数 理 化 竞 赛 丛 书

全国中学数学竞赛题解

1979

科 学 普 及 出 版 社 编

科 学 普 及 出 版 社

—

内 容 提 要

数学竞赛是鼓励青少年刻苦学习数学、努力攀登科学高峰的一个途径，是促进数学教学工作、提高学生数学水平的一个重要方法。

本书是 1979 年全国和 29 个省市自治区数学竞赛的试题及解答汇集。在解题中，力求注意解题思路和提供解题技巧，可供广大中学师生及其他数学爱好者参考。

数理化竞赛丛书

全国中学数学竞赛题解

1979

科学普及出版社 编

责任编辑：唐 洪

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社 出版（北京白石桥紫竹院公园内）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国科学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：13 1/2 字数：310 千字

1981 年 6 月第 1 版 1981 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—247,000 册 定价：1.10 元

统一书号：13051·1177 本社书号：0216

前　　言

数学竞赛是培养青少年刻苦学习、努力攀登科学高峰的一个途径，是促进数学教学工作、提高学生数学水平的一个重要方法。自从 1978 年恢复了全国数学竞赛以来，全国各地青少年及广大中学数学教师都希望出版一些有关数学竞赛的书籍。为了满足这方面的需要，我们编辑出版了：

北京市中学数学竞赛题解 1956—1964；

全国中学数学竞赛题解 1978；

美国及国际数学竞赛题解 1976—1978；

匈牙利奥林匹克数学竞赛题解 1894—1974

等书。本书系 1979 年全国各省、市、自治区数学竞赛的试题及解答汇集。由于篇幅较大，我们对各省、市、自治区给的解法做了一些化简，不同解法也未一一列入。

限于水平，书中不当之处一定不少，敬希有关专家及广大读者批评指正。如有更简捷的解法也请转告我们。

编　者

1980 年 5 月 10 日

目 录

全国试题及解答

第 一 试

一、求证

$$\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)。$$

【证】 原式右端 $= 2\sin\theta\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos(\pi+2\theta)\right]$

$$= 2\sin\theta\left(\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right)$$

$$= \sin\theta + 2\sin\theta\cos 2\theta$$

$$= \sin\theta + (\sin 3\theta - \sin\theta)$$

$=$ 原式左端。

二、已知双曲线的两条渐近线方程为

$$x+y=0,\quad x-y=0,$$

两顶点的距离为 2，求双曲线的方程。

【解】 因双曲线两顶点的距离为 2，故半实轴的长为 1，若双曲线的实轴在 X 轴上，则双曲线的方程为

$$x^2-y^2=1。$$

若双曲线的实轴在 Y 轴上，则双曲线的方程为

$$x^2-y^2=-1 \text{ 或 } y^2-x^2=1。$$

三、在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 为钝角，求作一个面积最小的圆，把这个三角形完全盖住，并说明理由。

【解】 以 BC 边为直径作一圆 O，此圆即为所求。理由如下：

(i) 因 BC 为直径，$\angle A$ 为钝角，直径上的钝角必在圆内，故 A 点在圆内，即圆 O 盖住 $\triangle ABC$。

(ii) 若有另一圆 O' 盖住 $\triangle ABC$，B、C 都在圆 O' 内或圆周上，则 $BC \leqslant$ 圆 O' 的直径，因此，圆 O 是盖住 $\triangle ABC$ 的最小圆。

四、圆内两条非直径的弦相交，试证它们不能互相平分。

【证】 设 AC、BD 是圆 O 内的不是直径的两弦，二者相交于 P，则应求证：AC、BD 不能互相平分。

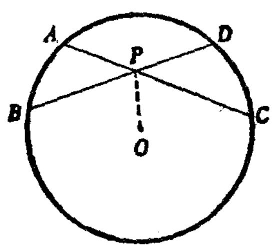

图 1

可用反证法来证明。

假若 P 是 AC 和 BD 的中点（图 1），连 OP，则

$$\left.\begin{array}{l} OP \perp AC, \\ OP \perp BD, \end{array}\right(\begin{array}{l}\text{圆心与弦的中点的} \\ \text{连线垂直于弦}\end{array}\Big)$$

