精选
微积分学演习

閔口愷夫　本多良助　著

田根宝　译

上海科学技术出版社

微积分学演习

関口愷夫　本多良助　著

田根宝　译

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　　江[illegible]中印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 12.75　字数 [illegible],000

1988年[illegible]月第1版　1988年[illegible]月第1次印刷

印数 1—12,000

ISBN 7-5323-0103-6/O·5

定价：3.70 元

序　言

对于理、工、医、农科各大学的学生而言，微积分是一门必修的课程．我们深信正确理解并应用它，对开拓广阔的科学道路，促进科学的进步会作出贡献．

我们希望学生们尽可能自己解习题，然后，再参照后面的习题解答，加深对分析学的理解，提高分析问题和解决问题的实际能力．

本书的特点列举如下：

1．在每一章的开头列出了基本定理与性质，接着，先举一些典型的、基本的例题，然后，按照顺序，再逐渐涉及到高难度的例题．只要能充分理解例题，就几乎能解答书上的习题．

2．本书收集的练习题较多，类型尽可能多种多样，在书末有解答．

3．练习题解答的指导思想是简明易懂，但对计算过程的步骤也有某种程度的记述．对于有其它解法的习题也尽可能地加以阐述．

本书是関口在岡崎高师、名古屋大学、爱知工业大学从事数学教学四十多年经验的结晶．

在出版过程中，本多对本书进行了全面的校阅、对给本书提出宝贵意见的爱知工业大学数学研究室的诸位先生表示深切地谢意．并且，对出版计划、校正给予各种关顾的共立出版社的竹内正隆、佐藤雅明、豊田秀一等诸位先生表示衷心的感谢．

一九八二年六月

関口　愷夫
本多　良助

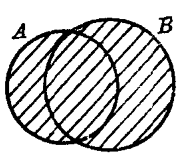
目　　录

第一章 实数的性质

1.1 实数的集合

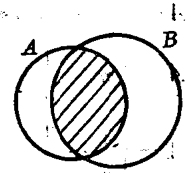
满足一定条件的事物之全体称为**集合**. 组成集合的每个事物称为集合的**元**或**元素**. 自然数、有理数、实数的全体等都是集合. 当 x 是集合 A 的元素时, 记做 $x\in A$, 当 x 不是集合 A 的元素时, 记做 $x\notin A$. 当集合 A 的元素都是点时, 称此集合为点集合. A, B 是两个集合, 若对于任意的 $x\in A$, 总有 $x\in B$ 成立时, 则称 A 是 B 的**子集**, 记作 $A\subset B$. 自然数、有理数的全体是组成实数全体之集合的子集.

设 A, B 是两个集合, 由属于集合 A 或属于集合 B 的一切元素所组成的集合称做 A 同 B 的和集(或**并集合**), 记做 $A\cup B$(图 1.1). 由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集(**积集合或通集合**), 记做 $A\cap B$(图 1.2).



$A\cup B$

图 1.1



$A\cap B$

图 1.2

一般地, 设集合 A_1, A_2, $\cdots$, 由一切 A_i 的所有元素所组成的集合称做这组集合的**和集**, 同时属于每个集合 A_i 的一切元素所组成的集合称做这组集的**交集**.

当集合 A_i 的个数有限时, 即 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$时, 则它们的和集合可表示成 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 交集合可表示成 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

当集合 A_i 的个数无限时，即 $A_i(i=1, 2, \cdots)$时，则它们的和集合可表示成 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，交集合可表示成 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

当 A 为某实数的子集时，对于一切的 $x\in A$，若存在实数 M，使 $x\leqslant M$(或 $x\geqslant M$)，则称集合 A 为**上有界**(或**下有界**). 既上有界也下有界的集合简称为**有界**. 把集合的最小上界称为**上确界**，把集合的最大下界称为**下确界**.

对于任意的 $\varepsilon>0$，当存在 A 的元素 x，使得不等式 $0<|x-a|<\varepsilon$，即 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$ 成立时，或存在任意接近 a 但不是 a 的集合 A 的元素，则称 a 为 A 的聚值(图 1.3).

图 1.3

在实数全体之集合 R 的子集合中，将 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 记作 $[a, b]$，$\{x|a<x<b\}$ 记作 (a, b)，$\{x|a\leqslant x<b\}$ 记做 $[a, b)$，$\{x|a<x\leqslant b\}$ 记作 $(a, b]$. 称这种形式的集合为区间. 特别 $[a, b]$，(a, b) 分别称为闭区间，开区间.

