

高等学校试用教材

高等数学

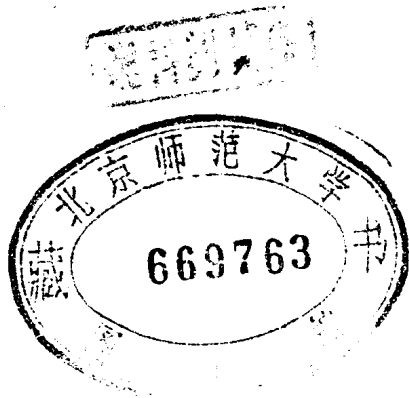
(数学物理方法)

(物理专业用)

第四册

1991/5/21/17

四川大学数学系高等数学微分方程教研组编



人民教育出版社

内 容 提 要

本书为高等数学第四册,主要为数学物理方法的内容:复变函数论,数学物理方程,特殊函数等,可供综合大学和师范学院物理专业作为试用教材。

高等学校试用教材

高 等 数 学

(数学物理方法)

(物理专业用)

第 四 册

四川大学数学系 高等数学 教研组编
微分方程

*

人 民 教 育 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

人 民 教 育 出 版 社 印 刷 厂 印 装

*

开本 787×1092 1/32 印张 12.75 字数 300,000

1979年8月第1版1980年1月第1次印刷

印数 00,001—42,000

书号 13012·0376 定价 0.92 元

目 录

第一篇 复变函数论	1
第一章 复数与复变函数	2
†第一节 复数	2
§ 1.1.1 复数域	2
§ 1.1.2 复平面	3
§ 1.1.3 复数的模与辐角	4
§ 1.1.4 复数的乘幂与方根	6
†第二节 复变函数的基本概念	8
§ 1.2.1 区域与约当曲线	8
§ 1.2.2 复变函数的概念	11
§ 1.2.3 复变函数的极限与连续性	13
第三节 复球面与无穷远点	15
§ 1.3.1 复球面	15
§ 1.3.2 闭平面上的几个概念	16
习 题	16
第二章 解析函数	19
第一节 解析函数的概念及哥西-黎曼条件	19
§ 2.1.1 导数的定义	19
§ 2.1.2 哥西-黎曼条件	20
§ 2.1.3 解析函数的定义	24
第二节 解析函数与调和函数的关系	24
§ 2.2.1 共轭调和函数的求法	24
§ 2.2.2 共轭调和函数的几何意义	26
第三节 初等解析函数	28
§ 2.3.1 初等单值函数	28
§ 2.3.2 初等多值函数	31
习 题	36
第三章 哥西定理 哥西积分	39

第一节	复变积分的概念及其简单性质	39
§ 3.1.1	复变积分的定义及其计算方法	39
§ 3.1.2	复变积分的简单性质	42
第二节	哥西积分定理及其推广	43
§ 3.2.1	哥西积分定理	43
§ 3.2.2	不定积分	44
§ 3.2.3	哥西积分定理推广到复围线的情形	46
第三节	哥西积分公式及其推广	49
§ 3.3.1	哥西积分公式	49
§ 3.3.2	解析函数的无限次可微性	51
§ 3.3.3	模的最大值原理 哥西不等式 刘维尔定理 摩勒纳定理	53
第四节	解析函数在平面场中的应用	55
§ 3.4.1	什么叫平面场	55
§ 3.4.2	复位势	55
§ 3.4.3	举例	57
	习 题	61
第四章	解析函数的幂级数表示	64
†第一节	函数项级数的基本性质	64
§ 4.1.1	数项级数	64
§ 4.1.2	一致收敛的函数项级数	66
第二节	幂级数与解析函数	70
†§ 4.2.1	幂级数的敛散性	70
§ 4.2.2	解析函数的幂级数表示	74
第三节	罗朗级数	79
§ 4.3.1	双边幂级数的收敛圆环	79
§ 4.3.2	解析函数的罗朗展式	80
§ 4.3.3	罗朗展式举例	83
第四节	单值函数的孤立奇点	87
§ 4.4.1	孤立奇点的三种类型	87
§ 4.4.2	可去奇点	88
§ 4.4.3	极点	89
§ 4.4.4	本性奇点	91
§ 4.4.5	解析函数在无穷远点的性质	91