得出矛盾（因为一条直线不能同时垂直于两条相交的直线），所以 P 不能同时是 AC、BD 的中点。

五、解方程组

$$\begin{cases} x - y + z = 1, & (1) \\ y - z + u = 2, & (2) \\ z - u + v = 3, & (3) \\ u - v + x = 4, & (4) \\ v - x + y = 5。 & (5) \end{cases}$$

【解】 (2) + (3) − (5) 得

$$x = 0,$$

(3) + (4) − (1) 得

$$y = 6,$$

将 x 及 y 的值代入 (1) 得

$$z=7,$$

将 y 及 z 的值代入 (2) 得

$$u=3,$$

将 x 及 u 的值代入 (4) 得

$$v=-1,$$

故原方程组的解为

$$\begin{cases} x=0, \\ y=6, \\ z=7, \\ u=3, \\ v=-1。 \end{cases}$$

六、解方程

$$5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0。$$

【解】 原方程变为

$$(5x^2-1)-x\sqrt{5x^2-1}+(x-1)=0。$$

分解因式得

$$(\sqrt{5x^2-1}-x+1)(\sqrt{5x^2-1}-1)=0,$$

由 $\sqrt{5x^2-1}-x+1=0$ 解得

$$x_1=\frac{1}{2}, \quad x_2=-1,$$

由 $\sqrt{5x^2-1}-1=0$ 解得

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{5},$$

经验算知 $\frac{1}{2}$、-1 都是增根，所以原方程的根是 $\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$。

七、写出并证明立体几何中的三垂线定理。

【证】 三垂线定理是：在平面内的一条直线，如果与一

条斜线在这个平面内的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

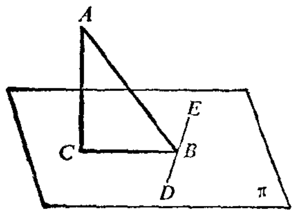

图 2

已知：AC、AB 分别是平面 π 的垂线和斜线（图 2），BC 是 AB 在平面 π 内的射影，DE 在平面 π 内，$DE\perp BC$。

求证：$DE\perp AB$。

证明：因为 $AC\perp$平面 π，DE 在平面 π 内，所以

$DE\perp AC$　（垂直于平面的直线垂直这个平面内的所有直线），

又因 $DE\perp BC$（题设），所以

$DE\perp AC$、BC 所在平面（一直线垂于相交的两直线，则这直线垂直于它们所确定的平面），

因为 AB 在平面 AC、BC 所在平面内，所以

$DE\perp AB$　（垂直于平面的直线，垂直这个平面内的所有直线）。

八、设 $\triangle ABC$ 的三内角 A、B、C 成等差数列，三条边长 a、b、c 之倒数也成等差数列，试求 A、B、C。

【解】 由题设可令

$$A=B-\alpha,\ C=B+\alpha,\ (\alpha\geqslant 0)。$$

又因 $A+B+C=\pi$，故有

$$(B-\alpha)+B+(B+\alpha)=\pi,\ B=\frac{\pi}{3}。$$

由题设有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b},\ 即\ bc+ba=2ac,$$

再应用正弦定理即得

$$\sin B\sin C+\sin B\sin A=2\sin A\sin C,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right),$$

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha=\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3},$$

$$\frac{3}{2}\cos\alpha=\cos 2\alpha+\frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{2}\cos\alpha=2\cos^2\alpha-\frac{1}{2},$$

$$4\cos^2\alpha-3\cos\alpha-1=0。$$

解得

$$\cos\alpha=1 \text{ 或 } -\frac{1}{4},$$

因为 $\alpha<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos\alpha\neq-\frac{1}{4}$，由 $\cos\alpha=1$ 解得 $\alpha=0$，因此

