现代数学译丛

微分方程的最大值原理

〔美〕 M. H. 普劳特
H. F. 温伯格 著

科学出版社

现代数学译丛

微分方程的最大值原理

〔美〕 M. H. 普劳特 H. F. 温伯格 著

叶其孝 刘西垣 译

周毓麟 吴兰成 校

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了常微分方程以及二阶椭圆型、抛物型和双曲型偏微分方程的最大值原理，阅读本书仅需要高等微积分知识. 本书还安排了许多习题，以便读者加深理解.

本书可供高等院校有关专业师生、研究生以及科学工作者参考.

Murray H. Protter & Hans F. Weinberger

Maximum Principles in Differential Equations

Prentice-Hall, 1967

现代数学译丛

微分方程的最大值原理

〔美〕M. H. 普劳特 H. F. 温伯格 著

叶其孝 刘西垣 译

周毓麟 吴兰成 校

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1985年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1985年11月第一次印刷 印张：9 3/4

印数：0001—8,100 字数：254,000

统一书号：13031 · 2982

本社书号：4385 · 13—1

定价： 2.75 元

为本书中译本写几句话

数学的思想是世界性的，但用来传播这种思想的各国语言是不同的．我们感谢译者使得中国读者可以利用这本关于微分方程的最大值原理及其应用的著作．

M. H. 普劳特

H. F. 温伯格

1981.10

序　　言

在偏微分方程的研究中所用到的最有用而且最为人们熟知的工具之一就是最大值原理．这个原理是微积分学中下述初等事实的推广：在区间 $[a, b]$ 上满足不等式 $f'' > 0$ 的任何函数 $f(x)$ 必在该区间的一个端点达到它的最大值，我们就说不等式 $f'' > 0$ 的解满足最大值原理．更一般地，若函数在区域 D 中满足一个微分不等式，并因此而在 D 的边界上达到其最大值，我们就说这种函数具有最大值原理．

偏微分方程的研究常常是从把方程分成各种类型开始的．最常研究的是椭圆型、抛物型和双曲型方程．由于在许多物理问题中自然地提出了这三类方程，所以，对偏微分方程感兴趣的数学家们往往把他们的精力集中于研究并推进对数学和物理学都重要的问题．通过研究物理上提出的问题来学习偏微分方程的读者，不但可以了解偏微分方程的历史发展进程，而且还可以清楚地了解为什么有些方程得到了详尽的研究，而另一些方程则实际上被忽略了的理由．因为许多与椭圆型、抛物型和双曲型方程有关的问题呈现了最大值原理，因此我们深感到研究与这些原理有关的方法和技巧，对于偏微分方程的研究构成了一个极好的引论和补充．

对于物理学中出现的微分方程问题，最大值原理通常有很自然的物理解释．在这种情形下，最大值原理可以帮助我们把物理直观应用于数学模型．因而任何读者学习了最大值原理，就可以了解重要的古典偏微分方程，同时还可以发现它们之所以重要的原因．

建立最大值原理所需要的证明是极其初等的．由于把注意力集中于可以用初等方法从最大值原理导出的那些应用，我们能够

把本书写成适合于学习自然科学的大学生的水平．任何读者学完了高等微积分，都可以阅读本书全部内容．实际上，任何读者除了知道初等微积分外，只要知道线积分，Green 定理以及某些关于连续性和可微性方面的简单事实，就会发现几乎全书的内容都能够理解．

不需要对解本身有任何明显的了解，最大值原理就使我们能得到有关微分方程解的信息．特别是在解的近似方法（许多科学家极感兴趣的一个课题）中，最大值原理是一个有用的工具．行将证明，本书不仅对专业的数学家和主要对数学有兴趣的学生是有用的，而且对于那些对常微分方程、偏微分方程解的数值逼近，以及决定这种逼近的误差估计有兴趣的物理学家、化学家、工程师和经济学家都是有用的．

