

中国数学史研究丛书

《九章算术》与刘徽

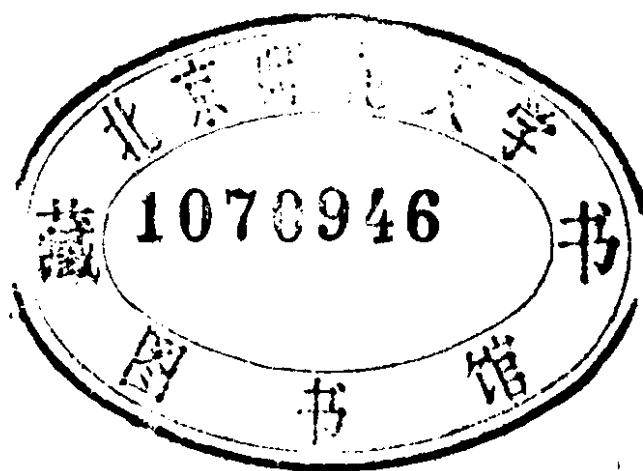
吴文俊 主编

北京师范大学出版社

中国数学史研究丛书

《九章算术》与刘徽

吴文俊 主编



北京师范大学出版社

一九八二年

内 容 简 介

本书由著名数学家兼数学史家吴文俊教授主编。全书共汇集了十九篇论文，从各个角度对“九章算术”这部传世杰作和杰出布衣数学家刘徽进行了专题性的论述。

本书适于科学史工作者、自然辩证法工作者、数学工作者、数学系学生及大、中、小学数学教师参考之用。

《九章算术》与刘徽

吴文俊 主编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京通县印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32 插页：4 印张：11.25 字数：279千

1982年9月第一版 1982年11月第一次印刷

印数：1—10,000

统一书号：13243·24 定价：(平)1.45元
(精)2.20元

答曰九十三尺少半尺

術曰廣表相乘以高乘之三而一按此術

形方雖一隅也今謂四柱屋隅為陽馬假
令廣表各一尺高一尺相乘之得立方積
一尺邪解立方得兩壘堵邪解壘堵其一
為陽馬一為龍腰陽馬居二龍腰居一不
易之率也合兩龍腰成一陽馬合三陽馬
而成一立方故三而一驗之以其形體
矣悉割陽馬凡為六龍腰觀其割分則體
勢互通蓋易了也其基或脩短或廣狹立
方不等者亦割分以為六龍腰其形不悉
相似然見數同積實均也龍腰殊形陽馬
異體然陽馬異體則不可純合純合則
為之矣何則按邪解方基以為壘堵者必
當以半為分邪解壘堵以為陽馬者亦必
當以半為分一從一橫耳設為陽馬者必

九章算術序

劉徽撰

昔在包犧氏始畫八卦以通神明之德以類萬物之情作九九之術以合六爻之變暨於黃帝神而化之引而伸之於是建歷紀協律呂用稽道原然後兩儀四像精微之氣可得而效焉記稱隸首作數其詳未之聞也按周公制禮而有九數九數之流則九章是矣往者暴秦焚書經術散壞自時厥後漢北平侯張蒼大司農中丞耿壽昌皆以善算命世蒼等因舊文之遺殘各稱闕補故校其目則與古或異而所論者多近語也徽幼習九章長再詳覽觀陰陽之割裂總算術之根源探賸索隱遂悟其意是以敢竭頑魯採其所見爲之作注事類相推各有攸歸故校條雖分而同本榦者知發其一端而已又所析理以辭解體用圖庶亦約而能周通而不贖覽之者思過半矣且算在六藝

清乾隆本《九章算術》書影

徽幼明九年
長舟彈覽
顧陸陽之
創製總算
術之根源
探賾之暇遂
任其志是
以敢竭頑劣
朱實所見為
作注

據刊刻徽九年
附注原序長舟
彈覽
朱實所見為
作注



刘徽造像

(蒋兆和绘)

前 言

《九章算术》是我国数学方面流传至今最早也是最重要的一部经典著作。它承前启后，一方面总结了秦汉以前的数学成就，另一方面又成为汉代以来达两千年之久数学研究与创造的源泉。特别是三国时期魏刘徽的《九章注》，对数学理论多所阐发，影响深远。总之，《九章算术》与刘徽《九章注》，对数学发展在历史上的崇高地位，足可与古希腊的《欧几里得几何原本》东西辉映，各具特色。本书汇集了十九篇专题论文，从各个角度对这一部传世杰作进行研讨。在这些论文之前，冠以《出版小志》一篇，就《九章》的成书背景、内容版本、注释校证与对后世的影响，以及最重要的注释者刘徽的事迹作了概括性的介绍。

