距离改正(距离改正), 其计算公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{i,k} &= \frac{1}{3} f (x_i - x_k) (2y_i + y_k) \\ \Delta_i &= \frac{1}{\rho} f \cdot S_{i,k} \cdot y_m^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

式中:

$$y_m = \frac{1}{2} (y_i + y_k)$$

$$f = \rho / 2R^2$$

其中 x , y 和 R 均以公里为单位。

f 值可由下表查得

x	2000公里	3000	4000	5000	6000
f	$0.2549 \cdot 10^{-8}$	$0.2545 \cdot 10^{-8}$	$0.2540 \cdot 10^{-8}$	$0.2535 \cdot 10^{-8}$	$0.2530 \cdot 10^{-8}$

或

纬度 B	20°	30°	40°	50°	60°
f	$0.2548 \cdot 10^{-8}$	$0.2544 \cdot 10^{-8}$	$0.2538 \cdot 10^{-8}$	$0.2532 \cdot 10^{-8}$	$0.2527 \cdot 10^{-8}$

§ 1-2 控制网按间接平差计算公式

控制网可以按条件平差, 也可以按间接平差。当按条件平差时, 应该列出控制网必须满足的各种几何条件, 从而直接求出各观测方向(或角度)的改正数。当按间接平差时, 是以待定点的纵横坐标为未知数, 列出每个观测值的误差方程式, 从而求得待定点近似坐标的改正数。比较两种平差方法, 可见在条件平差中, 建立各类条件方程式灵活性大, 规律性较少。不易设计不附加任何信息能自动判别各类条件的平差程序。间接平差是按观测值来列出误差方程式, 只要有一个观测值就有一个误差方程式, 具有比较明显的规律性。因此, 在程序设计中, 常用间接平差法。

一、误差方程式的组成

(一) 方向观测值的误差方程式

组成误差方程式之前, 应先计算误差方程式的系数及常数项, 其算式如下:

1. 近似边长 S^0 的计算

设: i 为测站点点号; k 为照准点点号(以下均同); x^0, y^0 为近似坐标值。

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= x_k^0 - x_i^0, & \Delta y &= y_k^0 - y_i^0 \\ S_{i,k}^0 &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

2. 近似方位角 $\alpha_{i,k}^0$ 的计算

$$\alpha = \text{arc tg}(\Delta y / \Delta x)$$

$$\alpha_{i,k}^0 = \begin{cases} \alpha, & \text{当 } \Delta x > 0, \Delta y \geq 0 \\ \alpha + 2\pi, & \text{当 } \Delta x > 0, \Delta y < 0 \\ \pi/2, & \text{当 } \Delta x = 0, \Delta y > 0 \\ 3\pi/2, & \text{当 } \Delta x = 0, \Delta y < 0 \\ \alpha + \pi, & \text{当 } \Delta x < 0, \end{cases}$$

3. 近似定向角 Z_i^0 的计算

定向角的近似值可以任意选取。一般有两种计算方法。

(1) 以测站零方向的近似方位角 $\alpha_{i,0}^0$ 作为定向角近似值

$$Z_i^0 = \alpha_{i,0}^0$$

(2) 以一个测站上各方向近似定向角 $Z'_{i,k}$ 的平均值作为测站的近似定向角。

$$Z_i^0 = \sum Z'_{i,k} / n_i \quad (1-18)$$

$$Z'_{i,k} = \begin{cases} \alpha_{i,k}^0 - m_{i,k}, & \text{当 } m_{i,k} \leq \alpha_{i,k}^0 \\ 2\pi + \alpha_{i,k}^0 - m_{i,k}, & \text{当 } m_{i,k} > \alpha_{i,k}^0 \end{cases}$$

式中: $m_{i,k}$ 为 $i-k$ 的方向观测值;

