SUAN SUAN LIE LIE

算算列列

4321
5
6
7890

上海教育出版社

算算列列

刘守身

上海教育出版社

内 容 提 要

你能把1～9九个数码，或0～9十个数码组成几个数，配以+、-、×、÷符号列成等式吗？这是一项十分有趣且富有教益的活动，它将有利于提高你的计算技能和分析、思考问题的能力。

本书就将告诉你怎样思考和试列这类等式，小学高年级和初中学生就能阅读。

算 算 列 列

刘 守 身

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　上海市第十二厂印刷

开本787×1092　1/32　印张3　字数64,000

1980年7月第1版　1980年7月第1次印刷

印数1—100,000本

统一书号：7150·2289　　定价：0.23元

目　录

1．列加减等式 …………………………………………… 1

　一、是 9 的倍数 ………………………………………… 1

　二、用两个加号 ………………………………………… 9

　三、用十个数码 …………………………………………16

　四、${}_{9}^{+}N^{+}$和${}_{10}^{+}N^{+}$ ……………………………………29

　五、L 相关 M 异 ……………………………………39

2．列乘除等式 ……………………………………………45

　一、有两条规律 …………………………………………45

　二、用一个乘号 …………………………………………51

　三、用两个乘号 …………………………………………60

　四、用多个乘号 …………………………………………68

3．列分数等式 ……………………………………………73

　一、分数等式 ……………………………………………73

　二、列出分数 ……………………………………………78

　三、从${}_{9}^{(\frac{1}{n})}N$推${}_{10}^{(\frac{1}{n})}N$ ………………………………86

1 列加减等式

一、是9的倍数

“小澄，你来看，简直是个不可思议的奥妙!”小嘉突然大声地说。

“我不信有什么不可思议的。”正在和小嘉一起做课外作业的小澄说，“尤其是初等数学，加、减、乘、除，怎么会有不可思、不可议的呢?”

“你少发议论，先来看看吧！今天下午，你去少年宫了，数学老人出了这样一道题：将1～9九个数码组成三个数，使其中两个数的和等于第三个数。例如

173+295=468，　138+429=567，　152+487=639。

我足足花了一个多小时，一个等式也没凑出来。刚才却偶然发现，根据老爷爷举例的等式，只要换换数码位置，一下子就能列出一大串。你说奥妙不奥妙?”小嘉根据数学老人提出的第一个式子，写出了下面一些等式：

175+293=468，　193+275=468，　195+273=468，

127 + 359 = 486，　129 + 357 = 486，　157 + 329 = 486，
159 + 327 = 486，　251 + 397 = 648，　257 + 391 = 648，
291 + 357 = 648，　297 + 351 = 648，　317 + 529 = 846，
319 + 527 = 846，　327 + 519 = 846，　329 + 517 = 846，
135 + 729 = 864，　139 + 725 = 864，　125 + 739 = 864，
129 + 735 = 864，　271 + 593 = 864，　273 + 591 = 864，
291 + 573 = 864，　293 + 571 = 864。

"和数等于 468，486，648，846，864 都有等式，为什么没有和数等于 684 的呢？"小澄问。

"这我分析过。如果和数是 684，那末剩下六个数码是 1，2，3，5，7，9。要使两个加数的和的个位数是 4，这两个加数个位上的数码只可能是 1 和 3，或者 5 和 9。当用 1 和 3 时，在剩下的四个数码 2，5，7，9 中，取两个作十位数，它们的和都不可能是 8；当用 5 和 9 时，它们的和要向十位数进 1，因此，两个加数十位上数码的和应是 7，这在剩下的四个数码中是不可能的。所以和数等于 684 就没有合适的等式。

在和数为 567 的等式中也有类似的情况。和数是 756，765 没有合适的等式成立。和数等于 567，576，657，675 都有等式。"说着，小嘉写出了下面一些等式：