《九章算术》与刘徽《九章注》源远流深，不仅对我国古代数学的发展，即使对整个世界数学的发展也有巨大影响，《九章》第八方程章的线性联立方程组解法与正负数概念的引入，祇是比较显著的一例而已。要把《九章》在世界数学中的地位，与世界其它地域数学发展的关系及影响的来龙去脉弄清，还需做大量细致的研究调查工作。本书所收集的一些论文，还祇能算是一个开端，真正的艰巨工作还在今后。为了便利读者作进一步的深入研究，以及为了便利与国外的交流，由白尚恕、李迪、沈康身三位同志写成了名词今释、论文索引与英文提要三篇，添入附录。希望读者们能对本书多提意见，使今后的工作能继续向纵深开展。

吴文俊

1981年11月27日

于中国科学院系统科学研究所

出版小志

作为研究我国古算典籍《九章算术》及刘徽《九章注》的专题论文集《九章算术》与刘徽即将出版了。鉴于《九章算术》一书在数学发展历史中的崇高地位、对后世的深远影响，愿在这里对该书的完成、内容、影响，以及注者刘徽的生平等，作一简要的说明与分析，用作读者阅读这本文集时的参考；并希读者补充、订正。

一 《九章算术》的成书背景

《九章算术》的成书年代，目前还未能准确判定。但从史籍所载，如东汉时马续、郑玄等都学习或研究过这部书；东汉光和二年（公元 179 年）还把该书规定为国家校核度量衡的依据等，可知该书在东汉时期已广为流传了。

《九章算术》成书于何人，由于书中内容很多都反映的是西汉时期的事例，有的还可能早到秦以前的，因而应该认为《九章算术》既非出自一人、更非一次完成；而是在较长时期内，经多人之手，纂辑、修改，逐步充实而成的。刘徽就认为：“往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。”

《九章算术》的成书并不是偶然的，是社会发展和数学知识积累的必然结果。由春秋战国时起，我国的农业、手工业以及各种技术都有很大的发展，例如铁器的使用、矿产的采掘、农业的开发、长城的修筑、大型水利工程的兴修等，从而也推动了科学文

化的发展。由春秋到秦汉，前后一千年左右的时间里，技术发展、学术繁荣，各种专门学科的学术著作都相继出现，如《天文》、《天文星占》、《山海经》、《周髀算经》、《考工记》、《记胜之书》、《内经》、《神农本草经》等，都是对各方面知识的研究总结。数学作为一种具有广泛应用的科学，在其它种科学技术和文化发展的同时，也必然获得相应的进展。事实上，天文历法、机械制造、土木工程、军事设施、采矿冶金、田亩测量、度量衡、物资分配、运输、交换、赋税等，都需要各式各样的数学知识，或提出新的数学问题。例如，春秋时政治家李悝对于个体农民的全年收支曾进行过计算。得出的结果是入不敷出，出现了“不足”。后来在汉简中又有“负四算，得七算，相除得三算”这样的算题，显然这关系着负数概念的形成，同时也说明了“负”字有深刻的社会含义。西汉时期由于农业的发展，谷物产量的增加，因而修建各种形状的粮仓，从而导致各种立体体积的计算。而各种粮食的交换，又规定了比例关系。在天文历法和乐律等许多方面则都得用到分数及分数计算。汉武帝根据经济学家桑弘羊的建议实行均输法，就是“掌握运输，调节有无”，从数学角度来说，便是由国家规定合理运输赋谷的方案问题。汉代治河等水利工程，称为“商功”，更需要各种较复杂的计算。从战国时开始有些地区陆续实行“履亩而税”的制度，因而对地亩面积的丈量的要求更加精确。凡此种种，都导致了数学的内容日益丰富。

由于数学知识的不断增加，到西汉时期，对数学知识进行系统整理的时机已经成熟。西汉后期出现了《杜忠算术》十六卷和《许商算术》二十六卷，无疑是对秦汉以来数学知识的总结。杜忠的事迹，历史上不见记载，仅知汉河平三年（公元前26年）陈农访求遗书、尹咸校数术时，《杜忠算术》已在其内。因而知其成书必在此时之前，而杜忠至迟应是公元前一世纪后期人。许商的事迹，有零星的记载。他是长安人，善为算，能度功用，除著《算

