美国物理试题与解答

第二卷　电磁学

中国科学技术大学物理辅导班　主编

赵叔平　尤峻汉　朱俊杰　审校

中国科学技术大学出版社

1986·合肥

内　容　提　要

《美国物理试题与解答》丛书按学科范畴分为七卷。该丛书收集了美国加利福尼亚大学伯克利分校、纽约州立大学布法罗分校、芝加哥大学、哥伦比亚大学、麻省理工学院、普林斯顿大学和威斯康星大学的研究生入学试题，以及丁肇中博士招收的高能实验物理博士研究生入学试题2550道，同时收集了1980—1985年中国赴美物理硕士、博士入学资格考试（CUSPEA）物理试题100道，并逐一作了解答。这些试题面广义新，思路灵活，所用的数学工具虽不繁难，但却十分注重物理思想和实际应用，其方法和结论往往较为简单和实用。在一定程度上反映了美国物理教学的精华，对我国的物理教学也有借鉴和启迪作用。

本卷收集电磁学试题440道。可供我国大学物理系师生使用，对于准备攻读硕士、博士学位的研究生和留学生，更是一本难得的参考书，对于中学物理教师的进修，也有一定的参考价值。

美国物理试题与解答

第二卷　电磁学

中国科学技术大学物理辅导班　主编

赵叔平　尤峻汉　朱俊杰　审校

责任编辑：宋　义　　封面设计：何燕明

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行　　各地新华书店经售

*

开本：787×1092毫米 1/32　印张：$18\frac{1}{2}$　字数：415千

1986年10月第1版　　1991年6月第3次印刷

印数：15001—18000册

统一书号：13474·2　　定价：5.80元

前　言

习题是锻炼思维的体操，而试题又往往是习题中的精粹。解答物理题是物理课程学习中必要而又重要的环节。

这套“美国物理试题与解答”是一部丛书，分七卷。各卷名称及审校人如下：第一卷，力学（强元棨、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田）；第二卷，电磁学（赵叔平、尤峻汉、朱俊杰）；第三卷，光学（白贵儒、郭光灿）；第四卷，原子物理学、核与粒子物理学（杨保忠、金怀诚）；第五卷，热力学与统计物理学（郑久仁）；第六卷，量子力学（张永德、范洪义、朱栋培）；第七卷，固体物理学与综合题（张家铝、周又元、章世玲）。《丛书》大体上包括了大学物理课程的全部内容。

《丛书》从美国七所大学近十年来研究生入学试题以及各类试题共3100道中，筛选了2550道，除个别题外均给予了解答。试题来源及其代号是：哥伦比亚大学(Col)；加利福尼亚大学伯克利分校(Ber)；麻省理工学院（MIT）；威斯康星大学（Wis）；芝加哥大学（Chi）；普林斯顿大学（Pri）；纽约州立大学布法罗分校(Buf)；中美联合招收赴美攻读物理博士生考试试题（CUSPEA）；丁肇中招收实验高能物理博士生试题（CCT）。

一般地说，美国的物理试题，涉及的数学并不繁难，但却或多或少具有以下三方面的特色：内容新颖，富于“当代感”；思路灵活，涉及面宽阔；方法和结论往往简单而实用。

一些题分别涉及了不少新兴课题和边沿交叉区域；也有不少题是拟题者直接从科研工作中摘取的；再有不少题本身似乎显出粗糙，但却抓住了物理本质，显的“物理味”很足。纵观这些，我们深切地感到，这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及其思维方式上的特色。

惟其如此，我们认为，不惮繁重，集近百人的努力，将它们收集后一一解答是值得的。它们也许会对我国大学和研究生物理学科的教学和赴美考试起到一定的参考作用，对推动我国大学物理教学更新起到一点促进作用。

参加这套丛书解题的确切人数难以统计，其中主要的共70余人，参加各卷审校的共19名。为向读者负责，每道题后均注明了解题人的姓名。

编审中，我们仅删去了部份很常见、很平淡的题以及一些没有什么意义的题（后者比如，纽约年平均气温是多少等等）。同时，为了节省篇幅，不得不放弃了英文原题。

由于丛书篇幅大、涉及面广、参加解答和审校的人多、工作时间短，加之我们水平有限，因此，错误或不当之处在所难免，请读者批评指正。

本卷共收集试题440道.大部分试题内容与我国理科大学的电磁学、电路分析及电动力学通用教材相一致，但也有一部分试题相当深难，尤其在广泛性和灵活性方面，大大超出我们常用习题的内容。美国试题十分注意引进物理学各个领域中有关的新科研成果，使经典的电磁理论与当代的科学实验紧密结合。因而本卷试题不仅有利于加深掌握电磁学的基本理论知识，提高读者分析问题的能力与解题的技巧，而且对开拓视野、促进学术交流、加强教学与科研的联系也有很大的帮助。