128 + 439 = 567，　129 + 438 = 567，　138 + 429 = 567，
139 + 428 = 567，　218 + 349 = 567，　219 + 348 = 567，
248 + 319 = 567，　249 + 318 = 567，　182 + 394 = 576，
184 + 392 = 576，　192 + 384 = 576，　194 + 382 = 576，
218 + 439 = 657，　219 + 438 = 657，　238 + 419 = 657，
239 + 418 = 657，　182 + 493 = 675，　183 + 492 = 675，
192 + 483 = 675，　193 + 482 = 675，　281 + 394 = 675，
284 + 391 = 675，　291 + 384 = 675，　294 + 381 = 675。

"这和数为 639 的等式一定也能变出一大串了。"小澄说。

"能！你看这张草稿纸"。只见纸上写着：

152 + 487 = 639，　157 + 482 = 639，　182 + 457 = 639，
187 + 452 = 639，　215 + 478 = 693，　218 + 475 = 693，
275 + 418 = 693，　278 + 415 = 693，　152 + 784 = 936，
154 + 782 = 936，　182 + 754 = 936，　184 + 752 = 936，
215 + 748 = 963，　218 + 745 = 963，　245 + 718 = 963，
248 + 715 = 963。

小嘉接着说："和数是 369，396 的等式都不成立。这很容易证明。因为和数用了 3，6，9 三个数码，剩下六个数码是1，2，4，5，7，8。由这六个数码组成两个三位数，它们的和最小的是 147 + 258 = 405，超过 400。所以和数是 369，396 不可能有合适的等式成立。

刚才我又试过，和数用 3，4，5 列不出一个等式；和数用 4，5，6 三个数码，也列不成一个等式。我在想：为什么和数非要用 4，6，8；5，6，7 或 3，6，9 这样的数组？还有没有别的数组作和数也能成立等式呢？因为还不了解其中的奥妙，所以感到不可思议。你能看出其中的奥妙吗？"

小澄考虑了一下说："这问题我也是第一次遇到，让我好好想想。"

"又找到一个啦！"小嘉高兴得叫了起来，"你看，我原先在凑和数为 435 时不成立等式，但将数码换换位，就成立等式啦！

167 + 328 = 495.

$$\begin{array}{r} 1\ 6\ 7 \\ +\ 2\ 9\ 8 \\ \hline 4\ 3\ 5 \end{array}$$

我再变换变换位置看。行！又是一大串。"

173 + 286 = 459，　176 + 283 = 459，　183 + 276 = 459，

186 + 273 = 459,　127 + 368 = 495,　128 + 367 = 495,
167 + 328 = 495,　168 + 327 = 495,　162 + 387 = 549,
167 + 382 = 549,　182 + 367 = 549,　187 + 362 = 549,
216 + 378 = 594,　218 + 376 = 594,　276 + 318 = 594,
278 + 316 = 594,　162 + 783 = 945,　163 + 782 = 945,
182 + 763 = 945,　183 + 762 = 945,　317 + 628 = 945,
318 + 627 = 945,　327 + 618 = 945,　328 + 617 = 945,
216 + 738 = 954,　218 + 736 = 954,　236 + 718 = 954,
238 + 716 = 954,　271 + 683 = 954,　273 + 681 = 954,
281 + 673 = 954,　283 + 671 = 954。

“共三十二个等式。由 4，5，9 三个数码组成的和数，没有不成立等式的。”

“这倒有点不可思议了！”小澄皱眉说，“我还以为和数的三个数码必须成等差关系呢！既然 4，5，9 作和数也成立，那……噢！你看，和数的三个数码相加，都是 9 的倍数。对！对！我来证明证明看。”她立即写了起来。

设 a,b,c,d,e,f,g,h,i 各代表 1～9 九个数码中的一个，那末等式可以写成：

$$abc + def = ghi.$$

等号两边各加 ghi，得

$$abc + def + ghi = ghi + ghi = 2ghi,$$

这里的 $abc + def + ghi$，正好是 1～9 九个数码组成的，而 $1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 9 = 45$，是 9 的倍数。因此，和数 $2ghi$，也就是 ghi 一定是 9 的倍数。这就说明，成立等式的和数，它的三个数码的和，即 $g + h + i$ 一定要是 9 的倍数。