术》一书外，还著有《五行论历》等书。西汉建始元年至绥和元年（公元前 32 年至公元前 8 年）间，曾历任博士、河提都尉、将作大匠、光禄大夫、大司农等官职。他曾多次领导修建水利工程，“能商功利”，是当时重要的数学家和水利专家。据《广韵》卷第四所载：“九章术，汉许商、杜忠，吴陈炽、王粲并善之”可以看出，许商和杜忠的数学著作肯定与《九章算术》有密切关系。当然，作为进一步探讨的问题，如果把《九章算术》疑为由许、杜著作演变而成，也是不无道理的。

二 《九章算术》的内容

现传本《九章算术》包括 246 道数学问题，按性质分属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、句股九章。每一章又按解题法则分为若干类，解题法则叫做“术”。例如第一“方田”章中就有“方田术”，“里田术”、“约分术”、“合分术”、“减分术”、“课分术”、“平分术”、“经分术”、“乘分术”、“大广田术”、“圭田术”、“邪田术”、“算田术”、“圆田术”、“弧田术”等。每道题都有答案，并且可以用相应的“术”进行解答。

《九章算术》的内容与秦汉或再早的社会生产、经济、政治等都有密切联系，在一定程度上说，《九章算术》是当时社会各方面的简单缩影，许多社会问题在书中都有反映。

第一章“方田”专讲各种形状地亩面积的计算和分数的四则运算。其中对地亩的规定是“以亩法二百四十步除之，即亩数。百亩为一顷。”这种制度是公元前 350 年商鞅变法时制订的，秦汉时为全国统一的规定。可见《九章算术》中的亩法代表着秦汉时代的地亩制度。地亩面积的计算被列入数学著作，并且做为第一章，说明这是当时社会上最普遍的问题。

第二章“粟米”专讲各种谷物之间的换算，对十七种谷物或米、饭规定了兑换比率。例如“粟率五十，粳米三十”，就是在相

同单位的条件下，五十个单位的粟相当于三十个单位的粳米。这类问题大都通过比例来解决。粟米算法的形成，主要反映汉代生产发展和经济管理的情况。在西汉，桑弘羊制定了“平准法”，唐司马贞《史记·平准书“索隐”》称：“大司农属官有平准令、丞者，以均天下郡国输敛。贵则糴之，贱则买之，平赋以相准，输归于京都。故命曰‘平准’。”当时还规定了商人纳税的标准：“诸贾人末作贯贷，买居邑稽诸物，以商以取利者。虽无市籍，各以其物自占，率缗钱二千而一算；诸作有租及铸，率缗钱四千一算，……。贾人有市籍者，及其家属，皆无得籍名田以便农。”这里所说的是反映了当时“重农抑商”的政策。《九章算术·粟米》中，除各种粮谷的换算题(共 31 题)外，还有“今有出钱”买物题十五道，和当时商业活动相配合。米谷问题多，而商业问题少，与“重农抑商”的政策相一致。

第三章“衰分”的内容较杂。其算法大体上多属于比例配分之一类，其中有些题与手工业生产和商业有关。有三道按大夫、不更、簪袅、上造、公士五等爵，“以爵次”分物的题，这种爵次是战国时代的规定。还有一道题是：“今有北乡算八千七百五十八，西乡算七千二百三十六，南乡算八千三百五十六，凡三乡，发徭三百七十八人。欲以算数多少衰出之，问各几何。”其中“算”与《史记·平准书》中所说的“算”是一样的。本题的意思是指三个乡应缴纳的“算数”不等，但政府要这三个乡派出规定数目的劳役，按各乡“算数”多少顶摊。这类数学问题之进入数学著作，显然是为了适应当时社会的需要。

第四章“少广”，专讲开平方、开立方问题。其最后两题是已知球的体积而求其直径，即所谓“开立圆”。

第五章“商功”，专讲各种土木工程中所提出的数学问题的解法。其中包括筑城、修堤、开渠、粮堆以及各种形状的立体体积的计算问题。有些题是施工方面的计算。例如第二十一题的第二

部分：“负土往来七十步，其二十步上下棚除。棚除二当平道五。踟蹰之间十加一，载输之间三十步，定一返四十步。土笼积一尺六寸，秋程人功行五十九里半。问人到、积尺、用徒各几何。”这里包括土方、人数、运输距离等的计算。第二十二题与此相似。这些充分反映出秦汉时期土木工程的施工和发展情况。

第六章“均输”的内容比较复杂，基本上是以合理运输为中心的数学问题。例如有 n 个县，每县各有户数为 $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，到“输所”的距离分别为 $s_1, s_2, \dots, s_n$ ，共缴纳赋谷 γ 斛，用车 w 乘，按距离远近、户数多少合理运输，问每县各出赋谷、车辆多少。第九题为“载太仓粟输上林”的计算，《史记·平准书》说：“太仓之粟，陈陈相因”，两者是完全吻合的。此外，还有行程问题，抽税问题，按等分物问题等，都和当时社会密切相关。“均输”问题，显然是西汉实行均输法的直接产物。

