建筑结构振动计算续编

郭长城　编著

中国建筑工业出版社

建筑结构振动计算续编

郭长城 编著

中国建筑工业出版社

（京）新登字 035 号

本书是《建筑结构振动计算》一书的续编，主要是在该书的基础上进一步介绍较复杂的动力计算理论，并结合实际举出计算例题。

主要内容包括：单自由度体系振动计算、有限自由度体系振动计算、计算自频和振型实用计算、动力有限元法、变分法、计算大型复杂结构的模态综合法以及多层厂房楼板竖向振动及层间影响的计算等。本书可供一般土建工程技术人员和高等院校有关专业师生参考，亦可供结构专业和结构力学专业研究生作为教材使用。

建筑结构振动计算续编

郭 长 城　编著

•

中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）

新　华　书　店　经　销

中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

•

开本：787×1092毫米　1/32　印张：$12^3/_4$　字数：286 千字

1992年 3 月第一版　　1992年 3 月第一次印刷

印数：1—4,600册　　定价：7.85元

ISBN7—112—01474—3/TU•1096

（6510）

前　言

一、本书是在作者的《建筑结构振动计算》一书的基础上，根据由浅入深、理论联系实际的原则编写的，目的是帮助读者在振动计算知识深度上再跨上一个台阶，能运用现代计算技术，解决建筑工程中更复杂一些的动力计算问题。

二、书中前七章连同初编的一部分是作者十几年来为土建结构专业、土建结构力学专业硕士研究生讲授的结构动力学课的讲稿，可作为教材使用。

其内容：

第一章为对单自由度体系振动计算的补充知识，包括快速傅利叶变换、非线性结构动反应分析等。

第二章为有限自由度体系振动计算的补充知识，包括结构-土体体系一类非正交阻尼阵体系计算的基础知识。

第三章为计算自频和振型的实用计算方法，包括近年内出现的有较好效果的里兹（RITZ）向量直接叠加法。

第四章、第五章介绍经常使用的动力有限元法和变分法。

第六章介绍计算大型复杂结构的模态综合法或动力子结构法。

由于在自由界面——模态综合法中出现缺少必要约束的结构（几何可变体系），故在第七章中介绍无约束结构的振动计算。

三、最后两章介绍多层厂房楼板竖向振动及层间影响的计算方法，主要是汇报我所接触到的有关规范组成员和作者偕同研究生的研究工作。希望有助于设计、科研工作者掌握、研究这方面的机算方法和手算方法。

这两章是前七章的综合应用，阅读它对于掌握前面的基础理论是有帮助的。

书中错误和不妥之处，敬希读者指正。

常 用 符 号

p ——自振圆频率（不考虑阻尼）

p_D——自振圆频率（考虑阻尼）

T——自振周期

T_P——荷载周期

ω——扰力频率

β——频率比

ε——向位差

A——振幅

v——速度

a——加速度

m——质量

$\overline{m}$——质量集度

M——力矩

I——截面惯性矩

J——转动惯量

$\mathrm{H}(\omega)$——频响函数

γ——阻尼系数

ξ——阻尼比

$h(t-\tau)$——脉冲响应

T——外力功、动能

u——位移、势能

Q——广义力

目　录

第一章　单自由度体系的振动（补充）

§1-1　单自由度体系对周期性荷载的反应

一、将周期性荷载分解为实的谐分量

将周期性荷载（图1-1）按傅氏（傅利叶）级数展开，分解为简谐分量，然后用叠加法计算结构的反应。

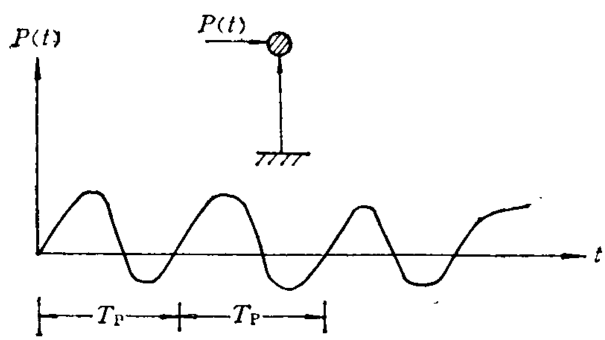

图 1-1

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega_1 t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega_1 t \tag{1-1}$$

其中
$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_P}。 \tag{1-2}$$

T_P为荷载的周期（图1-1）。

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)\cos n\omega_1 t dt \\
b_n &= \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)\sin n\omega_1 t dt
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3)$$

a_0为静载分量，在其作用下，结构（质点）的位移

$$y_0 = a_0/K \qquad (1\text{-}4)$$

K为结构刚度（发生单位位移所需的力）。

在简谐荷载$a_n\cos n\omega_1 t$作用下，结构的位移

$$y_n = y_n^{st}\cdot\mu_n\cdot\cos(n\omega_1 t - \varepsilon_n) \qquad (1\text{-}5)$$