“请你讲详细些，我还不明白呢！”

小澄问道：“一个数能不能被 9 整除，只要看它各位上数

码的和是不是 9 的倍数，这你知道吧！”

“知道一点，但道理还讲不清。”

“这很容易理解。例如 234，可以写成

$$
\begin{aligned}
234 &= 2\times100+3\times10+4\\
&=2\times(99+1)+3\times(9+1)+4\\
&=2\times99+2+3\times9+3+4\\
&=(2\times99+3\times9)+(2+3+4)。
\end{aligned}
$$

在最后那个等号后面，前面括号里的数总能被 9 整除*，因此，234能不能被 9 整除，只要看后面括号里的和数能不能被 9 整除就可以了。而后面括号里正好就是 234 各位上数码的和。”

“噢，原来是这样！但现在是三个数相加，情况也一样吗？”小嘉又问道。

“那也一样。”小澄回答说，“几个数相加，能不能被 9 整除，也只要看各个数码的和是不是 9 的倍数就可以了。例如 117＋34＋56，由于 1＋1＋7＋3＋4＋5＋6＝27，是 9 的倍数，所以它们的和一定是 9 的倍数。不仅这个和，就是135＋476＋1，3514＋7＋16，……也都是 9 的倍数。”

“啊！我明白了！根据这一规律，列等式可方便多啦！”小嘉高兴地说，“我们只要把三个数码的和是 9 的倍数的数全部写出来，然后一个个地来讨论就可以了。”

小澄想了想说：“在 1～9 九个数码中，两个三位数相加，最小的和是 135＋246＝381，但这个和数又要是 9 的倍数，所以我们只要考虑和数在 387 以上的就可以了。”

于是他们一起列出了下面一些可能的和数：

---

* 两个或两个以上的整数，如果它们都能被 9 整除，那末它们的和也一定能被 9 整除。如 9＋18＋27＝54，三个加数都能被 9 整除，所以和也能被 9 整除。

387，396，423，432，459，468，486，495，513，531，549，567，576，594，612，621，639，648，657，675，684，693，729，738，756，765，783，792，819，837，846，864，873，891，918，927，936，945，954，963，972，981。

“有些数前面已经试列过等式了。”小澄在上列数下边加划横线，表示已经列过。“现在再试列吧！”

“不一定个个都有等式成立吧！如前面说过的 684，756，765，396 等就列不出等式。”小嘉迟疑地说。

小澄想了一会，说：“对！象和数是 387 也不可能成立等式。因为如果和是 387，那末剩下六个数码：1,2,4,5,6,9。要组成两个三位数的加数，它们百位上的数码只能是 1 和 2；在剩下的四个数码中，要组成两个个位上数码的和是 7，两个十位上数码的和是 8，都是不可能的。

和数为 423，432 显然都不行。因为在剩下的六个数码中，由任两个数码当百位数，它们的和都超过 600。”