本卷基本采用国际单位制，对少部分试题，为了与原试题保持一致，也采用了高斯单位制。

本卷试题是集体劳动的成果，参加审解工作的还有胡友秋、郑道晨、宁铂、朱雪良等数十位同志。

编审者谨识

1985年12月20日

目　　录

第一篇 静电学

§1 静电学的基本规律（1001—1023）

1001（MIT，1982）

一静电荷分布产生如下的径向电场：

$$E = A\frac{e^{-br}}{r}e_r,$$

式中，A、b 为常数。（a）计算并图示电荷密度；（b）求总电荷 Q。

解：（a）电荷密度为

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot E = \varepsilon_0 \nabla \cdot \left[A\frac{e^{-br}}{r}e_r\right]$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 Ab}{r^2}e^{-br} + 4\pi\varepsilon_0 A\delta(r).$$

式中，

$$\delta(r) = \begin{cases} 0, & r \neq 0, \\ \infty, & r = 0. \end{cases}$$

且有

$$\int_\infty \delta(r)dV = 1.$$

即除一点电荷 $4\pi\varepsilon_0 A$ 位于球心外，空间存在一球对称的负电荷分布，如图 1.1 所示。

（b）总电荷为

$$Q=\varepsilon_0\oint_{r\to\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\lim_{r\to\infty}\varepsilon_0 Ae^{-br}\cdot 4\pi=0.$$

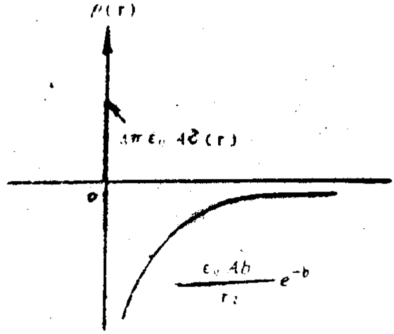

图 1.1

或由
$$Q=\int_\infty \rho(r)dV$$
$$=\int_0^\infty -\frac{\varepsilon_0 Ab}{r^2}e^{-br}\cdot 4\pi r^2dr+4\pi\varepsilon_0 A=0.$$

（郑道晨）

1002（Wis，1971）

假定从实验中发现两个点电荷之间的作用力不是库仑定律的形式，而是

$$\boldsymbol{F}_{12}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(1-\sqrt{\alpha}\,r_{12})}{r_{12}^2}\boldsymbol{e}_r.$$

式中 α 为常数。（a）写出点电荷 q 周围的电场 $\boldsymbol{E}$ 的公式。（b）围绕该点选择一积分路径，求线积分 $\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$。（$c$）对以点电荷球心，$r_1$ 为半径的球面求面积分 $\oint\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}$。（$d$）以 $r_1+\Delta$（Δ为一小量）为半径重复（c），求距点电荷为 r_1 处

的 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$，并把（$b$）、（$c$）、（$d$）的结果与库仑定律的结果相比较。

解：（a）在点电荷周围的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}(1-\sqrt{\alpha r})\boldsymbol{e}_r,$$

式中，r 为空间点至点电荷 q 的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 为由 q 指向空间点的单位矢量。

（b）由图 1.2 所示，对闭合路径 L，

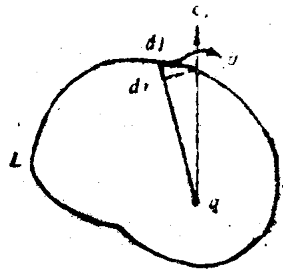

图 1.2

$$d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{e}_r=dl\cos\theta=dr,$$

则
$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=$$

$$\oint\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}(1-\sqrt{\alpha r})dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\oint_L d\left(\frac{1}{r}\right)+2\sqrt{\alpha}\oint_L d\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right]=0.$$

由库仑定律 $\boldsymbol{F}_{12}=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_{r_{12}}$，所得点电荷电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r.$$