偏微分方程的最大值原理可以专门用于一个变量的函数，本书第一章就专门用来讨论这种一维的情形．结果的叙述和定理的证明是如此的简单，以致读者会发现微分方程最大值原理的这个引论确实非常容易．当然一维最大值原理只涉及二阶常微分方程，并不涉及偏微分方程．在第一章中，我们证明，古典的 Sturm-Liouville 理论的一些部分乃是最大值原理的一个直接推论．本书之所以包括这一章，主要是因为它为后面会碰到的各种形式的最大值原理提供了一个既有吸引力而又简单的引论，它还提供了考虑常微分方程理论中某些课题的新方法．

在第二章中，我们建立椭圆型算子的最大值原理，叙述几个推广并给出许多应用．虽然 Laplace 方程和某些别的方程的最大值原理为人所知大约已有百年之久，但是，直到新近 Hopf 才建立了一般二阶椭圆型算子的强最大值原理．我们给出的很多重要应用都要用到这些结果．

抛物型算子的最大值原理所采取的形式和椭圆型算子的最大值原理的形式很不相同．在第三章中我们介绍抛物型算子的 Nirenberg 强最大值原理．然后象在椭圆型的情形一样，证明可以用这个原理给出有关逼近和唯一性的结果．用来结束本章的最后

一节是关于一类特殊的抛物型方程组的最大值原理的.

第四章即最后一章处理双曲型算子的最大值原理. 这些原理所采取的形式反映了双曲型方程适定问题的结构. 对双曲型算子来说,无论是定理的叙述还是证明的方法都和椭圆型、抛物型算子十分不同. 特别是,在双曲型的情形,特征曲线和特征曲面的作用变得明显了.

由于最大值原理在如此众多的地方以如此多变的形式出现,使我们发现要讨论某些原来我们想要处理的课题是不可能的. 例如,有限差分算子的最大值原理被整个略去了. 我们也没有提及解析函数的模的最大值原理——一个具有许多重要而又有趣的应用的课题. 人们已经知道,有些阶数高于二阶的椭圆型方程也有最大值原理. (例如见 Miranda[1] 和 Agmon[1]) 我们决定本书也不包括这个论题了,因为它需要偏微分方程的高深技巧.

我们采用的大多数记号和符号是相当标准的. Euclid 空间中的一个区域 D 是一个连通开集. 通常把 D 的边界记为 ∂D. 符号 $\cup$ 和 $\cap$ 用来表示集合的并与交. 黑体字母表示向量,而对偏导数则采用习惯的记号 u_{x_i} 和 $\partial u/\partial x_i$.

我们常用后面跟有方括号的字母 L 表示作用在函数上的一个线性算子. 也就是说,对某一函数类中的每个函数 u, L 确定了另一函数类中的一个函数 $L[u]$. 如果,当定义了 $L[u_1]$ 和 $L[u_2]$ 时,对所有的常数 α,β 也定义了量 $L[\alpha u_1+\beta u_2]$ 和 $\alpha L[u_1]+\beta L[u_2]$,并且等式 $L[\alpha u_1+\beta u_2]=\alpha L[u_1]+\beta L[u_2]$ 成立,则我们称 L 是线性的.

对于那些希望进一步钻研本课题的读者,我们在每章末都有一个文献讨论,它包括历史参考资料和有关本章内容的其它介绍以及进一步的结果和应用的一个指南. 因为我们对于微分方程的最大值原理这一主题始终是有兴趣的,所以我们乐于听到与本书的主题有关的结果,无论它们是旧的还是新的.