“对！对！我看和数为 513，531，612，621* 的情况与上面一样，所以也不成立合适的等式。”小嘉说。

他们一起研究了 729，发现在剩下的六个数码中，两个加数的百位数只能是 1 和 5，而要使和数的个位数为 9，可以用 3 和6。这样就有四个等式：

$$143+586=729, \qquad 146+583=729,$$
$$183+546=729, \qquad 186+543=729。$$

经过一番努力，他们将本页上面所列的和数，凡是可以列出等式的，全都列了出来。列的方法是，在 1～9 九个数码中，

* 事实上，只有当和数的三个数码的和等于 18 时，才可能成立合适的等式。证明见第22页。

除去了和数的三个数码，在剩下的六个数码中，先确定两个加数的个位数，再确定两个百位数（或相反）。

自 729 以下，还有 11 个和数，他们列得了六十八个等式。（你能全部列出来吗？）这样，他们列出了本题的全部一百六十八个等式。

小嘉非常得意，正收拾纸笔准备回家。小澄说："象这样的问题，不必一一列出全部等式。你看，例如和数为 729 的四个等式，它们加数的个位数码都是 3，6；百位数码都是 1，5。所以可以认为是属于一种类型。但它有四个不同的等式。再如前面和数为 954 的八个等式，其中有四个等式，加数的个位数码都是 6，8，百位数码都是 2，7；而另外四个等式，加数的百位数码与个位数码却分别是 2，6和 1，3。因此，它们是两种类型解，每一类型解有四个不同的等式。这样，你上面所列的六十八个等式，实际上是十七种类型解。"

$142+596=738$，	$124+659=783$，	$214+569=783$，
$134+658=792$，	$243+576=819$，	$352+467=819$，
$142+695=837$，	$241+596=837$，	$214+659=873$，
$234+657=891$，	$324+567=891$，	$243+675=918$，
$342+576=918$，	$341+586=927$，	$314+658=972$，
$235+746=981$，	$324+657=981$。	

"这样处理可以简化不少。那就是说，这一问题共有四十二种类型解。但列出全部等式，对我来说也是很有收获的。可惜再没有类似的问题了，如果有的话，我还想练习练习。"小嘉兴致勃勃地说。

"那好，我把题目换换，用一个减号，将 1～9 九个数码组成三个数，列成等式，你去列吧！"

"这题目能成立吗？别胡出题，如果题目无解，害得人家

自白浪费时间，那太不应该了。”

“你放心好了，不信的话，我就列两个给你看看：

$$468-293=175，657-239=418。$$

你算算，对不对？”

“这倒真的成立。刚才你用加号列等式还很生疏，怎么一下子会出用减号列等式的题？”

“我再举两个例子，你与上面两个等式对照着看，就完全明白了。

$$468-175=293，657-418=239。$$

看出奥妙了吧！”

小嘉看了一回，恍然大悟地说：“噢！原来就是移移项，加法变减法。”

“用文字式表达，由已知 $abc+def=ghi$，推出用一个减号列成等式，你会不会？”

“当然会！就是

$$ghi-abc=def，ghi-def=abc。$$

已求得用一个加号列的等式共有 168 个，那末用一个减号列的等式就有 $2\times168=336$ 个，对吧！”

小澄点点头说：“时候不早了，快回家吧！”

“你这题出得好，我明天也要给同学们做一做”。

二、用两个加号

第二天课后，数学老人一走进教室，同学们就围住老爷爷，吵吵嚷嚷，要他讲故事。老人笑呵呵地说："今天我不讲，请小嘉和小澄向大家做一个列等式的报告好不好？"同学们热烈鼓掌，表示欢迎。

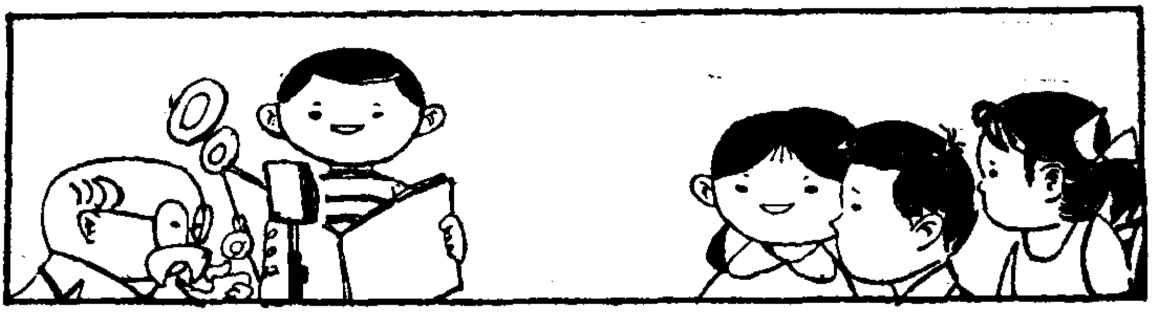
小澄请小嘉讲。小嘉不慌不忙地报告了他们列等式的结果和体会。数学老人特别赞扬了小嘉和小澄勤于思考，刻苦钻研的精神。他说："我们学习、工作，要善于探索规律，掌握了规律，就象开锁掌握了钥匙一样，问题就迎刃而解了。"接着他提出："你们如果有兴趣的话，可以继续试算将1～9九个数码组成数，用两个加号列等式的问题。"说着，他写出了两个例子：