习 题	94
第五章 残数及其应用	97
第一节 残数	97
§ 5.1.1 残数的定义及残数定理	98
§ 5.1.2 残数的求法	99
§ 5.1.3 无穷远点的残数	102
第二节 利用残数计算实积分	104
§ 5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的计算	105
§ 5.2.2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 的计算	107
§ 5.2.3 实轴上有奇点的情形	112
§ 5.2.4 其他例子	113
习 题	118
第六章 保角变换	121
第一节 解析变换的特性	121
§ 6.1.1 单叶变换	121
§ 6.1.2 解析函数的保角性	122
§ 6.1.3 拉普拉斯算符的变换	124
第二节 线性变换	126
§ 6.2.1 几种最简单的保角变换	126
§ 6.2.2 线性变换	127
§ 6.2.3 线性变换的保圆周性	129
§ 6.2.4 线性变换的保对称点性	129
§ 6.2.5 线性变换的应用	131
第三节 某些初等函数所构成的变换	133
§ 6.3.1 幂函数与根式函数	133
§ 6.3.2 指数函数与对数函数	135
习 题	139
第二篇 数学物理方程	141
第七章 一维波动方程的付氏解	142
第一节 一维波动方程——弦振动方程的建立	142
§ 7.1.1 弦振动方程的建立	142

§ 7.1.2	定解条件的提出	144
第二节	齐次方程混合问题的付里叶解法(分离变量法,驻波法)	146
§ 7.2.1	利用分离变量法求解齐次弦振动方程的混合问题	146
§ 7.2.2	付氏解的物理意义	152
第三节	电报方程	154
第四节	强迫振动 非齐次方程的求解	156
习 题		159
第八章	热传导方程的付氏解	163
第一节	热传导方程和扩散方程的建立	163
§ 8.1.1	热传导方程的建立	163
§ 8.1.2	扩散方程的建立	165
§ 8.1.3	定解条件	167
第二节	混合问题的付氏解法	168
第三节	初值问题的付氏解法	170
§ 8.3.1	付氏积分	170
§ 8.3.2	利用付氏积分解热传导方程的初值问题	172
§ 8.3.3	付氏解的物理意义	175
第四节	一端有界的热传导问题	178
§ 8.4.1	定解问题的解	178
§ 8.4.2	举例	180
§ 8.4.3	杜赫美原则	184
习 题		187
第九章	拉普拉斯方程的圆的狄利克雷问题的付氏解	190
第一节	圆的狄利克雷问题	190
§ 9.1.1	定解问题的提法	190
§ 9.1.2	付氏解	191
第二节	δ 函数	195
§ 9.2.1	δ 函数的引入	195
§ 9.2.2	δ 函数的性质	196
§ 9.2.3	把 δ 函数看作是弱收敛函数序列的弱极限	197
§ 9.2.4	高维空间中的 δ 函数及 δ 函数的其他性质	200
习 题		201

第十章 波动方程的达朗贝尔解法	204
第一节 弦振动方程初值问题的达朗贝尔解法	204
§ 10.1.1 达朗贝尔解的推出	204
§ 10.1.2 达朗贝尔解的物理意义	206
§ 10.1.3 举例	207
§ 10.1.4 依赖区间 决定区域和影响区域	209
第二节 高维波动方程	211
§ 10.2.1 三维波动方程的初值问题	211
§ 10.2.2 降维法	213
§ 10.2.3 解的物理意义	214
§ 10.2.4 地震波	216
第三节 非齐次波动方程 推迟势	217
§ 10.3.1 非齐次波动方程的哥西问题	217
§ 10.3.2 非线性方程	219
习 题	220
第十一章 数学物理方程的解的积分公式	224
第一节 格林公式 调和函数的基本性质	224
§ 11.1.1 球对称解	224
§ 11.1.2 格林公式	225
§ 11.1.3 调和函数的基本性质	226
第二节 拉普拉斯方程的球的狄利克雷问题	232
§ 11.2.1 边值问题的提法	232
§ 11.2.2 球的狄利克雷问题	233
§ 11.2.3 狄利克雷外问题	237
第三节 格林函数	238
§ 11.3.1 格林函数的定义	238
§ 11.3.2 举例	241
§ 11.3.3 格林函数的对称性	243
§ 11.3.4 保角变换法	245
第四节 泊松方程	246
§ 11.4.1 泊松方程的导出	246
§ 11.4.2 泊松方程的狄利克雷问题	247
习 题	249