第七章“盈不足”，主要讲“盈亏”类问题的解法。所涉及的内容多与商业有关。

第八章“方程”，专讲线性方程组的解法。其中大部份问题都与农业有关。如把庄稼分为上、中、下三等，计算每等的产量。还有计算各种牲畜的买卖问题等，这都是汉代农业发展的反映。

第九章“句股”，主要讲句股定理及其各种应用。其中有些属于句股测量问题，显然与秦汉时期的土木工程、军事活动有直接关系。

根据以上所述可知，《九章算术》的丰富内容，与当时社会的紧密联系，是它所具有的特色。

三 《九章算术》的版本

《九章算术》在唐代已立于学官，如《新唐书》称：“显庆元年（公元 656 年）十二月乙酉（十九日）置算学”。就把它作为数学教科书《算经十书》之一。

我国印刷术虽然发明很早，但刻版印书直到北宋才普遍发展起来。北宋元丰七年(公元 1084 年)秘书省木刻《算经十书》中有刘徽、李淳风注释本《九章算术》，至南宋嘉定六年(公元 1213 年)有鲍澣之在汀州的翻刻本。

明代辑《永乐大典》(公元 1403 年至 1408 年)，其中抄录了《九章算术》全文，而民间的古典数学书籍已丧失殆尽。

清初，南京黄虞稷家中藏有南宋鲍澣之刻本的《九章算术》，但只残存前五章。此书辗转流传，今存上海图书馆。

清代由乾隆 38 年(公元 1773 年)开始编《四库全书》，便从《永乐大典》抄出《九章算术》，次年在武英殿排印聚珍版，是后来商务印书馆选入《丛书集成》(公元 1936 年)的蓝本。

戴震(公元 1724—1777 年)曾是《四库全书》纂修及分校官，他为《永乐大典》抄出的《九章算术》做了校勘工作，这一校勘本为孔继涵(公元 1739—1783 年)刊微波榭《算经十书》(未注年代)采录，后来再次为商务印书馆《四部丛刊》(公元 1929 年)、《万有文库》(公元 1930 年)据以翻印。

近人钱宝琮(公元 1892—1974 年)根据以前各家版本，对《九章算术》重新校订、标点，写出校勘记四百六十多条，于 1963 年列入中华书局出版的《算经十书》之中。

四 《九章算术》的注释与校证

《九章算术》成书后，三国魏人刘徽为作注释，《隋书·经籍志》著录说：“九章算术十卷，刘徽撰”，《隋书·律历志》说：“魏陈留王景元四年(公元 263 年)刘徽注九章”。刘徽注释的方法在自序中讲得很明确：“析理以辞，解体用图。庶亦约而能周，通而不黷，览之者思过半矣。”他对全书 246 道题归类，提高精度，理论与计算革故、创新等方面都作出很好成绩。刘徽注释时所持态度是客观的。例如在注释圆田术时认为取径一周三过于粗糙，

就指出“世传此法，莫能精覈，学者踵古，习其谬失，不有明据，辩之斯难”。接着他就通过计算提高精度，以理服人，为后世树立了良好榜样。又如在注释开立圆术时认为原术失之过多，就创造牟合方盖这一模型来证明所立判断，其铮铮论述至今无可指责。在进一步探讨球积公式觉得还没有把握时，就实事求是说：“欲陋形指意，惧失正理，敢不缺疑，以俟能言者。”

唐李淳风(约七世纪)对刘徽注释本《九章算术》再作注释，无突出成就，值得称道的是在开立圆术中，李注能引述后世所称的祖暅原理，才使得这项研究成果传之于后世。

北宋贾宪著《黄帝九章算法细草》(约1050年)九卷，此书已失传。

南宋杨辉著《详解九章算法》(1261年)十二卷，现在存商功、均输、盈不足、方程、句股五卷以及九章算法纂类。

清嘉庆时，李潢(?—1811年)著《九章算术细草图说》九卷，补绘插图，详细演草，使古典文字平易近人。例如为开立圆术补插图二十幅来阐述祖暅研究成果，原文深奥难通，得图索骥，茅塞顿开，是先前从未有人这样做过的。

