函数论方法

上册

庹克平 李风友 编著

天津师范学院数学系

函 数 论 方 法

上 册

庹克平 李凤友 编著

梁鸿绩 校阅

天津师范学院数学系

内 容 提 要

本书包括作为高等师范院校基础课之一的《复变函数论》的内容，侧重于方法的阐述。上册包括复数、点集、复变函数、初等函数、保角映射与线性变换、复变函数的积分六章，有例题220余题，并附有相当数量的习题。可作为高等师范院校和工科院校《复变函数论》教学参考书和科技人員自学《复变函数论》参考书。

函数论方法(上册)
编著：庞克平　李凤友
校阅：梁鸿绩

印刷：天津大学印刷厂
1980年5月

前　　言

本书是以我们在天津师范学院数学系讲授《复变函数论》的教学实践为基础写成的。全书分上、下两册，共十一章。上册包括复数、点集、复变函数、初等函数、保角映射与线性变换、复变函数的积分六章。下册包括数项级数与函数项级数、幂级数与台劳（Taylor）级数、罗朗（Laurent）级数与单值函数的孤立奇异点、残数理论及其应用、解析开拓五章。

每章开头部分都有该章内容的概要介绍。对许多内容阐明了与数学分析的异同点，还指出了学习中应注意的事项。由于本书侧重于方法的阐述，因而主要篇幅是用以例题的解答。全书共有例题 450 余题（上册 220 余题，下册 230 余题）。我们的愿望是，给读者提供一些参考资料，读者通过阅读这些例题，能对复变函数论的方法有一个概括的理解。例题的选择，力求照顾到各种类型，例题的解答比较详尽，许多题目是一题多解。每章后面还附有相应的习题，作为读者练习和自我检查之用，全书共有习题 350 余个。

根据我们的体会，上册中的第二章“点集”，是相对独立的，因而写得较细，既使读者不参看其他书，阅读本章也不会发生什么困难。但由于该章内容越出了基础课《复变函数论》的范围，读者根据自己的需要，略去不读亦可。第四章的第三节和第五章，难度大一些，所以这两部分内容也尽量写得细一点。

本书承蒙河北大学函数论教研室主任梁鸿绩先生详细审阅

大部初稿，我系函数论教研室主任田国铭先生给予了热情指导并审阅了部分初稿，我系王国瑞先生帮助翻译了不少日文资料，在此，特向以上三位先生致以衷心谢意。在本书编写出版过程中，庞宗昱、苏仲阳、李正明、张文斌、刘同觉、吴学曾、王耀松、冯长河诸同志给予了许多热情帮助，谨向以上同志表示衷心感谢。在本书编写出版过程中，一直得到系领导的鼓励、关怀和支持，我们对此也深为感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，因而谬误之处在所难免，诚恳希望读者批评指正。

作者　一九八〇年一月于天津师院

目　录

第一章　复数

第二章　点集

第三章　复数函数

第一章 复 数

§1 复数的运算

1.1 复数的三种表示法

1\. **定义** 如果a、b是实数，则$a+ib$就称为复数。a和b分别称为复数Z的实部和虚部，记为R_eZ和I_mZ。若$b=0$则可视为实数；若$a=0$称为纯虚数。i称为虚数单位，并规定$i^2=-1$。

两个复数当且仅当它们的实虚部分别相等时，才称为相等。

复数也可用具有一定顺序的实数对(a,b)来定义。

2. 复数的三种表示法

$Z=a+ib$的形式称为复数的代数式。

复数$Z=a+ib$可以视为向量$\overrightarrow{OZ}$（如图1.1）。向量$\overrightarrow{OZ}$的长$r=|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$称为复数Z的模或绝对值，极角θ称为复数的幅角，记作$\theta=\arg Z$。对于每一个复数Z，它的幅角有无穷多个值，彼此相差$2k\pi$（k为整数）。满足$-\pi<\arg Z\leqslant\pi$的幅角称为主值。数0的幅角没有意义。

根据直角坐标与极坐标的关系：

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

复数Z可表为：

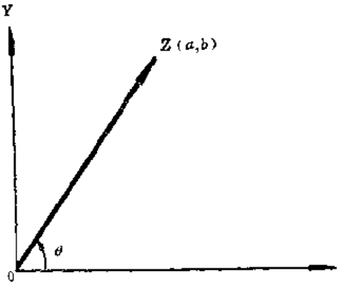

图 1.1

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

它称为复数的三角函数式。

由尤拉公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，又可把复数写成指数形式：

$$Z = re^{i\theta}.$$

复数的三种表示法，虽然形式不同，但本质上是一回事。由于形式不同，使用各有其便。

1.2 复数的运算

这里着重指出，二个复数 Z_1 与 Z_2 的加法与减法和两个向量的加法与减法一样（平行四边形法则，如图 1.2）。

但两个复数相乘 $Z_1 \cdot Z_2$，则和向量不同，用三角形式与指数形式表示就有：

若 $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$，

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$.