显然有
$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=0.$$

即与本题的结果一样。

（c）对以点电荷 q 为球心，r_1 为半径的球面 S，$d\boldsymbol{S}=dS\boldsymbol{e}_r$，则有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1^2}(1-\sqrt{\alpha r_1})dS$$

$$=\frac{q}{\varepsilon_0}(1-\sqrt{\alpha r_1}).$$

由库仑定律与高斯定理，得

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

两者之差为$\frac{q}{\varepsilon_0}\sqrt{\alpha r_1}$。

(*d*) 利用 (*c*) 的结果，在 $r_1+\Delta$ 处，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}(1-\sqrt{\alpha(r_1+\Delta)}).$$

取 $r=r_1$ 与 $r=r_1+\Delta$ 为半径的二球面所构成的球壳面为闭合曲面 S'，它所包围的体积为 V'，由高斯定理

$$\oint_{S'} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{V'}\nabla\cdot\boldsymbol{E}dV.$$

因 Δ 为小量，上式可写为

$$\frac{q}{\varepsilon_0}\left[-\sqrt{\alpha(r_1+\Delta)}+\sqrt{\alpha r_1}\right]=\frac{4\pi}{3}[(r_1+\Delta)^3-r_1^3](\nabla\cdot\boldsymbol{E})\Big|_{r=r_1}.$$

并由$\frac{\Delta}{r_1}\ll 1$，近似取

$$\left(1+\frac{\Delta}{r_1}\right)^n=1+n\frac{\Delta}{r}.$$

则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(r=r_1)=-\frac{\sqrt{\alpha}q}{8\pi\varepsilon_0 r_1^{5/2}}.$$

由库仑定律，点电荷 q 激发的电场的散度公式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}).$$

（郑勋明）

1003 (Wis, 1975)

静电荷分布在间隙为 $-a \leqslant x' \leqslant a$ 的一维 x 轴上，对于 $|x'| \leqslant a$，电荷密度为 $\rho(x')$，而对于 $|x'| > a$，电荷密度等于 0。(a) 写出 x 轴上各点的静电势 $\Phi(x)$ 依赖于 $\rho(x')$ 的关系。(b) 求在 $x > a$ 时，$\Phi(x)$ 的级数展开式。(c) 对于图 1.3 中的每种电荷分布，求：(i) 总电荷 $Q = \int \rho dx'$；(ii) 电偶极矩 $P = \int x' \rho dx'$；(iii) 电四极矩 $Q_{xx} = 2\int x'^2 \rho dx'$；

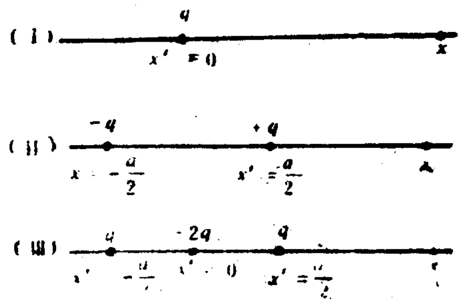

图 1.3

(iv) 在 $x > a$ 时，电势 Φ 按 $1/x$ 幂次展开的主要项。

解：(a) x 轴上点的静电势为

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a} \frac{\rho(x')}{|x - x'|} dx'.$$

(b) 当 $x > a$，$a > x' > -a$ 时，有

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{x} + \frac{x'}{x^2} + \frac{x'^2}{x^3} + \cdots,$$

所以 $\Phi(x)$ 的级数展开为

$$\Phi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(x')}{x}dx'+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(x')x'}{x^2}dx'\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(x')x'^2}{x^3}dx'+\cdots\right].$$

(c) 对于电荷分布（Ⅰ），有

$$\rho(x')=q\delta(x'),$$

故得　(i) $Q=q$；（ii）$P=0$；（iii）$Q_{xx}=0$；

(iv)　$\Phi(x)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$。

对电荷分布（Ⅱ），有

$$\rho(x')=-q\delta\left(x'+\frac{a}{2}\right)+q\delta\left(x'-\frac{a}{2}\right),$$

故得　(i) $Q=0$；（ii）$P=qa$；（iii）$Q_{xx}=0$；

(iv)　$\Phi(x)=-\dfrac{qa}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$。

对于电荷分布（Ⅲ），有

$$\rho(x')=q\delta\left(x'+\frac{a}{2}\right)+q\delta\left(x'-\frac{a}{2}\right)-2q\delta(x'),$$

故得　(i) $Q=0$；（ii）$P=0$；（iii）$Q_{xx}=qa^2$；

(iv)　$\Phi(x)=\dfrac{qa^2}{8\pi\varepsilon_0 x^3}$。

（张鹏辛）

1004（Wis，1978）

两块均匀无限大薄板相互垂直，它们的电荷密度为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$。求空间各点的电场的大小和方向，并画出 E 的电力线。