我们要感谢 Air Force Office of Scientific Research 和 National

Science Foundation，因为得到他们支持的研究导致了在这里首次发表的一些结果。

M. H. 普劳特

H. F. 温伯格

目 录

第一章　一维最大值原理

第一节　最大值原理

在闭区间[1] $[a,b]$ 上连续的函数 $u(x)$ 在该区间的某一点上取到它的最大值．如果 $u(x)$ 有连续的二阶导数，而且在 a 和 b 之间的某点 c 处 u 有一个相对最大值，则从初等微积分知

$$u'(c)=0 \text{ 且 } u''(c)\leqslant 0. \tag{1}$$

假设在开区间 (a,b) 中，已知 u 满足形状为

$$L[u]\equiv u''+g(x)u'>0 \tag{2}$$

的微分不等式，其中 $g(x)$ 是任何有界函数，那么显然知道在 (a,b) 中的任何点 c 关系式(1)不能满足．因此，当(2)成立时，除在端点 a 或 b 外，u 不能在任何别的点处达到它的最大值．这里我们就有了最大值原理的最简单的情形．

上述论证的本质在于要求不等式(2)严格成立；也就是说，假设 $u''+g(x)u'$ 决不为零．在微分方程的研究和许多应用中，这样的要求是过分局限了，因而重要的是，如果可能的话，就去掉这个限制．然而，我们指出，非严格的不等式

$$u''+g(x)u'\geqslant 0$$

容许有解 $u=$常数．这种常数解在每一点都达到最大值．我们将证明只可能有这一种例外．

定理 1　(**一维最大值原理**)．假设 $u=u(x)$ 满足微分不等式

$$L[u]\equiv u''+g(x)u'\geqslant 0 \text{ 当 } a<x<b \text{ 时}, \tag{3}$$

其中 $g(x)$ 是一个有界函数．如果在 (a,b) 中 $u(x)\leqslant M$，而且在

---

1) 记号 $[a,b]$ 表示闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$；记号 (a,b) 表示开区间 $a<x<b$.

(a,b)中的一个内点 c 处 u 达到最大值 M，则 $u \equiv M$.

证明. 我们假设 $u(c)=M$，又假设 (a,b) 中有一点 d 使 $u(d)<M$. 我们将证明，这会导致矛盾. 为方便计，令 $d>c$. 我们定义函数

