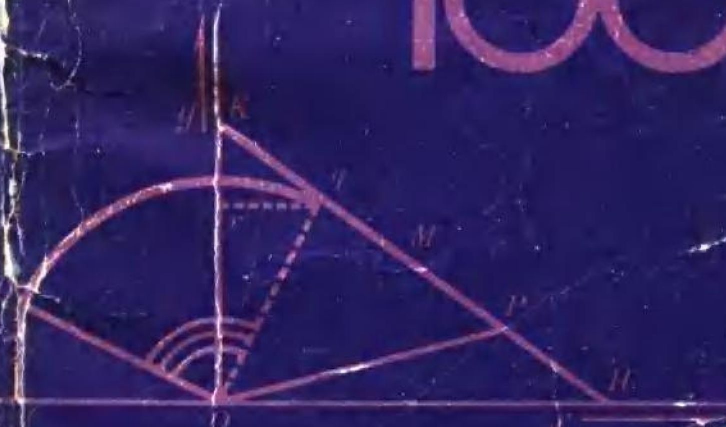
100个著名初等数学问题

历史和解



100个著名初等数学问题

——历史和解

〔德〕H. 德里 著

上海科学技术出版社

Triumph der Mathematik,

Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur

Heinrich Dörrie

Physica-Verlag, Würzburg, Germany, 1958

中文译自英文版:

100 Great Problems of Elementary Mathematics

Their History and Solution

Translated by David Antin, New York,

Dover Publications, Inc. 1965

100个著名初等数学问题

——历史和解

〔德〕H. 德里　著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　　江西印刷公司印刷

开本 787×1092 1/32　印张 13.75　字数 300,000

1982年8月第1版　1982年8月第1次印刷

印数 1—55,300

统一书号: 13119•999　定价: (科四) 1.25 元

出 版 说 明

海因里希·德里(Heinrich Dörrie)所著的«100个著名初等数学问题——历史和解»收集了西方数学历史发展中颇具影响的一百则初等数学方面的题目。书中侧重介绍了这些名题的解法、证明与有关定理,同时对发现和提出这些名题的著名数学大师们(如阿基米德、牛顿、欧拉、高斯等)的生平及有关的历史背景也作了简要的叙述。全书内容丰富,叙述深入浅出,凡是对数学有兴趣的读者,尤其是广大青少年数学爱好者,都可以根据自己的水平,从书中读到最适合的算题。阅读本书能使大家了解数学发展史上的成就,并启迪人们的科学思维。

本书原著为德文版,英文版书名为«100 Great Problems of Elementary Mathematics——Their History and Solution»。

本书由江苏省技术资料翻译复制公司组织有关同志翻译、校阅。参加翻译的有:罗保华(第1—10、27—38、48—58、67—74题),杨骥江(第11—26题),谭学金(第77—100题),朱建民(第42—47题),池贵法(第59—62题),郭留宝(第63—66题),王秀芝(第39—41、75—76题)。由李继先、丁祖棪、周家祥、许馨、成恒德五位工程师分别担任审校工作。并由南京师范学院数学教研室的沈超教授、涂光泽、吴蔚先副教授对译文进行了复校。

本书在内容和出版方面如有不妥之处,恳请读者批评指正。

前　言

一本收集倍受推崇而又使人怀念其起源的初等数学算题及其简明扼要、通俗易懂解法的书，长期以来似乎是我的一项必须做而又有吸引力的任务。

从那些既无时间又无机会详细了解高等数学的读者的角度来看，内容限制在初等数学是可取的。然而，尽管有这样的限制，在我们眼前已经展现了一幅绚丽多彩而又引人入胜的画面，一幅使人会产生数学方法何其错综复杂的惊奇思想的画面，一幅使许多对数学有兴趣的人和乐于从事数学的独特思维过程的人陶醉的画面。在本书中，将发现许多数学艺术的明珠，即那些数学名题。它们的解答，通过高斯、欧拉、斯坦纳及其他人的成就，表达了数学思想方面难以置信的胜利。

我确定了整整一百题。由于许多问题及其解法尽管陈述得非常简炼，但仍然需要相当长的篇幅，这样就不得不插入一定数量的数学小品文作为补偿。然而这些小题目可能恰好是数学小品文的真正珍宝，它们将吸引众多的读者，并为科学皇后赢得新的赞美者。

我们已经指出，不需要读者具备高等分析的知识。因此，在处理重要的无穷级数时就不能用泰勒展开式。然而，我希望我们作出的推导，特别是关于正弦级数及余弦级数引人注目的推导，即使是数学上老练的读者，也会感到满意和有吸引力。

另一方面，在某些问题中，例如欧拉的四面体问题与异面

直线问题，作者相信利用最简单的矢量分析的概念是必要的。矢量法的简洁而雅致的显著优点是那样的明显，为掌握它所需的时间和努力又是那样的少，以致这里给出的矢量方法无疑将激励许多读者浏览这一吸引人的领域。

至于其他部分，熟悉初等数学的定理，阅读本书就不会遇到很大的困难。关于这一点，小题目的插入，事实上使本书更受欢迎，它使数学基础较差的读者，在读完这些简单问题之后，又会钻研较难的问题。

正因为如此，本书的出版，将会在唤起和传播数学思想的兴趣和快乐方面发挥其作用。

H.德里

1932年于[德]威斯巴登

第二版前言

本书第二版有少量的修改。删去了费马-高斯不可能性定理证明的不充分部分，用历史的观点对待了第94题，南北极黑夜长短问题与其他问题的关系不大，故以水平稍高的“正割及正切级数的安德烈推导法”替换。