其中

$$y_n^{st} = \frac{a_n}{K} \qquad (1\text{-}6)$$

为在荷载幅值a_n作用下产生的静位移

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}} \qquad (1\text{-}7)$$

为动力系数。

ξ为阻尼比。

$$\beta_n = \frac{(n\omega_1)}{p} \qquad (1\text{-}8)$$

为频率比。

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_n = \frac{2\xi\beta_n}{1-\beta_n^2} \qquad (1\text{-}9)$$

参见初编101页，式（3-54）、（3-55），那里阻尼比以D_t表

示。

不计阻尼时，$\xi=0$，

$$\left.\begin{aligned}\mu_n&=\frac{1}{1-\beta_n^2}\\ \varepsilon_n&=0\end{aligned}\right\}\tag{1-10}$$

在简谐荷载$b_n\sin n\omega_1 t$作用下，结构的位移

$$y_n'=y_n^{st'}\mu_n'\sin(n\omega_1 t-\varepsilon_n')\tag{1-11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}y_n^{st'}&=\frac{b_n}{K}\\ \mu_n'&=\mu_n\\ \varepsilon_n'&=\varepsilon_n\end{aligned}\right\}\tag{1-12}$$

于是，在周期性荷载$P(t)$作用下，结构的位移为

$$y(t)=\frac{1}{K}\{a_0+\Sigma\mu_n[a_n\cos(n\omega_1 t-\varepsilon_n)+b_n\sin(n\omega_1 t-\varepsilon_n)]\}\tag{1-13}$$

二、将荷载分解为复的谐分量

（一）荷载傅氏分解的指数形式

利用尤拉公式

$$\left.\begin{aligned}\sin x&=-\frac{1}{2}i(e^{ix}-e^{-ix})\\ \cos x&=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\end{aligned}\right\}\tag{1-14}$$

周期性荷载$P(t)$的实谐分解式（1-1）可变为

$$P(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n e^{in\omega_1 t}\tag{1-15}$$

包括负频、正频、零频。其中

$$C_n=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}P(t)e^{-in\omega_1 t}\,dt\tag{1-16}$$

推导过程如下：

将关系式（1-14）代入式（1-1）得

$$P(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n e^{in\omega_1 t}+a_n e^{-in\omega_1 t}}{2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-ib_n e^{in\omega_1 t}+ib_n e^{-in\omega_1 t}}{2}$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}e^{in\omega_1 t}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\omega_1 t}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right) \qquad (A)$$

利用式（1-3）得

$$\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2}\ \frac{2}{T_P}\int_0^{T_P}P(t)[\cos n\omega_1 t-i\sin n\omega_1 t]dt$$

$$(B)$$

利用式（1-14），式（B）变为

$$\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}P(t)e^{-in\omega_1 t}dt \qquad (C)$$

同理可得

$$\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}P(t)e^{in\omega_1 t}dt \qquad (D)$$

按式（1-3）有

$$a_0=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}P(t)dt \qquad (E)$$

令

$$
\left.\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)e^{-in\omega_1 t}\,dt \\
C_{-n} &= \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)e^{in\omega_1 t}\,dt \\
C_0 &= \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)\,dt
\end{aligned}\right\} \tag{1-17}
$$

于是，式（A）可改写为

$$
P(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-in\omega_1 t} \tag{1-18}
$$

或概括地表示为

$$
P(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\omega_1 t} \tag{1-19}
$$

这是因为式（1-19）中

1. $n=0$之项 $\quad C_n e^{in\omega_1 t}\Big|_{n=0} = \left(\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} p(t)e^0 dt\right)\cdot e^0$

$$
= \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} P(t)\,dt = C_0
$$

即式（1-18）中的第一项。

2. n为正数各项之和时为$\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} C_n e^{in\omega_1 t}$，即式（1-18）中的第二项。

3. n为负数各项之和时，为

$$\sum_{n=-1}^{n=-\infty} C_n e^{in\omega_1 t} = \sum_{n=-1}^{n=-\infty}\left(\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} e^{-in\omega_1 t}\,dt\right)\cdot e^{in\omega_1 t}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} e^{in\omega_1 t}\,dt\right)e^{-in\omega_1 t}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} C_{-n}\cdot e^{-in\omega_1 t}$$