$$z(x)=e^{\alpha(x-c)}-1,$$

其中 α 是待定正常数. 注意到当 $a<x<c$ 时 $z(x)<0$，当 $c<x<b$ 时 $z(x)>0$，而 $z(c)=0$.（见图 1.）

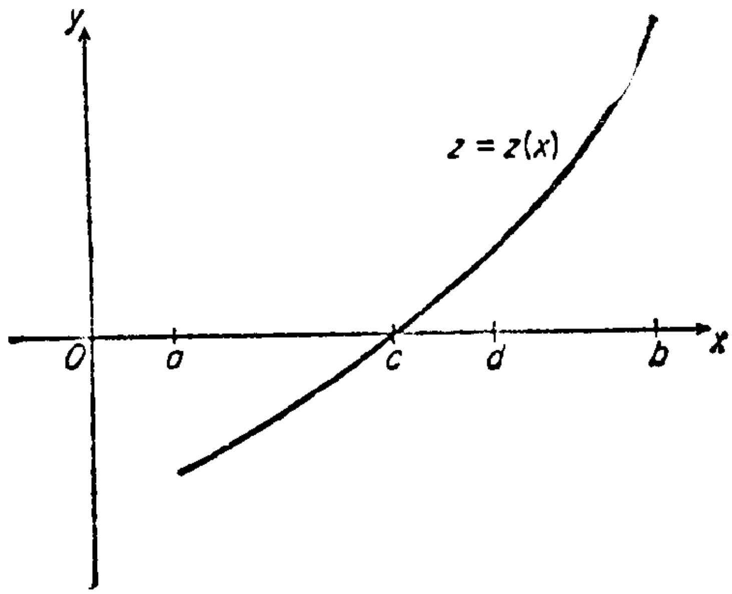

图 1

简单的计算给出

$$L[z]\equiv z''+g(x)z'=\alpha[\alpha+g(x)]e^{\alpha(x-c)},$$

选 α 充分大使当 $a<x<d$ 时 $L[z]>0$，即我们选 α 使之满足不等式

$$\alpha>-g(x);$$

由于 $g(x)$ 有界，我们总能这样作. 现在我们定义

$$w(x)=u(x)+\varepsilon z(x),$$

其中 ε 是一个选定的正常数，它满足不等式

$$\varepsilon<\frac{M-u(d)}{z(d)}.$$

由 $u(d)<M$ 的假设及 $z(d)>0$ 的事实，选取这样的 ε 是可能

的．于是，因为当 $a < x < c$ 时 z 为负，我们就有

$$w(x) < M \quad 当 \ a < x < c \ 时,$$

由 ε 的定义，

$$w(d) = u(d) + \varepsilon z(d) < u(d) + M - u(d),$$

所以

$$w(d) < M.$$

在点 c

$$w(c) = u(c) + \varepsilon z(c) = M.$$

因此，w 有一个大于或等于 M 的最大值，并在 (a,b) 的一个内点处达到．但是

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0,$$

所以，由前面关于严格不等式(2)的结果，w 不能在 (a,b) 中达到它的最大值．我们因此而得到了矛盾．

如果 $d < c$，我们利用辅助函数

$$z = e^{-\alpha(x-c)} - 1,$$

其中 $\alpha > g(x)$，可得到同样的结论．

上述证明的关键是构造具有下列性质的函数 $z(x)$：(i)$L[z] > 0$；(ii) 当 $x < c$ 时 $z(x) < 0$；(iii) 当 $x > c$ 时 $z(x) > 0$；(iv) $z(c) = 0$．[如果 d 小于 c，则不等式(ii)和(iii)反向．] 函数 z 决不是唯一的．例如，函数

$$z(x) = (x-a)^\alpha - (c-a)^\alpha,$$

其中 α 充分大，也具有同样的四条性质．

把定理 1 用到 $(-u)$ 上，我们就有**最小值原理**，它断言，满足微分不等式 $L[u] \leqslant 0$ 的非常数函数不能在内点达到它的最小值．

定理 1 的叙述中关于 g 的有界性条件可以放松．如果 g 在每个完全在 (a,b) 中的区间 $[a',b']$ 上有界，则定理 1 的结论仍然成立．我们只要简单地把论证用于包含点 c 和 d 作为内点的任何子区间 $[a',b']$ 即可．注意，可能 g 在 (a,b) 的每一闭子区间上有界，而当 x 趋向于 a 或 b 时则是无界的．例如，$g(x) = 1/(1-x^2)$ 在 $(-1,1)$ 的每一闭子区间上是有界的．这点看来似乎并不重要，但

是事实上原来许多数学物理微分方程都有在定义区间端点上变成无界的系数 g.

用于证明定理 1 的方法能使我们获得有关满足 (3) 那种不等式的函数的一些另外的信息. 我们也许会想象 (3) 的解 u 能有图 2a 所示的函数的样子，即 u 在 $[a,b]$ 上的最大值在 a 达到，且 $u'(a)=0$. 事实上，这种情形决不可能发生. 如果最大值在左端点达到，则在该点斜率必为负(图 2b)；如果最大值在右端点达到，则在该点斜率必为正(图 2c). 下一个定理建立了精确的结果.