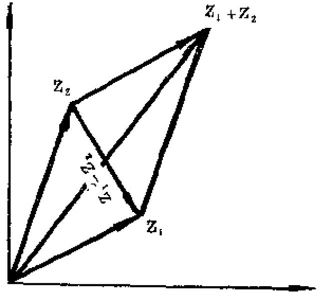

图 1.2

则 $$Z_1\cdot Z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$
$$=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

由此推出：

$$|Z_1\cdot Z_2|=|Z_1|\cdot|Z_2|,$$
$$\arg(Z_1\cdot Z_2)=\arg Z_1+\arg Z_2. \qquad (1)$$

这说明两个复数的积 $Z_1\cdot Z_2$ 是一个向量：即在同一平面内把 Z_1 伸长（压缩）r_2 倍，再旋转 θ_2 角度而成。

两个复数的商的三角形式或指数形式为：

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

即 $$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\quad \arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=\arg Z_1-\arg Z_2. \qquad (2)$$

注意：公式(1)、(2)对幅角的主值不一定成立。例如：设 $Z_1=-1$，$Z_2=i$，若限定是主值，则公式（1）不成立。而当 $Z_1=-1$，$Z_2=-i$ 时，（2）式不成立。对公式（1）、（2），一般可作如下理解：

A）公式右端 $argZ_1$ 与 $argZ_2$ 是指主值，而左端则是积或商的某一个幅角。

B）两端各表幅角的集合。

C）两端允许相差 2π 的倍数。即把等式写成

$$argZ_1\cdot Z_2=argZ_1+argZ_2+2k\pi.$$

其中 k 为整数，$argZ$ 表示主值。

应用数学归纳法，可将两个复数相乘的法则推广。若 n 为正整数，则

$$Z^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta)=r^ne^{in\theta},$$

其中 $$Z=r(cos\theta+isin\theta)=re^{i\theta}.$$

于是

$$|Z^n|=|Z|^n,\ arg(Z^n)=nargZ. \quad (3)$$

令 $Z^0=1$，$Z^{-m}=\dfrac{1}{Z^m}$，

则上面的法则当 n 为负整数时亦成立。

特别，当 $r=1$ 时，便得到著名的 De—Moivre 公式：

$$(cos\theta+isin\theta)^n=cosn\theta+isinn\theta. \quad (4)$$

这样，$cosn\theta$ 与 $sinn\theta$ 便可用 $cos\theta$ 与 $sin\theta$ 表示出来。

还须指出，公式（3）不能理解为两端幅角值的整个集合相等。

因为 $arg(Z^n)=narg_0Z+2k\pi$，

而 $nargZ=n\cdot arg_0Z+n\cdot 2k\pi$，其中 arg_0Z 表示主值。

关于开方运算：即求复数$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$，$\alpha \neq 0$的$n$次根，是相当于解二项方程：

$$Z^n = \alpha.$$

令 $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$，代入上式，得

$$Z = \sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

其中$\sqrt[n]{r}$代表r的正n次根，$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

由此得到，一个不等于零的复数的n次根有n个，它们的模都相同，它们的幅角是均匀间隔分布。从几何上看，n次根是正n边形的各个顶点。

注：复数不是有序体。即不管怎样规定它的大小都不能成为有序体。如：

若 $i > 0$，则 $i^2 > 0$，即 $-1 > 0$；

若 $i < 0$，则 $-i > 0$，从而 $-i^2 = 1 < 0$.