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}。$$

九、给定一点 $P(3,1)$ 及两条直线

l_1: $x+2y+3=0$,

l_2: $x+2y+7=0$,

试求过 P 点且与 l_1, l_2 都相切的圆的方程。

【解】 由已给条件知，$l_1/\!/l_2$（图 3），圆心在直线

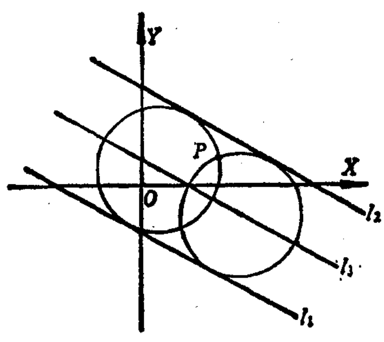

图 3

l_3: $x+2y-2=0$

上，半径是 l_1, l_2 两平行线距离的一半，要求 l_1, l_2 的距离，在

l_1 上任取一点，如 $(-1,-1)$，求得这个点到 l_2 的距离为 $2\sqrt{5}$，所以圆半径 R 为 $\sqrt{5}$。

设圆心坐标为 (α,β)，则

$$\alpha+2\beta-2=0,\ \alpha=2-2\beta,$$

将此式及 P 点坐标代入圆方程 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ 得

$$(2-2\beta-3)^2+(\beta-1)^2=5,$$

$$(5\beta-3)(\beta+1)=0,$$

解得

$$\begin{cases}\alpha=4,\\ \beta=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=\dfrac{4}{5},\\ \beta=\dfrac{3}{5}。\end{cases}$$

故所求的原方程为

$$(x-4)^2+(y+1)^2=5$$

或

$$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=5。$$

十、已知锐角三角形 ABC 的三边 a、b、c 满足不等式 $a>b>c$，问四个顶点都在三角形边上的三个正方形中，哪个面积最大？证明你的结论。

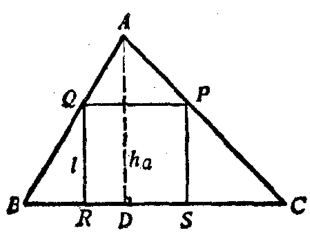

图 4

【解】 在 $\triangle ABC$ 中设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，各边上的高分别为 h_a、h_b、h_c，在 BC、AC、AB 上所作正方形的边长各为 l、m、n(图 4)。正方形 $PQRS$ 的一边 RS 在 BC 时，由 $\triangle AQP\sim\triangle ABC$ 得

$$\frac{h_a - l}{h_a} = \frac{l}{a},$$

由此解得

$$l = \frac{ah_a}{a + h_a}。$$

同理可得

$$m = \frac{bh_b}{b + h_b},\ n = \frac{ch_c}{c + h_c}。$$

由 $ah_a = bh_b$ 易得 $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$，故有

$$\frac{a - h_b}{b - h_a} = \frac{a}{b} > 1,$$

从而

$$a - h_b > b - h_a \text{或} a + h_a > b + h_b,$$

因而

$$\frac{ah_a}{a + h_a} < \frac{bh_b}{b + h_b}, \text{即} l < m,$$

同理可得

$$\frac{bh_b}{b + h_b} < \frac{ch_c}{c + h_c}, \text{即} m < n,$$

故锐角三角形最小边上的内接正方形的面积最大。

第 二 试

一、已知 $f(x) = x^2 - 6x + 5$，问满足

$$f(x) + f(y) \leqslant 0 \text{和} f(x) - f(y) \geqslant 0$$

的点 (x, y) 在平面上的什么范围？并作图。

【解】 $f(x) + f(y) = x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10$

$$= (x - 3)^2 + (y - 3)^2 - 8,$$

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 - 6x + 6y$$

$= (x-y)(x+y-6)$,

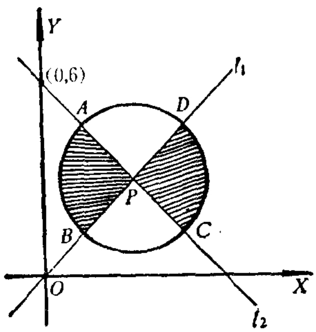

图 5

满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 的点 (x, y) 在圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=8$ 内和圆周上。