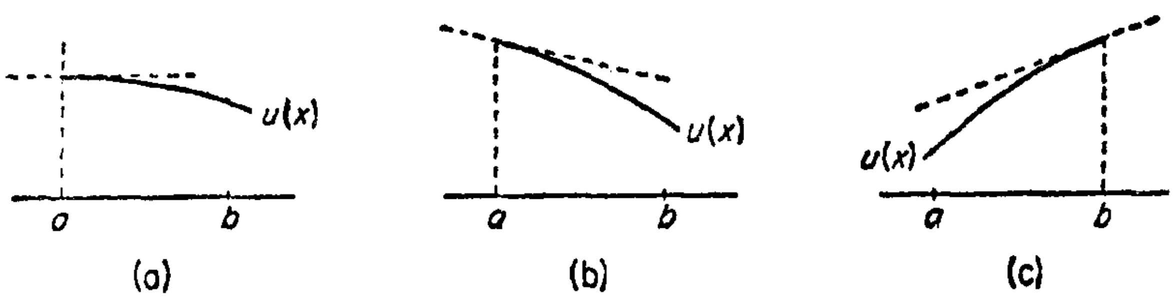

图 2

定理 2. 假设 u 是一个非常数函数，它在(a, b)中满足不等式 $u''+g(x)u'\geqslant 0$，并且在 a 和 b 有单侧导数，又假设 g 在(a, b)的每一闭子区间上有界. 如果 u 的最大值在 $x=a$ 达到，又 g 在 $x=a$ 有下界，则 $u'(a)<0$. 如果最大值在 $x=b$ 达到，且 g 在 $x=b$ 有上界，则 $u'(b)>0$.

证明. 假设 $u(a)=M$，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时 $u(x)\leqslant M$，并对 (a,b)中某点 d，我们有 $u(d)<M$. 仍定义辅助函数

$$z(x)=e^{\alpha(x-a)}-1 \quad 其中\ \alpha>0.$$

当 $a\leqslant x\leqslant d$ 时，我们选 $\alpha>-g(x)$，所以 $L[z]>0$. 其次，我们作函数

$$w(x)=u(x)+\varepsilon z(x),$$

其中 ε 选得使

$$0<\varepsilon<\frac{M-u(d)}{z(d)}.$$

因为 $L[w]>0$，故 w 在 $[a,d]$ 中的最大值必在某个端点达到。我们有

$$w(a)=M>w(d),$$

所以最大值在点 a 达到. 因此，w 在点 a 的单侧导数不可能是正的：

$$w'(a)=u'(a)+\varepsilon z'(a)\leqslant 0,$$

可是

$$z'(a)=\alpha>0,$$

所以

$$u'(a)<0,$$

这就是所要的结果.

如果最大值在 $x=b$ 达到，论证是类似的。

附注. (i) 如果满足(3)的函数 u 在内点 c 处有一个相对最大值，则存在一个包含 c 作为内点的区间 $[a_1,b_1]$，在该区间上 $u(x)\leqslant u(c)$. 于是定理 **1** 表明，在这个区间上 $u(x)\equiv u(c)$. 把定理 2 用于所有以 c 为端点的区间上，我们知道，在相对最大值点上 $u(c)$ 的值实际上是 u 在区间 (a,b) 上的最小值.

(ii) 如果满足(3)的函数 u 在区间 (a,b) 的两点 c_1 和 c_2 处有相对最小值，则在 c_1 和 c_2 间必有一个相对最大值. 于是，从附注(i)可得 $u(c_1)=u(c_2)$，而且 $u(x)$ 在区间 (c_1,c_2) 上是常数.

(iii) 满足(3)的函数不可能有水平拐点. (如果 $u'(c)=0$ 而 u 在某包含 c 的区间中严格增加或严格减少，则称 u 在 $x=c$ 有水平拐点.) 如果存在一个这样的点，我们可选一个以该点为端点的子区间(它无论是右端点或左端点都可以)，在该区间上 u 在点 c 达到最大值. 于是与定理 2 矛盾.

(iv) 对 $L[u]\leqslant 0$ 的解类似于定理 2 的结果成立，因而得到相应的最小值原理. 我们把定理 2 用于函数 $(-u)$ 就可得到这个原理.