H. 德里

1940年春于[德]威斯巴登

目　录

算 术 题

平面几何题

圆锥曲线和摆线题

立体几何题

航海与天文学题

极　　值

算 术 题

第1题 阿基米德分牛问题

太阳神有一牛群，由白、黑、花、棕四种颜色的公、母牛组成。

在公牛中，白牛数多于棕牛数，多出之数相当于黑牛数的$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$；黑牛数多于棕牛数，多出之数相当于花牛数的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$；花牛数多于棕牛数，多出之数相当于白牛数的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$。

在母牛中，白牛数是全体黑牛数的$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$；黑牛数是全体花牛数的$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$；花牛数是全体棕牛数的$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$；棕牛数是全体白牛数的$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)$。

问这牛群是怎样组成的？

解 如果用字母 X、Y、Z、T 分别表示白、黑、花、棕各色的公牛数；用 x, y, z, t 分别表示白、黑、花、棕各色母牛数，则得这 8 个未知数的如下 7 个方程：

(1) $$X-T=\frac{5}{6}Y,$$

(2) $$Y-T=\frac{9}{20}Z,$$

(3) $$Z-T=\frac{13}{42}X,$$

(4) $$x=\frac{7}{12}(Y+y),$$

(5) $$y=\frac{9}{20}(Z+z),$$

(6) $$z=\frac{11}{30}(T+t),$$

(7) $$t=\frac{13}{42}(X+x)。$$

由方程(1)，(2)，(3)，得 $6X-5Y=6T$，$20Y-9Z=20T$，$42Z-13X=42T$。以这三个方程解三个未知数 X，Y，Z，得：

$$X=\frac{742}{297}T,\quad Y=\frac{178}{99}T,\quad Z=\frac{1580}{891}T。$$

因为 891 和 1580 没有公因子，T 必定是 891 的某一整倍数——假设为 G 倍，因此得

(I) $$\begin{cases} X=2226G, & Y=1602G, \\ Z=1580G, & T=891G。\end{cases}$$

若将这些值代入方程(4)，(5)，(6)，(7)，得下列方程：

$$12x-7y=11214G,\quad 20y-9z=14220G,$$

$$30z-11t=9801G,\quad 42t-13x=28938G。$$

解这些方程的四个未知数 x，y，z，t，得

(II) $$\begin{cases} cx=7206360G, & cy=4893246G, \\ cz=3515820G, & ct=5439213G, \end{cases}$$

其中，c 是质数 4657。因为在各式右边 G 的系数中没有一个可以被 c 整除，所以 G 必定是 c 的整数倍：

$$G=cg。$$

如果把这个 G 值代入(I)和(II)，最后可得到下列各关系式：

(I′) $$\begin{cases} X=10366482g, & Y=7460514g, \\ Z=7358060g, & T=4149387g, \end{cases}$$

(II′) $$\begin{cases} x=7206360g, & y=4893246g, \\ z=3515820g, & t=5439213g, \end{cases}$$

这里 g 可以是任何正整数。

所以，本题具有无数组解。若指定 g 值为 1，则得下列最小数值的解：

白公牛：	10,366,482；	白母牛：	7,206,360；
黑公牛：	7,460,514；	黑母牛：	4,893,246；
花公牛：	7,358,060；	花母牛：	3,515,820；
棕公牛：	4,149,387；	棕母牛：	5,439,213。

史料 如上面解答所示，至少依据目前的概念，分牛问题确切地说不能被认为是个很难的问题。然而，由于在古代常常把一道难解的题叫作*分牛问题*或者叫作*阿基米德题*，特别考虑到阿基米德(Archimedes)的其他辉煌成就，以及他把这个分牛之题献给古代希腊后期亚力山大城的天文学家厄拉多塞尼(Eratosthenes)的这一事实，可以设想以上所述及的问题的方式并不代表阿基米德问题完整和原始的形式。

G. E. 莱辛(Gotthold Ephraim Lessing)于1773年在沃尔芬比特尔图书馆发现一本希腊文手抄本，其中就有一篇关于该题"更完整"的阐述。该题由22组对偶句组成(或称为韵文)，以诗歌形式出现：

"朋友，请准确无误地数一数太阳神的牛群。
　要数得十分仔细，如果你自认为还有几分聪明：
多少头牛在西西里岛草地上吃过草，
　它们分为四群，在那里来往踱步。
各群颜色不同：第一群象牛乳那样洁白，
　第二群闪耀着深乌木般的光泽，
第三群毛色棕黄，第四群满身斑斓，
　每群中公牛数总大大超过母牛。
现在，告诉你这些牛群间的比例：

白牛数等于棕牛数再加上
黑牛数的三分之一和二分之一。
此外，黑牛数为花牛数的四分之一
加五分之一，再加上全部棕牛。
朋友，最后你必须记住，
花牛数是白牛的六分之一加七分之一
再加上全部棕色母牛。
但是母牛群中，比例却大不相同：
白母牛等于
黑色公、母牛全部的三分之一加四分之一。
而黑母牛为全部花牛的
四分之一加五分之一，这里要注意，
每头花母牛和花公牛都要算进去。
同样，花母牛的头数
是全部棕牛的五分之一加六分之一。
最后，棕色母牛与全部白牛的
六分之一加七分之一相等。
朋友，如果你能确切告诉我，
这些膘壮肌肥、毛色各殊的公牛母牛，
一共多少聚集在那里？
这样你才不愧为精通计数。
但是你还算不上一个聪明人，
除非用我给出的新数据来回答问题：
当所有黑白公牛齐集在一起，
就排出一个阵形，纵横相等；
辽阔的西西里原野，
布满大量的公牛。