第十二章 定解问题的适定性	251
第一节 弦振动方程的初值问题的适定性	252
第二节 弦振动方程混合问题的适定性	253
§ 12.2.1 解的存在性	253
§ 12.2.2 能量积分和解的唯一性	256
第三节 狄利克雷问题的适定性	259
§ 12.3.1 解的唯一性	259
§ 12.3.2 解的稳定性	259
第四节 热传导方程混合问题的适定性	260
§ 12.4.1 极值原理	260
§ 12.4.2 解的唯一性	262
§ 12.4.3 解的稳定性	263
第五节 热传导方程初值问题的适定性	263
§ 12.5.1 解的唯一性和稳定性	263
§ 12.5.2 解的存在性	265
第六节 拉普拉斯方程狄利克雷外问题的解的唯一性	267
§ 12.6.1 三维空间狄利克雷外问题解的唯一性	267
§ 12.6.2 二维空间狄利克雷外问题解的唯一性	268
第七节 定解问题不适定之例	269
§ 12.7.1 不适定问题举例	269
§ 12.7.2 对不适定问题的研究	271
第八节 三类方程的比较	273
§ 12.8.1 关于定解问题的提法	273
§ 12.8.2 关于解的性质	274
§ 12.8.3 关于时间的反演	275
习 题	277
第十三章 付里叶变换	279
第一节 付氏变换的定义及其基本性质	279
§ 13.1.1 付氏变换的定义	279
§ 13.1.2 付氏变换的基本性质	280
§ 13.1.3 n 维付氏变换	282
§ 13.1.4 δ 函数的付氏变换	283
第二节 用付氏变换解数理方程举例	284

第三节 基本解	286
§ 13.3.1 基本解的物理意义	286
§ 13.3.2 基本解的定义	288
§ 13.3.3 非定常非齐次方程的基本解	295
习 题	297
第十四章 拉普拉斯变换	298
第一节 拉普拉斯变换的定义和它的逆变换	298
§ 14.1.1 付氏变换与拉氏变换	298
§ 14.1.2 拉氏变换的定义	299
§ 14.1.3 拉氏变换的存在定理和反演定理	300
第二节 拉普拉斯变换的基本性质及其应用举例	303
第三节 展开定理	315
§ 14.3.1 展开定理	315
§ 14.3.2 用反演公式解数理方程举例	317
习 题	321
第三篇 特殊函数	324
第十五章 勒让德多项式 球函数	325
第一节 勒让德微分方程及勒让德多项式	325
§ 15.1.1 勒让德微分方程的导出	325
§ 15.1.2 幂级数解和勒让德多项式的定义	327
§ 15.1.3 勒让德多项式的微分表达式——洛德利格公式	333
§ 15.1.4 勒让德多项式的施列夫利积分表达式	333
第二节 勒让德多项式的母函数及其递推公式	334
§ 15.2.1 勒让德多项式的母函数	334
§ 15.2.2 勒让德多项式的递推公式	336
第三节 按勒让德多项式展开	338
§ 15.3.1 勒让德多项式的正交性	338
§ 15.3.2 勒让德多项式的归一性	338
§ 15.3.3 展开定理的叙述	340
第四节 连带勒让德多项式	341
§ 15.4.1 连带勒让德多项式的定义	341
§ 15.4.2 连带勒让德多项式的正交性和归一性	342
第五节 拉普拉斯方程在球形区域上的狄利克雷问题	343

§ 15.5.1	利用连带勒让德多项式 $P_n^m(x)$ 得出方程 (15.1)' 的解	343
§ 15.5.2	确定出定解问题 (15.1)' 和 (15.2)' 的解	344
	公式表	345
	习 题	347
第十六章 贝塞耳函数 柱函数		349
第一节 贝塞耳微分方程及贝塞耳函数		349
§ 16.1.1	贝塞耳微分方程的导出	349
§ 16.1.2	幂级数解和贝塞耳函数的定义	350
第二节 贝塞耳函数的母函数及其递推公式		354
§ 16.2.1	贝塞耳函数的母函数	354
§ 16.2.2	贝塞耳函数的积分表达式	355
§ 16.2.3	贝塞耳函数的递推公式	356
§ 16.2.4	半奇数阶贝塞耳函数	357
第三节 按贝塞耳函数展开		359
§ 16.3.1	贝塞耳函数的零点	360
§ 16.3.2	贝塞耳函数的正交性	361
§ 16.3.3	贝塞耳函数的归一性	362
§ 16.3.4	展开定理的叙述	362
§ 16.3.5	圆膜振动问题	363
第四节 第二和第三类贝塞耳函数		365
§ 16.4.1	第二类贝塞耳函数	365
§ 16.4.2	第三类贝塞耳函数	367
§ 16.4.3	球贝塞耳函数	368
第五节 变形(或虚变量)贝塞耳函数和贝塞耳函数的渐近公式		370
§ 16.5.1	变形贝塞耳函数	370
§ 16.5.2	贝塞耳函数的渐近公式	372
§ 16.5.3	可以化为贝塞耳方程的微分方程	374
	公式表	374
	习 题	377
第十七章 埃尔米特多项式和拉盖尔多项式		380
第一节 埃尔米特多项式		380
§ 17.1.1	埃尔米特微分方程的导出	380
§ 17.1.2	幂级数解和埃尔米特多项式的定义	381