(v) 可以在定理 1 之前证明定理 2. 那么，下面的论证可立

即推出定理 1．如果 u 在内点 c 有最大值，则 $u'(c)=0$．把定理 2 用到区间 (a,c) 和 (c,b) 上去，我们就得到 u 是常数这一结论．

(vi) 对定理 1 和 2 的结论来说 g 的有界性是必须的．方程

$$u''+g(x)u'=0,$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}-3/x & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } x=0 \text{ 时}\end{cases}$$

有解

$$u=1-x^4.$$

因为 u 在 $x=0$ 有最大值，所以在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上显然破坏了定理1．又因为 $u'(0)=0$，所以在 $[0,1]$ 上也破坏了定理 2．因为 g 在 $(0,1)$ 中没有下界，所以不能应用定理 1 和 2 的结果．

现在我们来处理更一般的微分不等式

$$(L+h)[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u\geqslant 0. \tag{4}$$

下述最简单的例子表明我们至多只能期望得到一种修正形式的最大值原理；方程

$$u''+u=0$$

有解 $u=\sin x$，它在 $x=\pi/2$ 达到其最大值．即使条件 $h(x)\leqslant 0$ 也不足以得到一个不受限制的最大值原理．我们注意到方程

$$u''-u=0$$

有解

$$u=-e^x-e^{-x},$$

它在 $x=0$ 达到其最大值 (-2)．我们将要证明，当 $h\leqslant 0$ 时 (4) 的非常数解不可能在内点达到非负最大值．

容易看出，如果严格的不等式

$$(L+h)[u]>0,\ \text{其中 } h\leqslant 0$$

在开区间 (a,b) 中成立，则 u 不能在 (a,b) 的内点取到非负最大值．事实上，在任一这样的最大值点，我们有 $u'=0$, $u''\leqslant 0$, $hu\leqslant 0$,

与上面的严格不等式矛盾．这个事实使我们能够推广定理 1 和 2，而且除选取 α 充分大使 $(L+h)[z]>0$ 外，无须乎改变定理的任何论证．

函数 $e^{\alpha(x-c)}-1$（或者，如果 d 在 c 的左边时，函数 $e^{-\alpha(x-c)}-1$）中的常数 α 只须满足

$$\alpha^2-\alpha g(x)+h(x)[1-e^{-\alpha(x-c)}]>0$$

$$(\text{或者 } \alpha^2-\alpha g(x)+h(x)[1-e^{\alpha(x-c)}]>0).$$

因为 $h(x)\leqslant 0$，无论哪种情形，选 α 使

$$\alpha^2-\alpha|g(x)|+h(x)>0$$

就足够了．如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 有界，这当然可以办得到．我们也可以再一次证明只要 $g(x)$ 和 $h(x)$ 在 (a,b) 的每一闭子区间上有界就够了．这样我们得到了以下两个定理，它们是定理 1 和 2 的推广．

定理 3．如果 $u(x)$ 在区间 (a,b) 中满足微分不等式

$$(L+h)[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u\geqslant 0 \tag{4}$$

其中 $h(x)\leqslant 0$，如果 g 和 h 在 (a,b) 的每一闭子区间上有界，又若 u 在内点 c 达到非负最大值 M，则

$$u(x)\equiv M.$$

注意，如果 h 不恒等于零，则满足(4)的非负常数 M 只有 $M=0$。

定理 4．假设 u 是微分不等式(4)的非常数解，在 a 和 b 有单侧导数，$h(x)\leqslant 0$，而且 g 和 h 在 (a,b) 的每个闭子区间上有界．如果 u 在点 a 有非负最大值，且函数 $g(x)+(x-a)h(x)$ 在 $x=a$ 有下界，则 $u'(a)<0$。如果 u 在点 b 有非负最大值，且函数 $g(x)-(b-x)h(x)$ 在 $x=b$ 有上界，则 $u'(b)>0$。

为把定理 2 的证明推广到定理 4，我们只需注意

$$\begin{aligned}(L+h)[e^{\alpha(x-a)}-1]&=e^{\alpha(x-a)}[\alpha^2+\alpha g+h(1-e^{-\alpha(x-a)})]\\&\geqslant e^{\alpha(x-a)}[\alpha^2+\alpha g+\alpha(x-a)h].\end{aligned}$$

推论．如果 u 在 (a,b) 中满足(4)，其中 $h(x)\leqslant 0$，如果 u 在