$\alpha_{i,k}^0$ 为 $i-k$ 的近似方位角;

n_i 为 i 测站的方向个数。

当近似定向角接近 0° 时 (例如, 在方格网的假定坐标系中, 可能某测站的零方向是 x 轴方向), 各方向的近似定向角可能会有正有负, 亦即有时可能是 0° 附近, 也可能是 360° 附近。为了避免 0° 附近的定向角与 360° 附近的定向角取平均值, 程序规定: 在这种情况下, 均以零方向的近似定向角 Z_i^0 为标准, 当

$$|Z_i^0 - Z'_i| > \pi$$

时, 必须在该近似定向角 $\pm 2\pi$ 。

4. 误差方程式中方向系数 a 、 b 的计算

$$\left. \begin{aligned} a_{i,k} &= \frac{\sin \alpha_{i,k}^0}{S_{i,k}^0} \rho \\ b_{i,k} &= -\frac{\cos \alpha_{i,k}^0}{S_{i,k}^0} \rho \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

5 误差方程式常数项 l 的计算

$$l_{i,k} = \alpha_{i,k}^0 - (m_{i,k} + Z_i^0) \quad (1-20)$$

当 $\alpha_{i,k}^0$ 在 0° 或 360° 附近时, 应按下式计算

$$l'_{i,k} = \alpha_{i,k}^0 - (m_{i,k} + Z_i^0)$$

$$l_{i,k} = \begin{cases} l'_{i,k} - 2\pi, & \text{当 } l'_{i,k} > \pi \\ l'_{i,k} + 2\pi, & \text{当 } l'_{i,k} < -\pi \\ l'_{i,k}, & \text{其余} \end{cases}$$

6 误差方程式

误差方程式的一般形式为

$$v_{i,k} = -z_i + a_{i,k}\delta x_i + b_{i,k}\delta y_i - a_{i,k}\delta x_k - b_{i,k}\delta y_k + l_{i,k} \quad (1-21)$$

式中: z_i 为测站 i 近似定向角 Z_i^0 的改正数;

$\delta x, \delta y$ 为近似坐标 x^0, y^0 的改正数;

$a_{i,k}, b_{i,k}$ 为方向系数;

$l_{i,k}$ 为常数项。

如果测站 i 上观测了 n_i 个方向, 则对该测站可以列出 n_i 个误差方程式, 其具体形式有以下几种:

(1) 测站 i 是已知点, 则

$$v_{i,k} = -z_i - a_{i,k}\delta x_k - b_{i,k}\delta y_k + l_{i,k}$$

(2) 照准点 k 是已知点, 则

$$v_{i,k} = -z_i + a_{i,k}\delta x_i + b_{i,k}\delta y_i + l_{i,k}$$

(3) i 点和 k 点都是已知点, 则

$$v_{i,k} = -z_i + l_{i,k}$$

为了节省法方程式系数的存储单元, 我们应用史赖伯第一法则, 预先消去定向角未知数 z_i 。因而增加一个“和”误差方程式

$$[v]_i = [a]_i \delta x_i + [b]_i \delta y_i - a_{i,k} \delta x_k - b_{i,k} \delta y_k - \dots + [l]_i,$$

$$\text{权 } P = -\frac{1}{n_i} \quad (1-22)$$

记号 $[]_i$ 表示按测站 i 求和, 如 $[a]_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_{i,k}$ 。 n_i 为测站 i 的方向个数。

(二) 边长观测值的误差方程式

工程控制网的布设方案, 有时可以是边角网、导线网或三角与导线联合布网等, 在这些网中必须进行边长观测, 其边长观测值作为平差元素之一, 为此需要列出边长观测值的误差方程式。

设 $S_{i,k}$ 为 $i-k$ 边的边长观测值, 其改正数为 $v_{i,k}$ 。平差后应满足

$$S_{i,k} + v_{i,k} = \sqrt{(x_i^0 + \delta x_i - x_k^0 - \delta x_k)^2 + (y_i^0 + \delta y_i - y_k^0 - \delta y_k)^2}$$

按泰勒级数展开, 并取至一次项, 则

$$v_{i,k} = -\frac{\Delta x_{i,k}^0}{S_{i,k}} \delta x_i - \frac{\Delta y_{i,k}^0}{S_{i,k}} \delta y_i + \frac{\Delta x_{i,k}^0}{S_{i,k}} \delta x_k + \frac{\Delta y_{i,k}^0}{S_{i,k}} \delta y_k + l_{i,k}$$