例 1 试求下列集合的最大值、最小值、上确界、下确界、聚值.

(1) $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$； (2) $A=\{x|-1<x<1\}$；

(3) $A=\left\{m+\dfrac{1}{n}\,\middle|\, m, n \text{ 是自然数}\right\}$；

(4) $A=\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\,\middle|\, m, n \text{ 是自然数}\right\}$；

(5) $A=\left\{(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\,\middle|\, n \text{ 是自然数}\right\}$；

(6) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}, n\right)$.

解	最大值	最小值	上确界	下确界	聚值
(1)	1	−1	1	−1	$-1\leqslant x\leqslant 1$ 的一切实数
(2)	无	无	1	−1	$-1\leqslant x\leqslant 1$ 的一切实数
(3)	无	无	无	1	1, 2, 3, …(自然数)

(4)	2	无	2	0	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$
(5)	无	无	1	-1	$-1, 1$
(6)	无	0	1	0	$[0, 1]$中一切实数

例 2 试求 $A=\{x \mid 6x^2-x-2<0\}$ 的上确界与下确界.

解 由不等式 $6x^2-x-2=(2x+1)(3x-2)<0$, 得

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}.$$

故上确界 $=\frac{2}{3}$, 下确界 $=-\frac{1}{2}$.

习 题 一

1. 设下列各集合为 A, 试求它的最小值、最大值、下确界、上确界.

   (1) 闭区间 $[p, q]$;

   (2) $\left\{\left(\frac{(-1)^\alpha}{\alpha}+\frac{(-1)^\beta}{\beta}\right)^{\alpha+\beta} \,\middle|\, \alpha, \beta \text{ 是自然数}\right\}$;

   (3) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, n\right]$.

2. 求下列各实数集合 A 的下确界和上确界:

   (1) $A=\{x \mid 0<x^2<3\}$;

   (2) $A=\{x \mid (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)<0\}$, 其中 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$;

   (3) $A=\{3^{-x}+4^{-y}+5^{-z} \mid x, y, z \text{ 都是自然数}\}$;

   (4) $A=\{x+y \mid x>0,\ y>0,\ [x]+[y]=100\}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(高斯记号).

3. 在下列各集合中, 若存在聚点, 试求之:

   (1) $\{x \mid x \text{ 是整数}\}$; (2) $\{x \mid x \text{ 是有理数}\}$;

   (3) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, n\right]$;

(4) $\left\{(-1)^n \Big/ \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \,\middle|\, n\text{是自然数}\right\}$;

(5) $\left\{\cos\left(n+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\pi \,\middle|\, n\text{是自然数}\right\}$.

1.2 数 列

按某种规则排列的实数集合 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 称为**数列**, 记做 $\{a_n\}$. a_n 称为**第 n 项**. 当数列 $\{a_n\}$ 给定时, 随着 n 无限地增大, a_n 无限地接近于某个常数 α 时, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 α, 此 α 叫做 $\{a_n\}$ 的**极限值**. 记作:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \text{ 或 } a_n\to\alpha\,(n\to\infty)$$

精确说法: 对于任意的正数 ε, 存在适当的正整数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 总有 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ 成立.

不收敛的数列称为**发散数列**. 特别, 当 n 无限增大时, a_n 无限变大, 则称数列 $\{a_n\}$ **发散于正无穷大**, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \text{ 或 } a_n\to\infty\,(n\to\infty)$$

精确说法: 对于任意的正数 M, 存在适当的正整数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 总有 $a_n>M$ 成立.

类似地, 也可定义发散于负无穷大的数列. 并且把如 $\{(-1)^n\}$ 这样无极限的数列称作**振荡的数列**.

若在已给数列中, 任意选取无穷多个项, 按原来次序(自左往右)排列的数列称做原数列的**子数列**.

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是**单调增加的**. 若满足 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是**单调减少的**.

定理 1.1 收敛数列的子数列仍收敛, 且收敛于同一极限值.

定理 1.2 上(下)有界的单调增加(减少)数列必收敛.

定理 1.3 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ 时, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}(b_n\neq 0,\ \beta\neq 0)$.

定理1.4 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$.

定理1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

例1 收敛的数列必有界.