白尚恕在前人的基础上，用现代的语言对《九章算术》作了注释，共写出注释文字六百余条；又以钱宝琮校点《九章算术》为蓝本，在注释之余兼及校订，写出校订文字九十多条。

五 《九章算术》对我国后世的影响

《九章算术》这部古代数学典籍对于后世的影响之大，不但在数学教育方面，是一部重要的数学教科书；而且在数学著作方面，也成为数学家著书立说的典范。

如《唐六典》称：“算学博士，掌教文武官八品以下及庶人之子为生者，二分其经以为之业。习九章、海岛、孙子、五曹、张邱建、夏侯阳、周髀十有五人，习缀术、缉古十有五人，其记

遗、三等数兼习之。”《旧唐书·职官志》、《新唐书·百官志》也都有类似记载。可见隋唐时代，我国数学教育制度里明文规定《九章算术》是“明算科”的必修科目之一。宋代的数学教育，多继承唐代的制度，也规定《九章算术》为必修科目。如《宋史·本纪》称：“算学：崇宁三年（公元1104年）始建，学生以二百一十人为额，许命官及庶人为之。其业以九章、周髀及假设疑数为算问，仍兼海岛、孙子、五曹、张邱建、夏侯（阳）算法。”到明代初期，仍有数学科举制度，并规定必需学习《九章算术》。如《太祖实录》称：“洪武二十五年（公元1392年）二月甲子，命学校生员兼习射与书数之法，……，数习九章之法，务在精通，俟其科贡，兼考之。”《皇明太学志》也称：“凡生员每日务要习学算法，必由乘、因、加、归、除、减，精通九章之数。”

在十部算经里，除《周髀算经》、《五经算术》外，其它各书的体例悉从于《九章算术》的体例。例如唐王孝通的《缉古算经》就是受《九章算术·商功》启发而编写的。他说：“伏寻九章商功篇有平地役功受表之术。……，遂于平地之余，续狭斜之法，凡二十术，名曰缉古。”

宋杨辉《详解九章算法》、明吴敬《九章算法比类大全》、程大位《直指算法统宗》、清屈曾发《九数通考》、顾观光《九数存古》多与《九章算术》有血缘关系。

总之，《九章算术》在我国数学经典中是最为重要者，“九章为算经之首，盖犹儒者之六经，医家之难素，兵法之孙子欤。后世学者，有倚其门墙，瞻其步趋，或得一二者，以能自成一家之书。”（公元1261年荣棨序杨辉《详解九章算法》语。）

六 刘徽生平简介

刘徽，是我国古代杰出的布衣数学家。关于他的身世履历、生卒年代均无可详考。但是，根据不多的历史资料，可以推测他

的某些情况。

宋徽宗时代为了恢复数学教育制度，便追封了历代的 天 算 家。如《宋史·礼志》称：“大观三年(公元 1109 年)礼部太常寺请以文宣王为先师，兖邹荆三国公配享，十哲从祀。自昔著名算数者，画像两庑。请加五等爵，随所封以定其服。”当时共追封古代天算家七十余人。

《宋史》记载所封的人员多符合其籍贯，如“张衡西鄂伯”、“宋祖冲之范阳子”、“刘焯昌亭子”、“魏刘徽淄乡男”、“后周甄鸾无极男”等。经考证，张衡是河南南阳以北西鄂人，祖冲之是范阳郡道县(今河北涞水县)人，刘焯是信都昌亭人，而甄鸾则是无极县人，据此，按“魏刘徽淄乡男”可以认为刘徽当是现今山东临淄或淄川一带人。由于临淄或淄川临近渤海，而刘徽著有测望海岛的《海岛算经》一卷；也有理由借以表示刘徽是临淄或淄川一带人的旁证。

《隋书·律历志》称：“魏陈留王景元四年(公元 263 年)，刘徽注九章。”《九章算术》刘徽原序说：“徽幼习九章，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。”由此可知，在景元四年时，刘徽一定年事较长，而从事注释九章。又由刘注“晋武库中汉时王莽作铜斛”、“晋武库中有汉时王莽所作铜斛”、“与今律历志同，亦魏晋所常用”可知，魏亡之后，刘徽仍在注解《九章算术》。所以可以断定刘徽是魏晋期间的人。

刘徽除注解《九章算术》，并著有《海岛算经》即《重差》一卷外，还著有《重差图》一卷。如《隋书·经籍志》说：“刘徽九章重差图一卷。”《旧唐书》及《新唐书》也都记载说：“九章重差图一卷，刘徽撰。”刘徽原序也说：“辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于句股之下。”可惜的是，刘徽的《重差图》及《重差》的注解早已亡佚了。

刘徽在注释《九章算术》及著作《海岛算经》中，立论谨严，旁证博引。刘徽一代畴人，才华光耀夺目，允称后世治算者表率、楷模。他的具体学术成就将在本书各文中一一介绍，这里就不赘述了。

锺善基志

1981年10月4日

于北京师范大学