因此，不论怎样定义它的序都不能成为有序体。

1.3 共轭复数及绝对值

1.共轭复数

若复数$Z = a + ib$，则称$a - ib$为Z的共轭复数，记作$\overline{Z}$。由定义不难得出如下性质：

A）$\overline{\overline{Z}} = Z$；

B）$R_e Z = \dfrac{Z + \overline{Z}}{2}$；$I_m Z = \dfrac{Z - \overline{Z}}{2}$；

C）若用$R(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$表示施于复数Z_1，Z_2，$\cdots$，Z_n的任一有理运算，则

$$\overline{R(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)} = R(\overline{Z_1}, \overline{Z_2}, \cdots, \overline{Z_n}).$$

2. 绝对值的等式与不等式

几个常用的等式与不等式：

A) $|Z|^2 = Z \cdot \overline{Z}$, $|Z| = |\overline{Z}|$;

B) $|Z_1 + Z_2| \leqslant |Z_1| + |Z_2|$，特别 $|a + ib| \leqslant |a| + |b|$;

C) $|Z_1 - Z_2| \geqslant ||Z_1| - |Z_2||$;

D) $$|Z_1 + Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2R_e Z_1 \overline{Z_2} = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2R_e \overline{Z_1} Z_2;$$

E) $|Z_1 - Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_2|^2 - 2R_e Z_1 \overline{Z_2}$.

1.4 例题

例1. 计算 $\dfrac{1-i}{1+i}$.

解 分子分母同乘以$(1-i)$，得

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i.$$

例2. 计算 $(1+4i)^3$

解 $(1+4i)^3 = 1 + 3(4i) + 3(4i)^2 + (4i)^3 = -47 - 52i$.

例3. 设 $Z = x + iy$，其中x、y为实数，求下列各数的实部和虚部：

$$\frac{1}{Z}; \qquad \frac{Z-1}{Z+1}.$$

解 $$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

故 $R_e\left(\dfrac{1}{Z}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $I_m\left(\dfrac{1}{Z}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{Z-1}{Z+1}=\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}=\frac{[(x-1)+iy][(x+1)-iy]}{(x+1)^2+y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+i\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

故 $R_e\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}$;

$$I_m\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

例4. 计算 $\sqrt{-i}$。

解 [方法一] 令 $\sqrt{-i}=x+iy$，则

$$(x+iy)^2=-i,$$

等式左端展开后，令实、虚部分别相等，得

$$\begin{cases}x^2-y^2=0, & (1)\\ 2xy=-1. & (2)\end{cases}$$

$(1)^2+(2)^2$，得

$$(x^2+y^2)^2=1,$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$$

因 x、y 为实数，$x^2+y^2\geqslant 0$，故应取"+"号，即

$$x^2+y^2=1. \qquad (3)$$

与（1）联立，得

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.（$\because$由（2）知 x 与 y 异号）

$$\therefore \quad \sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$$

[方法二]　$\sqrt{-i}=\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$:

$k=0$，1.

即　　$\sqrt{-i}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

注意：根号内是复数时，它不同于根号内是非负实数的情形，它表示一个复数的有限集。

例5.　计算$\sqrt{1+i}$。

解　[方法一]

令　$(x+iy)^2=1+i$，得

$$\begin{cases}x^2-y^2=1, & (1)\\ 2xy=1. & (2)\end{cases}$$

$(1)^2+(2)^2$，得

$$(x^2+y^2)^2=2,\qquad \therefore\quad x^2+y^2=\sqrt{2}.$$

（$\because$ $x^2+y^2\geqslant0$，$\therefore$ 取“+”）与(1)联立，

$$\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x^2+y^2=\sqrt{2}.\end{cases}$$

得　$x^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}};\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

但由（2）知，y应与x同号，故

$$\sqrt{1+i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

[方法二] 利用公式$Z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$计算。为此，先计算出$1+i$。

$$|1+i|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}；\ arg(1+i)=arg\,tg\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right),$$

$k=0,1.$

当 $k=0$时，得

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

利用半角公式，化成代数式：

$$\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\right).$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

当$k=1$时，得

$$\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

合并结果得，得

$$\sqrt{1+i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

例6. 计算$\sqrt[4]{-1}$的四个值。

解 [方法一]

令 $Z^4=-1$， 有 $Z^2=\pm\sqrt{-1}=\pm i$，故

$$Z=\pm\sqrt{\pm i}$$

由例4知：

$$\sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i),$$

而 $\sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$。故

$$\sqrt{\pm i}=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i),\\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i).\end{cases}$$

由于$\sqrt[4]{-1}$仅有四个值，故$-\sqrt{\pm i}$必然与上述四个值重合。最后得：

$$\sqrt[4]{-1}=\begin{cases}\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i),\\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i).\end{cases}$$