解 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, 换言之, 对于任意的正数 ε, 存在适当的自然数 N, 当 $n>N$ 时, 总有 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ 成立. 即当 $n>N$ 时, 总有 $\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon$ 成立. 现设

$$M=\max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_N|,\ |\alpha|+\varepsilon\}$$

则有
$$-M\leqslant a_n\leqslant M\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

即数列 $\{a_n\}$ 是有界的.

例2 (1) 对于一切的 n, $a_n<b_n$ 或 $a_n\leqslant b_n$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$, 则 $\alpha\leqslant\beta$.

(2) 对于一切的 n, $a_n<c_n<b_n$ 或 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$.

解 (1) 用反证法证明, 即若设 $\alpha>\beta$ 必导致矛盾.

设 $\alpha>\beta$, 则有 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$, 即对于使 $\beta+\varepsilon<\alpha-\varepsilon$ 的 ε, 根据 $a_n\to\alpha$, $b_n\to\beta$, 选取适当的自然数 N, 当 $n>N$ 时, 总有 $\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon$, $\beta-\varepsilon<b_n<\beta+\varepsilon$ 成立. 故有 $b_n<\beta+\varepsilon<\alpha-\varepsilon<a_n$. 这与已知 $b_n>a_n$ 或 $b_n\geqslant a_n$ 发生矛盾. $\therefore\ \alpha\leqslant\beta$.

(2) 根据 $a_n\to c$, $b_n\to c$, 对于任意的正数 ε, 存在适当的自然数 N, 当 $n>N$ 时, 总有 $c-\varepsilon<a_n<c+\varepsilon$, $c-\varepsilon<b_n<c+\varepsilon$ 成立. 根据假设, 对于一切的 n 恒有 $a_n<c_n<b_n$, 所以, 当 $n>N$ 时, 总有

$$c-\varepsilon<a_n<c_n<b_n<c+\varepsilon$$

因此, 当 $n>N$ 时, 就有 $c-\varepsilon<c_n<c+\varepsilon$, 即有 $|c_n-c|<\varepsilon$ 成立.

例3 当 $a>0$ 时, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} a^n=\begin{cases}0, & 当\ 0<a<1\ 时,\\ 1, & 当\ a=1\ 时,\\ +\infty, & 当\ a>1\ 时.\end{cases}$$

解 (i) 当 $0<a<1$ 时，由于 $a^{n-1}>a^n$，且 $a^n>0$，故数列 $\{a^n\}$ 是单调减少且有界，所以，数列 $\{a^n\}$ 收敛的．若设 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\alpha$，则由 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n+1}=a\lim\limits_{n\to\infty} a^n$，得 $\alpha=a\alpha$．因 $\alpha(a-1)=0$，$a\neq1$，故得 $\alpha=0$；

(ii) $a=1$ 时是显然的.

(iii) $a>1$ 时，根据 $0<\dfrac{1}{a}<1$，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} a^n=+\infty.$$

例 4 (1) 当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解 (1) (i) 当 $\alpha>1$ 时，令 $\sqrt[n]{\alpha}=1+\alpha_n(\alpha_n>0)$，则

$$\alpha=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n>n\alpha_n,$$

$$\therefore 0<\alpha_n<\frac{\alpha}{n},\ \therefore \alpha_n\to0,\ \therefore \sqrt[n]{\alpha}\to1.$$

(ii) $\alpha=1$ 时是显然的.

(iii) $0<\alpha<1$ 时，$\beta=\dfrac{1}{\alpha}>1$.

$$\therefore\quad \sqrt[n]{\beta}\to1\quad \therefore\quad \sqrt[n]{\alpha}=\frac{1}{\sqrt[n]{\beta}}\to1.$$

(2) 因为 $\sqrt[n]{n}>1$，所以令 $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n(\alpha_n>0)$，则得

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n$$

$$>1+\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,$$

$$\therefore\quad n-1>\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2,\quad\therefore\quad 0<\alpha_n^2<\frac{2}{n},$$

$$\therefore\quad \alpha_n\to 0,\qquad\therefore\quad \sqrt[n]{n}\to 1.$$

例 5 (1) 若 $a_n\to a$，则 $c_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to a$;

(2) 若 $a_n\to 0$，$b_n\to 0$，则 $c_n=\dfrac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n}{n}\to 0$;

(3) 若 $a_n\to a$，$b_n\to b$，则 $c_n=\dfrac{a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n}{n}\to ab$.