$$59+74+83=216, \qquad 426+98+7=531。$$

小嘉回家就分析这新问题。他把数学老人所举的两种形式，用文字式表达为

$$ab+cd+ef=ghi, \qquad abc+de+f=ghi。$$

与前面列等式一样，要使等式成立，ghi 必须是9的倍



数。因此，可能的和数(既是三位数，又是9的倍数，最小的不会小于126)有126，135，(144中"4"重复，不合适)153，162，(171中"1"重复，180出现"0"，都不合适)189，198，(207不合适)216，(225不合适)234，243，……

$$ab+cd+ef=ghi$$

这个等式等号左边最大可能的和数为$96+85+74=255$，也就是ghi只可能是126，135，153，162，189，198，216，234，243九个数。

设和数为126。剩下的六个数码为3，4，5，7，8，9。取其中最小的三个数作加数的十位数，其余三个数为个位数。结果是$37+48+59=144$，已超过126。于是可以知道，和数为126是不可能成立合适的等式的。

同样道理，和数为135也没有合适的等式成立。

当和数为153时，剩下的六个数码为2，4，6，7，8，9。取6，8，9作加数的个位数，2，4，7为十位数。它有六种不同组合的等式：

$26+48+79=153$，　　$26+49+78=153$，

$28+46+79=153$，　　$28+49+76=153$，

$29+46+78=153$，　　$29+48+76=153$。

可以看出，这六种不同组合的等式是一种类型解。

以下的和数，能列出类型解的有：

$35+48+79=162$，　　$52+63+74=189$，

$34+85+97=216$，　　$43+75+98=216$，

$53+74+89=216$，　　$51+86+97=234$，

$61+75+98=234$，　　$61+85+97=243$。

每一类型解有六种不同形式的等式(你能全部列出来吗?)

因此，这一形式的等式，共有九种类型解，五十四个不同的等式。

$$abc + de + f = ghi$$

因为 a 最小为 1，那末 g 最小为 2，h 最小为 3，i 最小为 4。所以和数 ghi 最小应该是 234。以下可能的和数是：243，261，279，297，315，324，342，351，……

小嘉就从和数为 234 开始试列等式。

设和数为 234。剩下六个数码是 1,5,6,7,8,9。一个加数百位上的数码只能是 1；于是三个加数的个位数码相加要是 4，就只能是 7,8,9；两个加数十位上数码就是 5,6。它有十二个不同的等式，却属于一种类型解：

$157 + 68 + 9 = 234$，　　$157 + 69 + 8 = 234$，

$168 + 57 + 9 = 234$，　　$158 + 67 + 9 = 234$，

$158 + 69 + 7 = 234$，　　$169 + 57 + 8 = 234$，

$159 + 67 + 8 = 234$，　　$159 + 68 + 7 = 234$，

$168 + 59 + 7 = 234$，　　$167 + 59 + 8 = 234$，

$167 + 58 + 9 = 234$，　　$169 + 58 + 7 = 234$。

设和数为 243。剩下的六个数码是 1,5,6,7,8,9。一个加数百位上的数用 1，三个加数的个位数相加要是 3，只能用 6,8,9。于是两个十位数用 5,7，得到一种类型解：

$$156 + 78 + 9 = 243。$$

它有十二个不同的等式。

再试列和数为 261。剩下的六个数码是 3,4,5,7,8,9。任何一个数当 a，和数都超过 300，所以它不成立等式。

经过一个个试列，小嘉对上面可能的和数，得到了下面的结果：

$157 + 68 + 9 = 234$，　　$156 + 78 + 9 = 243$，

$246+97+8=351$, $279+68+4=351$,
$371+82+6=459$, $371+92+5=468$,
$426+78+9=513$, $426+97+8=531$,
$481+92+3=576$, $534+78+9=621$,
$641+83+5=729$, $641+92+5=738$,
$752+63+4=819$, $751+92+3=846$。