$f(x)-f(y)\geqslant 0$ 等价于

$$\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y-6\geqslant 0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x-y\leqslant 0, \\ x+y-6\leqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{满足 } x-y\geqslant 0 \text{ 的点在直线 } l_1 \text{ 上及其右下方,} \\ \text{满足 } x+y-6\geqslant 0 \text{ 的点在直线 } l_2 \text{ 上及其右上方,} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{满足 } x-y\leqslant 0 \text{ 的点在直线 } l_1 \text{ 上及其左上方,} \\ \text{满足 } x+y-6\leqslant 0 \text{ 的点在直线 } l_2 \text{ 上及其左下方,} \end{cases}$$

所以满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 和 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 的点在扇形 PAB 及其边界和扇形 PCD 及其边界上(如图 5 阴影部分)。

二、命题“一对对角及一对对边相等的四边形必为平行四边形”对吗？如果对，请证明；如果不对，请作一四边形满足已给条件，但它不是平行四边形，并证明你的作法。

【解】 命题不对。

我们可任意作一等边三角形 $\triangle ABC$，在底边 BC 上取 D，使得 $BD>DC$。由 D 作 $\angle 2=\angle 1$(如图 6)，取 $DE=AC$，连接 AE，从 $\triangle ADC\cong\triangle DAE$ 知

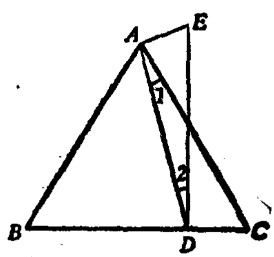

图 6

$$\angle E=\angle C=\angle B,$$

又 $DE=AC=AB$，所以四边形 $ABDE$ 满足已给条件，但

$$AE = DC < BD,$$

故四边形 $ABDE$ 不是平行四边形。

三、设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 证明

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta} \geqslant 9,$$

又问 α, β 取什么值时等式成立?

【证】

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta} \\ & = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{4}{\sin^2\alpha\sin^2 2\beta} \\ & \geqslant \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{4}{\sin^2\alpha} \qquad (1) \\ & = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + 4(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) \\ & = 5 + \operatorname{tg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg}^2\alpha \\ & = 5 + 2\left(\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right) \\ & \geqslant 5 + 2 \times 2 \times \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad (2) \\ & = 5 + 2 \times 2 = 9, \end{aligned}$$

其中 (2) 是利用了不等式 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$。

(1) 式中等号成立当且仅当

$$\sin 2\beta = 1\left(\text{即 } \beta = \frac{\pi}{4}\right),$$

(2) 式中等号成立当且仅当

$$\operatorname{tg}^2\alpha = 2 \ (\text{即 } \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}, \text{即 } \alpha = \operatorname{arc tg}\sqrt{2}),$$

所以当

$$\beta = \frac{\pi}{4}, \ \alpha = \operatorname{arc tg}\sqrt{2}$$

时，原题中的等式成立。

四、单位正方形周界上任意两点之间连一曲线，如果它把这个正方形分成两个面积相等的部分，试证这个曲线段的长度不小于1。

【证】 (i) 假设点M、N各在一双对边上（如图7），因为连接两个定点的所有曲线段中以直线段为最短，所以若以$\overset{\frown}{MN}$表示从M到N的曲线段及其长度，则

$$\overset{\frown}{MN} \geqslant MN,$$

但显然有$MN \geqslant 1$，所以

$$\overset{\frown}{MN} \geqslant 1。$$

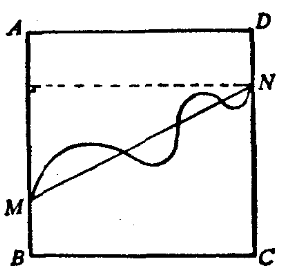

图 7

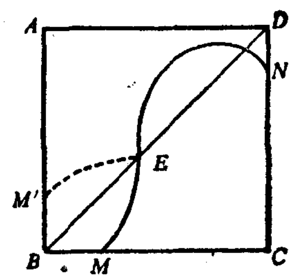

图 8

(ii) 假设点M、N分别在一双邻边上（可设M在BC上，N在CD上，见图8），那么$\overset{\frown}{MN}$一定要和对角线BD相交（否则$\overset{\frown}{MN}$分成的两部分显然面积不等）。若从M出发的$\overset{\frown}{MN}$与BD的第一个交点是E，作$\overset{\frown}{ME}$关于BD的对称图形$\overset{\frown}{M'E}$，则M'在AB上，据(i)的结果有

$$\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MEN} = \overset{\frown}{M'EN} \geqslant 1。$$