解 (1) 因为 $a_n\to a$，所以对于任意的正数 ε，存在适当的自然数 N，当 $n>N$ 时，总有 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned}|c_n-a|&=\left|\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)-a\right|\\&=\left|\frac{1}{n}\{(a_1-a)+\cdots+(a_N-a)\right.\\&\qquad\left.+(a_{N+1}-a)+\cdots+(a_n-a)\}\right|\\&\leqslant\frac{1}{n}\{|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|\}\\&\qquad+\frac{1}{n}\{|a_{N+1}-a|+\cdots+|a_n-a|\}\\&<\frac{1}{n}\{|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|\}\\&\qquad+\frac{n-N}{n}\,\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

在这里，若固定 N 并取充分大的 n，则有

$$\frac{1}{n}\{|a_1-a|+\cdots+|a_N-a|\}<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\therefore\quad\left|\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)-a\right|<\varepsilon.$$

(2) 由于 $b_n\to 0$，得 $|b_n|<k$(k 是正常数).

$$|c_n| \leqslant \frac{|a_n||b_1| + |a_{n-1}||b_2| + \cdots + |a_1||b_n|}{n}$$
$$< k\,\frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n}.$$

根据 $a_n \to 0$，则有 $|a_n| \to 0$。因此，根据(1)，得

$$\frac{|a_1| + \cdots + |a_n|}{n} \to 0,$$

故 $c_n \to 0$。

(3) 根据 $a_n \to a$, $b_n \to b$，令 $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$，其中 $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$。

$$c_n = \frac{1}{n}\{(a+\alpha_n)(b+\beta_1) + (a+\alpha_{n-1})(b+\beta_2)$$
$$+ \cdots + (a+\alpha_1)(b+\beta_n)\}$$
$$= ab + a\cdot\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n} + b\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$$
$$+ \frac{\alpha_n\beta_1 + \alpha_{n-1}\beta_2 + \cdots + \alpha_1\beta_n}{n}.$$

然而，当 $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ 时，由于

$$\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n} \to 0, \quad \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \to 0,$$
$$\frac{\alpha_n\beta_1 + \alpha_{n-1}\beta_2 + \cdots + \alpha_1\beta_n}{n} \to 0,$$
$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} c_n = ab.$$

例 6 求下列数列的极限值:

(1) $\{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\}$; (2) $\{(\sqrt{n}+1)/(\sqrt{2n}-3)\}$.

解 (1) $$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \to 0.$$

(2) $$\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n}-3} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例 7 当$|a|<1$时，$n^p a^n \to 0$（p是任意实数）.

解 令$b=\dfrac{1}{|a|}>1$，则得$b=1+c(c>0)$，

$$b^n=(1+c)^n=1+\frac{n}{1!}c+\frac{n(n-1)}{2!}c^2$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}c^{k+1}+\cdots+c^n,$$

$$\therefore\quad b^n>\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}c^{k+1}$$

$$\therefore\quad n^k|a|^n=\frac{n^k}{b^n}<\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}\cdot\frac{(k+1)!}{c^{k+1}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

（因为前者分式的分母是n的$k+1$次，而分子是n的k次）

当p为正实数时，若$k\leqslant p<k+1$，则有

$$n^k\leqslant n^p<n^{k+1},\ \therefore\quad n^k|a|^n\leqslant n^p|a|^n<n^{k+1}|a|^n.$$

当$n\to\infty$时，两端都趋于0，所以

$$n^p|a|^n\to 0.$$

当p为负实数时，设$-p=q>0$，则

$$n^p a^n=a^n\cdot\frac{1}{n^q}\to 0\times 0=0.$$

注意：当$p=0, 1, 2, \cdots$，$|a|<1$时，$a^n\to 0$，$na^n\to 0$，$n^2a^n\to 0$，$\cdots$.

例 8 (1) 已知：$a_1=\sqrt{3}$，$a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(2) 当$a_1=\sqrt{3}$，$a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$时，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(3) 当$a_1>0$，$a_{n+1}=a_1+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$时，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 (1) $a_1=3^{\frac{1}{2}}$，$a_2=\sqrt{3\times 3^{\frac{1}{2}}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}$，$\cdots$，$a_n=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot\cdots\cdot 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$（使用数学归纳法可得）.