即式（1-18）中的第三项。

$n=0$时，频率$n\omega_1=0$，所以第一项对应零频。n为正数时，$n\omega_1$为正频，所以第二项对应正频。同理第三项对应负频。

这样，周期性荷载可分解为复的谐分量，包括正频的、负频的和零频的。

谐分量n表达式$C_n e^{in\omega_1 t}$中的C_n一般是复的，称为谐分量的复幅值，可表为

$$C_n = |C_n| e^{i\theta_n} \tag{1-20}$$

由此，谐分量n可表为

$$C_n e^{in\omega_1 t} = |C_n| e^{i(n\omega_1 t+\theta_n)} \tag{1-21}$$

此式表明，复幅值的模$|C_n|$代表谐分量的幅值，其辐角θ_n代表分量的初相位（$t=0$时的相位）。

设j为正数，令$n=j$的分量为分量j，其复幅值为C_j，令$n=-j$的分量为分量（$-j$），其复幅值为C_{-j}，则对于实荷载$P(t)$有C_{-j}与C_j互为共轭，即

$$C_{-j} = \overline{C}_j \tag{1-22}$$

且分量j与分量（$-j$）共轭，即有

$$C_{-j} e^{i(-j)\omega_1 t} = \overline{C_j e^{ij\omega_1 t}} \tag{1-23}$$

【证】

$$C_j=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}P(t)e^{-ij\omega_1 t}\,dt$$

$$C_{-j}=\frac{1}{T_P}\int_0^{T_P}P(t)e^{ij\omega_1 t}dt$$

对于任意时刻t都有

$$P(t)e^{ij\omega_1 t}=\overline{P(t)e^{-ij\omega_1 t}}$$

所以其积分也共轭，故有

$$C_{-j}=\overline{C}_j$$

即式（1-22）成立。

又因 $$e^{-ij\omega_1 t}=\overline{e^{ij\omega_1 t}}$$

所以有 $$C_{-j}e^{-ij\omega_1 t}=\overline{C}_j\cdot\overline{e^{ij\omega_1 t}}$$

而二复数共轭之积$\overline{A}\cdot\overline{B}$等于二复数之积的共轭$\overline{AB}$，所以有

$$C_{-j}e^{-ij\omega_1 t}=\overline{C_j e^{ij\omega_1 t}}$$

即式（1-23）成立。 证毕

共轭复数之和是实数。因此，在$P(t)$展开式（1-19）中同序号的正负两个谐分量i和为实数。同时C_0为实数（见式(1-17)）。因而

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n e^{in\omega_1 t}$$

为实数。这就是为什么实函数$P(t)$可以分解为复的谐分量之和的理由。

（二）频响函数

为了计算周期性荷载

$$P(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n e^{in\omega t}$$

对结构的影响，先计算单位复谐荷载$1\cdot e^{i\omega t}$的影响(图1-2)。

运动方程为

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+Ky=e^{i\omega t} \qquad (1-24)$$

或

$$\ddot{y}+2\xi p\dot{y}+p^2y=\frac{1}{m}e^{i\omega t} \qquad (1-25)$$

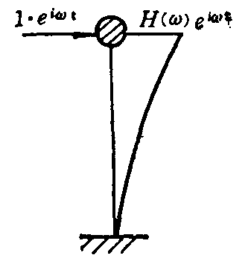

图 1-2

设稳态解

$$y(t)=H(\omega)e^{i\omega t} \qquad (1-26)$$

其中$H(\omega)$为待定位移的复幅值，是扰频ω的函数。

将式（1-26）代入方程（1-25），得

$$H(\omega)=\frac{1}{K}\,\frac{1}{(1-\beta^2)+i2\xi\beta} \qquad (1-27)$$

其中

$$\beta=\frac{\omega}{p}$$

$H(\omega)$叫频响函数。它是在$1\cdot e^{i\omega t}$作用下产生的稳态振动的复幅值。

当$\omega=n\omega_1$时

$$H(n\omega)=\frac{1}{K}\,\frac{1}{[1-(n\beta_1)^2]+i2\xi n\beta_1} \qquad (1-28)$$

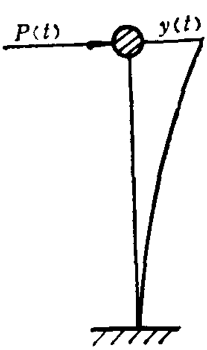

图 1-3

其中

$$\beta_1=\frac{\omega_1}{p}$$

（三）周期性荷载产生的结构稳态反应

周期性荷载可分解为

$$P(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n e^{in\omega_1 t}$$

利用频响函数的概念，谐分量$C_ne^{in\omega_1 t}$产生的位移等于

$$C_n\cdot H(n\omega_1)e^{in\omega_1 t}$$