解：对一个无限大的带电板，它在空间各点的电场的大

小为

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

方向与板面垂直。因此，对本题的两互相垂直分别带 $\pm\sigma$ 电荷的两板，电场迭加应为

$$E=\frac{\sqrt{2}\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

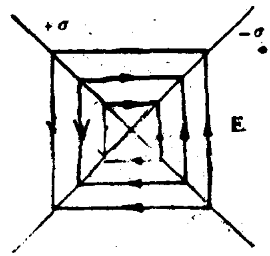

图 1.4

其方向如图 1.4 所示。 （张晓丰）

1005（CCT，1983）

高斯定理将不适用，如果：（*a*）有磁单极子存在；（*b*）平方反比定律不准确成立；（*c*）光速不是一个普适常数。

解： 答案为（*b*）。 （杨仲侠）

1006（CCT，1983）

一个电荷被保持在稳定平衡状态的条件是：（*a*）利用一个纯的静电力；（*b*）利用一个机械力；（*c*）上述两者都不行。

解： 答案为（*c*）。 （杨仲侠）

1007（CCT，1983）

对极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$，在方程 $\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{E}$ 中，一般情况下 α 是：（*a*）标量；（*b*）矢量；（*c*）张量。

解： 答案为（*c*）。 （杨仲侠）

1008（Wis，1972）

（*a*）一半径为 R 的圆环上均匀分布着总电量为 $+Q$ 的电

荷。计算环心的电场和电势。(b) 一负电荷$-Q$被限制在环的轴线上滑动，证明：当垂直于环平面的位移很小时，该电荷将作简谐运动。

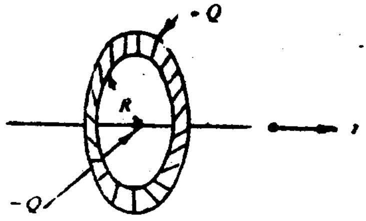

图 1.5

解：如图1.5所示，z轴为圆环的轴线。则环心的电场与电势为

$$E=0,\ \varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

在z轴上P点处的电场为

$$\boldsymbol{E}(z)=\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z.$$

故当负电荷$-Q$处在P点时受力为

$$\boldsymbol{F}(z)=-\frac{Q^2z}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z.$$

当$Z\ll R$时，有$F(z)\propto z$，故$-Q$作简谐振动。

(郑道晨)

1009 (Wis, 1974)

在半径为a的圆盘表面上均匀分布着总电量为q的电荷。(a) 由电荷分布的轴对称性，求对称轴上任意点处的电势。(b) 借助 (a)，求空间任意点$\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}|>a)$处电势的表达式，把该式表成角度谐函数的形式。

解：(a) 坐标轴选取如图1.6所示。在圆盘面上，取半径为r到$r+dr$的圆环，该环在点$(0,0,z)$处的电势为

$$d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\pi a^2}\cdot\frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2+z^2}}.$$

对r积分，可得整个圆盘在该点的电势为

$$\varphi(z)=\int_0^a \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\sqrt{a^2+z^2}-|z|\right).$$

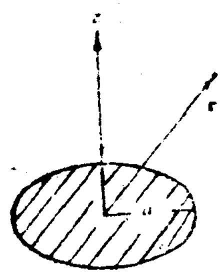

图 1.6

(*b*) 在$|\boldsymbol{r}|>a$区域，$\nabla^2\varphi=0$，

解为 $$\varphi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n r^n+\frac{b_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta).$$

在 $r\to\infty$ 时，$\varphi\to 0$，有 $a_n=0$。

对 $z>0$ 上半空间，对轴上的 $\varphi=\varphi(r,0)$，因为 $P_n(1)=1$，有

$$\varphi(r,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}.$$

对 $z<0$ 下半空间，轴上的 $\varphi=\varphi(r,\pi)$，因为 $P_n(-1)=(-1)^n$，有

$$\varphi(r,\pi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{b_n}{r^{n+1}}.$$

代入（*a*）的结果，在轴上 $|z|=r$，$z>0$ 时，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{r^{n+1}}=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\sqrt{a^2+r^2}-r\right)$$

$$=\frac{qr}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{r^2}}-1\right).$$

而

$$\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{a^2}{r^2}\right)^2+\cdots$$