(iii) 假设点 M、N 在同一条边 BC 上(M、N 可以重合，如图 9)，那么 $\overset{\frown}{MN}$ 一定要和 BC 的两个邻边的中线 EF 相交(否则 $\overset{\frown}{MN}$ 分成的两部分面积不等)。若从 M 出发 $\overset{\frown}{MN}$ 与 EF 的第一个交点是 G，作 $\overset{\frown}{MG}$ 关于 EF 的对称图形 $\overset{\frown}{M'G}$，则 M' 在 AD 上，据 (i) 的结果有

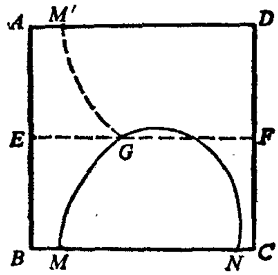

图 9

$$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{MGN}=\overset{\frown}{M'GN}\geqslant 1。$$

五、在正整数上定义一个函数 $f(n)$ 如下：当 n 为偶数时

$$f(n)=\frac{n}{2};$$

当 n 为奇数时 $f(n)=n+3$，

(i) 证明：对任何一个正整数 m，数列

$$a_0=m,\ a_1=f(a_0),\cdots,\ a_n=f(a_{n-1}),\cdots$$

中总有一项为 1 或 3。

(ii) 在全部正整数中，哪些 m 使上述数列必然出现 3？哪些 m 使上述数列必然出现 1？

【解】 (i) 若数列里有一个 $a_k>3$，则下一项 a_{k+1} 或 a_{k+2} 必小于 a_k $\left(\text{因为 } a_k \text{ 为偶数时，} a_{k+1}=\frac{a_k}{2}<a_k;\ a_k \text{ 为奇数时，} a_{k+2}=\frac{a_k+3}{2}<a_k\right)$，故数列必达到 3 或 2 或 1，如果达到 2，则下一项为 1，故数列必能达到 1 或 3。

(ii) 若 m 是 3 的偶数倍，则过几步后就变成 3 的奇数倍；若 m 是 3 的奇数倍，则下一项就是 3 的偶数倍。依此类推可知当 m 是 3 的倍数时，数列的一切项都是 3 的倍数，因此数列

必然达到 3。

若 m 不是 3 的倍数，如 m 为偶数则下一项 $\left(\frac{m}{2}\right)$ 也非 3 的倍数；如 m 为奇数，则下一项 $(m+3)$ 也非 3 的倍数。依此类推可知当 m 不是 3 的倍数时，数列的一切项都不是 3 的倍数，因此数列必然达到 1。

六、如图 10，两圆 O_1，O_2 相交于 A、B，圆 O_1 的弦 BC 交圆 O_2 于 E，圆 O_2 的弦 BD 交圆 O_1 于 F，证明：

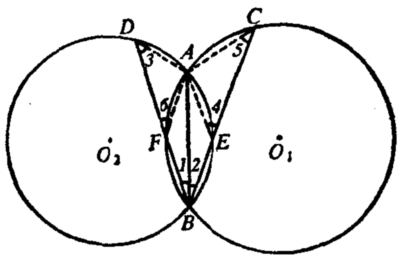

图 10

(i) 若 $\angle DBA = \angle CBA$，则 $DF = CE$，

(ii) 若 $DF = CE$，则 $\angle DBA = \angle CBA$。

【证】 (i) 在图上作连线 AC，AE，AD，AF，由于圆的内接四边形的外角等于内对角，所以

$$\angle 3 = \angle 4,\ \angle 5 = \angle 6。$$

又已知 $\angle 1 = \angle 2$，所以

$$DA = AE\ (\text{相等圆周角所对的弦相等}),$$

$$\triangle ADF \cong \triangle AEC\ (s.\ a.\ a.),$$

因而

$$DF = CE\quad(\text{对应边相等})。$$

(ii) 若 $DF = CE$，则又由于已知