或写为

$$v_{ik} = -\cos \alpha_{ik}^0 \delta x_i - \sin \alpha_{ik}^0 \delta y_i + \cos \alpha_{ik}^0 \delta x_k + \sin \alpha_{ik}^0 \delta y_k + l_{ik} \quad (1-23)$$

式中

$$l_{ik} = \sqrt{(x_k^0 - x_i^0)^2 + (y_k^0 - y_i^0)^2} - S_{ik}$$

一般以方向观测值的权为单位权，如果以 m_β 为角度中误差，则方向中误差为 $m_\beta / \sqrt{2}$ 。

根据权与中误差平方成反比，则边长的权 P_s 为

$$P_s = \frac{m_\beta^2}{2m_s^2}$$

$$m_s = \sqrt{\lambda^2 + (\sigma \cdot s)^2}$$

式中： λ 为电磁波测距仪的常误差； σ 为与边长成比例的误差。

如果 i 点是已知点，则(1-23)式为

$$v_{ik} = \cos \alpha_{ik}^0 \delta x_k + \sin \alpha_{ik}^0 \delta y_k + l_{ik}, \text{ 权 } P_s$$

如果 k 点是已知点，则(1-23)式为

$$v_{ik} = -\cos \alpha_{ik}^0 \delta x_i - \sin \alpha_{ik}^0 \delta y_i + l_{ik}, \text{ 权 } P_s$$

误差方程式(1-21)和(1-23)式，是由非线性函数化为线性函数，略去高次项后获得的结果。当改正数 δx ， δy 很小时，它们是正确的。就是说，近似坐标 x^0 ， y^0 要有足够的精度。为此，在程序设计时我们采用迭代方法，将前一次平差所得的坐标当作本次的近似坐标，反复进行计算，直至 δx ， δy 小于 1 毫米(一般只需迭代 1~2 次)。

二、间接平差中的条件方程式

在控制网中，有时为了提高平差元素的精度，除原有的起算数据外，又实测了若干条三角网的边长和方位角，作为起算数据。平差时将这些数据作为固定值，就应列出起算边条件和方位角条件。

(一) 起算边条件

起算边条件也称基线条件，条件方程式的形式与(1-23)式类似，只是在该式中的实测边长不加改正数，即 $v_{ik} = 0$ 。于是，其条件方程式为

$$-\cos \alpha_{ik}^0 \delta x_i - \sin \alpha_{ik}^0 \delta y_i + \cos \alpha_{ik}^0 \delta x_k + \sin \alpha_{ik}^0 \delta y_k + w_s = 0 \quad (1-24)$$

式中： $w_s = S_{ik}^0 - S_{ik}$ ；

$$S_{ik}^0 = \sqrt{(x_k^0 - x_i^0)^2 + (y_k^0 - y_i^0)^2}；$$

S_{ik} 为实测边长，作为固定值。

(二) 方位角条件

方位角条件的一般形式如下：

$$a_{ik} \delta x_i + b_{ik} \delta y_i - a_{ik} \delta x_k - b_{ik} \delta y_k + w_a = 0 \quad (1-25)$$

式中： a_{ik} ， b_{ik} 为方向系数，按(1-19)式计算；

$$w_a = \alpha_{ik}^0 - \alpha_{ik}；$$

α_{ik}^0 为由近似坐标计算的近似方位角；

α_{ik} 为实测方位角，作为固定值。

通常联测方向的测站点 i 为已知点，则条件方程式为

$$-a_{ik} \delta x_k - b_{ik} \delta y_k + w = 0$$

§ 1-3 控制网按条件平差计算公式

在第三章中，我们编写了三角网按条件平差法程序，其条件方程式如下：

一、三角网中各类条件方程式

(一) 三角形图形条件方程式

如图 1-8 所示

$$\left. \begin{aligned} -v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5 + v_6 + w_a &= 0 \\ w_a &= (2-1) + (4-3) + (6-5) - 180^\circ \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