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^n}=3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}}=3.$$

别解：假设 $0<a_n<3$，则有 $a_{n+1}^2=3a_n<9$. $\therefore a_{n+1}<3$. 因此，$\{a_n\}$有界．并且

$$a_n^2-a_{n-1}^2=3a_{n-1}-3a_{n-2}=3(a_{n-1}-a_{n-2}),$$

即
$$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=3(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

由于 $a_n>0$，当 $a_n-a_{n-1}>0$ 时，$a_{n-1}-a_{n-2}>0$. 由此式及 $a_2>a_1$，知 $\{a_n\}$ 是单调增加数列．又因 $\{a_n\}$ 是有界的，故由定理 2 得 $\{a_n\}$ 收敛．因此，若设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，则在 $a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$ 中令 $n\to\infty$，就有 $\alpha^2=3\alpha$. $\therefore \alpha(\alpha-3)=0$，根据 $\alpha>0$，得 $\alpha=3$ 是所求的值．

(2) $0<a_1=\sqrt{3}<3$ 是显然的．现若假设 $0<a_n<3$，则 $0<a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}<3$ 对一切的 n 都成立．又因为

$$a_{n+1}^2-a_n^2=3+2a_n-a_n^2=-(a_n+1)(a_n-3)>0,$$

所以 $a_{n+1}>a_n$. 因此 $\{a_n\}$ 是单调增加数列且有界，故由定理 2 得 $\{a_n\}$ 收敛．若设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，则在 $a_{n+1}=\sqrt{3+2a_n}$ 中令 $n\to\infty$，就有 $\alpha^2=3+2\alpha$. $\therefore (\alpha+1)(\alpha-3)=0$. 根据 $\alpha>0$，得 $\alpha=3$.

(3) 由于 $a_1>0$，$a_{n+1}=a_1+\dfrac{1}{a_n}$，故对于一切的 n 有 $a_n>0$，

$$\because\quad a_2-a_1=\frac{1}{a_1}>0,$$

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}=\frac{-(a_{n-1}-a_{n-2})}{a_{n-1}a_{n-2}}.$$

$$\therefore\quad a_3-a_2<0,\ a_4-a_3>0,\ a_5-a_4<0,\ \cdots$$

又
$$\because\quad a_3-a_1=\frac{1}{a_2}>0,$$

$$a_{2n+1}-a_{2n-1}=\frac{-(a_{2n}-a_{2n-2})}{a_{2n}a_{2n-2}}=\frac{a_{2n-1}-a_{2n-3}}{a_{2n}a_{2n-1}a_{2n-2}a_{2n-3}}>0.$$

故 $\{a_{2n+1}\}$ 是单调增加数列．同理可证 $\{a_{2n}\}$ 是单调减少数列．故所给定的数列是

$$a_1<a_3<a_5<\cdots<a_6<a_4<a_2.$$

由于 $\{a_{2n+1}\}$ 是单调增加且上有界，$\{a_{2n}\}$ 是单调减少且下有界，所以 $\{a_{2n+1}\}$，$\{a_{2n}\}$ 都收敛．在这里，若设 $a_{2n+1}\to\alpha$，则

$$a_{2n+1}=a_1+\frac{1}{a_{2n}}=a_1+\frac{1}{a_1+(1/a_{2n-1})}=a_1+\frac{a_{2n-1}}{a_1a_{2n-1}+1}.$$

令 $n\to\infty$，得 $\alpha=a_1+\dfrac{\alpha}{a_1\alpha+1}$．因此，$\alpha=\dfrac{a_1+\sqrt{a_1^2+4}}{2}$ $(\alpha>0)$．同理，得

$$a_{2n}\to\frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4}}{2}.$$

$$\therefore\quad a_n\to\frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4}}{2}.$$

习　题　二

1．当 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ 时，证明：$|x|<1$．

2．(1) 当 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1=1$，$a_2=4$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(2) 当 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\dfrac{2a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$．

3．(1) 当 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(2) 当 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt[3]{(a_n^3+a_{n+1}^3)/2}$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$．

4．当 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，$a_1=a_2=1$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$．

5．当 $0<a_1<b_1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$b_{n+1}=(a_n+b_n)/2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 时，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在且相等．

6．证明：

(1) 当 $a_n>0$，$a_n\to a$ 时，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to a$；

(2) 当 $a_{n+1}-a_n\to a$ 时，$\dfrac{a_n}{n}\to a$．