归纳起来，列成 $abc+de+f=ghi$ 形式的类型解共十四种，每种类型解都有十二个不同的等式，因此共有 $14\times12=168$ 个不同等式。

因此，用两个加号，将 1～9 九个数码组成数，列成等式，共有二百二十二个。

小嘉把等式 $ab+cd+ef=ghi$ 移项，变换成

$ghi-ab-cd=ef$，$ghi-ab-ef=cd$，$ghi-cd-ef=ab$。

把等式 $abc+de+f=ghi$ 移项，变换成

$ghi-abc-de=f$，$ghi-abc-f=de$，$ghi-de-f=abc$。

即每一个用两个加号列成的等式，都可以移项变换成三个用两个减号列成的等式。因此，用两个减号，将 1～9 九个数码组成数，列成等式，共有六百六十六个。

小澄来看小嘉，小嘉高兴地告诉她："用两个加号的等式，我已经全都列出来了！"

小澄仔细地看了小嘉所列的等式，追问一句："真的列全了吗？"

小嘉肯定地点点头。小澄说："你看！象

$abc+d+e=fghi$， $ab+cd+e=fghi$

的等式，不也是九个数码，两个加号吗？"

小嘉一下子愣住了。他仔细想了想说："这两种形式都列不出等式。因为前面的式子，等号左边最大的可能数值是

987＋6＋5＝998，不可能是一个四位数；而后面式子中，两个两位数与一个一位数的和，更不可能是一个四位数。”

小澄说：“说得对！如果随便写，还可以列出一些形式，如 $abcd+e+f=ghi$，显然这是不可能成立等式的。但我们既然讨论这一问题，就要考虑全面，要把各种可能的情况都想到，列不出等式的也要说明道理，这样才不致有所遗漏。”

小嘉点头表示同意。只见小澄在笔记本上写了些什么，就要回家。小嘉问道：“你记了些什么？”一看，只见写着：

$${}^{+}_{9}N={}^{+}_{9}L\times{}^{+}_{9}M=42\times4=168,$$

$$\begin{aligned}{}^{2+}_{9}N&={}^{2+}_{9}N_{\textcircled{1}}+{}^{2+}_{9}N_{\textcircled{2}}={}^{2+}_{9}L_{\textcircled{1}}\times{}^{2+}_{9}M_{\textcircled{1}}+{}^{2+}_{9}L_{\textcircled{2}}\times{}^{2+}_{9}M_{\textcircled{2}}\\&=9\times6+14\times12=54+168=222。\end{aligned}$$

“这 L，M，N 是什么意思呢？”小嘉问道。

“我把所列成等式的个数用一个记号‘N’来代表，N 左上角的‘＋’或‘2＋’，表示等号前面用一个或两个加号，左下角的‘9’，表示1～9九个数码。

$${}^{+}_{9}N=168,$$

表示用一个加号，将1～9九个数码组成数，列成等式，共有168个。

为了表示得更详细，我把类型解的个数用 L 表示，每一类型解的不同等式的个数用 M 表示。例如上面的 ${}^{+}_{9}N$ 中，

$${}^{+}_{9}L=42,$$

表示它有四十二种类型解；

$${}^{+}_{9}M=4,$$

表示每种类型解有四个不同的等式。”

“那么这 ${}^{2+}_{9}N_{\textcircled{1}}$ 和 ${}^{2+}_{9}N_{\textcircled{2}}$ 下角的①，②，表示同一问题的不同形式的等式，对不对？”