式中：(2-1)表示 A 角，(4-3)表示 B 角等；闭合差是经过归心改正和曲率改正后的观测值计算(以下同)。

(二) 极条件方程式

图 1-9，以 A 为极点的大地四边形极条件

$$\begin{aligned} (\delta_{6-4} - \delta_{6-4})v_4 - \delta_{6-4}v_5 + \delta_{6-4}v_6 + \delta_{19-17}v_{17} - \delta_{19-18}v_{18} + (\delta_{19-18} - \delta_{19-17})v_{19} \\ + \delta_{21-20}v_{20} - (\delta_{21-20} + \delta_{22-21})v_{21} + \delta_{22-21}v_{22} + w_d = 0 \end{aligned} \quad (1-27)$$

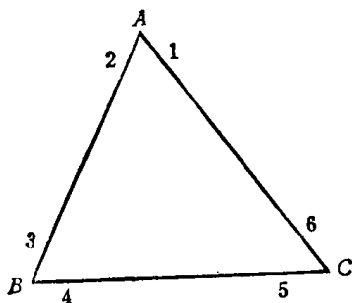


图 1-8

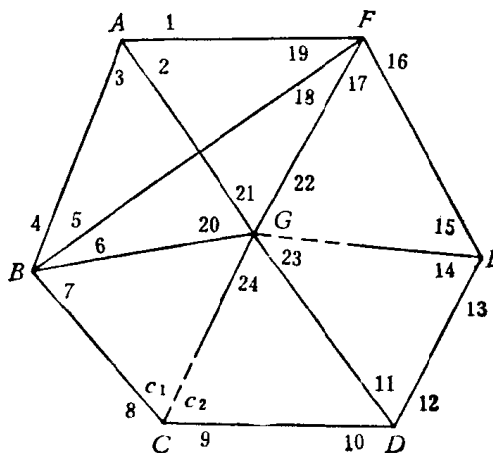


图 1-9

$$w_d = \lg \frac{\sin(6-4)\sin(22-21)\sin(19-18)}{\sin(21-20)\sin(19-17)\sin(5-4)}$$

式中： δ_{j-i} 为角度(j-i)的正弦对数一秒表差，即

$$\delta_{j-i} = 2.1055 \operatorname{ctg}(j-i)$$

图 1-9，以 G 为极点的中点多边形极条件

$$\begin{aligned} -\delta_{6-5}v_5 + (\delta_{6-5} + \delta_{7-6} + \delta_{c_1})v_6 - (\delta_{7-6} + \delta_{c_1})v_7 - (\delta_{11-10} + \delta_{c_2})v_{10} \\ + (\delta_{11-10} + \delta_{12-11} + \delta_{c_2})v_{11} - \delta_{12-11}v_{12} - \delta_{14-13}v_{13} + (\delta_{14-13} + \delta_{15-14})v_{14} \\ - \delta_{15-14}v_{15} - \delta_{17-16}v_{16} + (\delta_{17-16} + \delta_{18-17})v_{17} - \delta_{18-17}v_{18} - \delta_{c_1}v_{20} - \delta_{c_2}v_{22} \\ + (\delta_{c_2} + \delta_{c_1})v_{24} + w_c = 0 \end{aligned} \quad (1-28)$$

式中:

$$w_c = \lg \frac{\sin(6-5)\sin c_1 \sin(11-10)\sin(14-13)\sin(17-16)}{\sin(18-17)\sin(7-6)\sin c_2 \sin(12-11)\sin(15-14)}$$

$$c_1 = 180^\circ - (7-6) - (20-24)$$

$$c_2 = 180^\circ - (11-10) - (24-23)$$

(三) 方位角条件方程式

图 1-10 中, 由 BA 的方位角, 经各三角形内角推算得 BA 的方位角, 应与原来 BA 方位角相等。其条件方程式为

$$v_1 - v_2 + v_5 - v_6 + v_8 - v_{10} - v_{15} + v_{16} + v_{18} - v_{19} + w_c = 0 \quad (1-29)$$

$$w_c = -(2-1) - (10-8) + (16-15) - (19-18) - (6-5) + 540^\circ$$

(四) 起算边条件方程式

图 1-11 中, 由 $AB-CD$ 的起算边条件方程式:

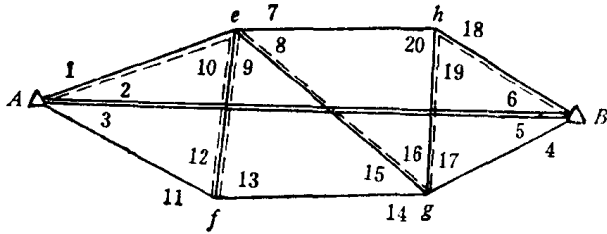


图 1-10

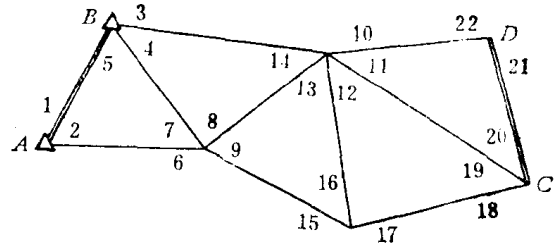


图 1-11

$$\begin{aligned} & -\delta_{2-1}v_1 + \delta_{2-1}v_2 - \delta_{4-3}v_3 + \delta_{4-3}v_4 + \delta_{7-6}v_5 - \delta_{7-6}v_7 - \delta_{9-8}v_8 + \delta_{9-8}v_9 \\ & -\delta_{11-10}v_{10} + \delta_{11-10}v_{11} + \delta_{14-13}v_{12} - \delta_{14-13}v_{14} + \delta_{16-15}v_{15} - (\delta_{16-15} \\ & + \delta_{17-16})v_{16} + \delta_{17-16}v_{17} + \delta_{19-18}v_{18} - \delta_{19-18}v_{19} + \delta_{22-21}v_{21} - \delta_{22-21}v_{22} \\ & + w_c = 0 \end{aligned} \quad (1-30)$$

$$w_c = \lg \frac{AB \sin(2-1)\sin(4-3)\sin(9-8)\sin(17-16)\sin(11-10)}{CD \sin(7-6)\sin(14-13)\sin(16-15)\sin(19-18)\sin(22-21)}$$

(五) 坐标条件方程式

1. 纵坐标条件

图 1-12 中的纵坐标条件:

$$\begin{aligned} & (x_c - x_b)\{-\delta_{2-1}v_1 + \delta_{2-1}v_2 + \delta_{9-8}v_8 \\ & - \delta_{9-8}v_9\} + (x_c - x_d)\{-\delta_{4-3}v_3 \\ & + \delta_{4-3}v_4 + \delta_{14-13}v_{13} - \delta_{14-13}v_{14}\} \\ & + (x_c - x_e)\{-\delta_{11-10}v_{10} + \delta_{11-10}v_{11} \\ & + \delta_{7-6}v_6 - \delta_{7-6}v_7\} - 2.1055\{(y_c - y_b)(+v_4 - v_6) + (y_c - y_d)(-v_8 \\ & + v_{10}) + (y_c - y_e)(v_{12} - v_{13})\} + 434.29w_z = 0 \end{aligned} \quad (1-31)$$

$$w_z = \Delta x_{b_c} + \Delta x_{d_c} + \Delta x_{e_c} - (x_c - x_b)$$

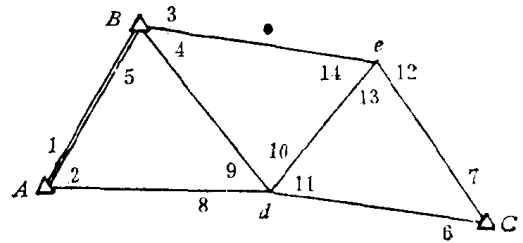


图 1-12

2. 横坐标条件

图 1-12 中的横坐标条件:

$$\begin{aligned} & (y_c - y_b) \{-\delta_{2-1}v_1 + \delta_{2-1}v_2 + \delta_{9-8}v_8 - \delta_{9-8}v_9\} + (y_c - y_d) \{-\delta_{4-3}v_3 + \delta_{4-3}v_4 \\ & + \delta_{14-13}v_{13} - \delta_{14-13}v_{14}\} + (y_c - y_e) \{-\delta_{11-10}v_{10} + \delta_{11-10}v_{11} + \delta_{7-6}v_6 \\ & - \delta_{7-6}v_7\} + 2.1055 \{(x_c - x_b)(v_1 - v_5) + (x_c - x_d)(-v_6 + v_{10}) \\ & + (x_c - x_e)(v_{12} - v_{18})\} + 434.29w_y = 0 \end{aligned} \quad (1-32)$$

$$w_y = \Delta y_{bd} + \Delta y_{de} + \Delta y_{ec} - (y_c - y_b)$$

式中: Δx , Δy 为坐标增量

$$\Delta x_{ij} = S_{ij}^0 \cos \alpha_{ij}^0;$$

$$\Delta y_{ij} = S_{ij}^0 \sin \alpha_{ij}^0;$$

(六) 横向投影条件

图 1-10 中的横向投影条件是: 以 A 点为坐标原点, AB 为 x 轴的横坐标条件, 其条件方程式为:

$$\begin{aligned} & (y'_b - y'_c) \{-\delta_{8-1}v_1 + \delta_{8-1}v_8 + \delta_{12-11}v_{11} - (\delta_{12-11} + \delta_{18-12})v_{12} - \delta_{18-12}v_{18} \\ & + \delta_{15-14}v_{14} - \delta_{15-14}v_{16}\} + (y'_b - y'_g) \{-\delta_{8-7}v_7 + \delta_{8-7}v_8 + \delta_{20-19}v_{19} \\ & - \delta_{20-19}v_{20}\} + (y'_b - y'_h) \{-\delta_{17-16}v_{16} + \delta_{17-16}v_{17} + \delta_{8-4}v_4 - \delta_{8-4}v_6\} \\ & + 2.1055 \{(x'_b - x'_c)(v_1 - v_2) + (x'_b - x'_g)(-v_8 + v_{10}) + (x'_b - x'_h)(-v_{15} + v_{16}) \\ & + (x'_b - x'_i)(-v_{18} + v_{19})\} + 434.29w_y = 0 \end{aligned} \quad (1-33)$$

$$w_y = \Delta y'_{bc} + \Delta y'_{cg} + \Delta y'_{gh} + \Delta y'_{hb}$$

式中: x'_i , y'_i 和 $\Delta y'$ 均是假定坐标系中的数值。

二、附有未知数的条件方程式

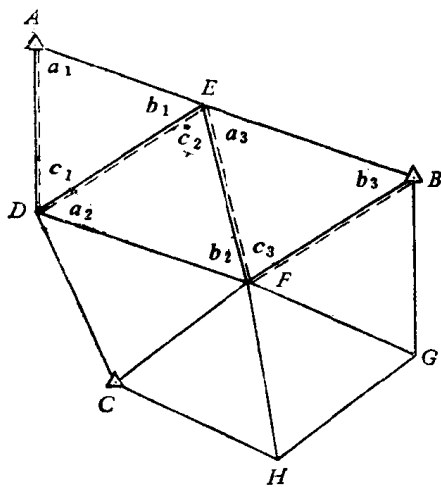


图 1-13

图 1-13 的线形网是在三个已知点 A、B、C 中插入 5 个待定点。有七个图形条件, 一个极条件和二个坐标条件, 其中坐标条件不能直接写出。为此, 我们引入 AD 边的边长和方位角作为未知数 (相当于 D 点的坐标作为未知数), 可以列出四个坐标条件。每个坐标条件都含有这两个未知数, 因此可将其中两个方程式的该未知数, 代入另两个方程式中相应的未知数中去, 消去二个未知数后得两个坐标条件方程式。

上述条件方程式中的未知数, 也可以不预先消去, 而是采用附有未知数条件平差法。

AD 边长和方位角的近似值 (即未知数的

近似值), 按(1-3)式计算。

坐标条件方程式(为书写方便以角度表示, 并以图 1-13 中 A—B 为例);

设: 已知坐标 $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$;