§ 17.1.3 埃尔米特多项式的母函数	382
§ 17.1.4 埃尔米特多项式的正交性和归一性	383
第二节 拉盖尔多项式	384
§ 17.2.1 拉盖尔微分方程的导出	384
§ 17.2.2 幂级数解和拉盖尔多项式的定义	385
§ 17.2.3 拉盖尔多项式的母函数	386
§ 17.2.4 拉盖尔多项式的正交性和归一性	387
第三节 特征值和特征函数*	388
§ 17.3.1 特征值和特征函数的概念	388
§ 17.3.2 特征值和特征函数的性质	389
§ 17.3.3 斯图谟-刘维尔型微分方程边值问题的例子	389
习 题	391
附 录	392
付里叶变换表	392
拉普拉斯变换表	393
外国人名表	396

第一篇 复变函数论

大家知道,在解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (这里 a, b, c 都是实数且 $a \neq 0$) 时,如果判别式 $b^2-4ac < 0$, 就会遇到负数开方的问题,最简单的一个例子是在解 $x^2+1=0$ 时,就会遇到 -1 开平方. 为了使负数开平方有意义,也就是要使这类方程有解,我们需要扩大数的范围,这时引进一种所谓虚数,用符号 i 当作虚数单位,即规定

(i) $i^2 = -1$;

(ii) 它与实数在一起可以进行通常的四则运算.

根据这个规定就会出现形如 $a+bi$ (这里 a, b 都是实数) 的数,我们把它叫做复数.

复变函数论要研究的是: 复变数 $z=x+iy$ 的函数的基本概念和理论及其一些应用. 复变函数理论的发展与数学分析是不能分离的,但它有它自身的特点,它的中心对象是解析函数. 由于解析函数具有许多独特的性质,致使复变函数论方法不但在纯粹数学各个部门有很多的应用,而且在各种应用数学、数学物理课程中也有广泛的应用,成为一种不可缺少的强有力的工具.

第一章 复数与复变函数

第一节 复数*

§ 1.1.1. 复数域

所谓复数,是指形如 $z = x + iy$ 的数,其中 $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$) 称为虚单位, x, y 都是实数,分别称为复数 z 的实部与虚部,记为 $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

实部为 0 的复数 $0 + iy = iy$ 称为纯虚数,或虚数. 虚部为 0 的复数 $x + i \cdot 0 = x$ 就是实数. 因此,全体实数是全体复数的一部分. 实部与虚部都为 0 的复数称为复数 0,记为 0. 故 $x + iy = 0$ 必须且只须 $x = 0, y = 0$.

复数的相等与加、减、乘、除等运算是这样规定的:

- (i) $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$, 必须且只须 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$;
- (ii) $(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;
- (iii) $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$;
- (iv) $\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$
 $= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

其中 $x_2 + iy_2 \neq 0$.

显然,除法是乘法的逆运算.

若 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3$, 则以下的交换律、结

* 作有记号†的部分是指与微积分中有关部分平行的内容,只作扼要讲解.

合律和分配律成立:

$$\text{交换律: } z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1;$$

$$\text{结合律: } z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3;$$

$$\text{分配律: } (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

全体复数在引进上述相等关系和运算法则之后,称为复数域. 在复数域中没有复数大小的概念.

如果两个复数的差别仅仅是它们的虚部异号,则称这两个复数为共轭复数,或者说,这两个复数共轭. 复数 $z = x + iy$ 的共轭复数记为 $\bar{z} = x - iy$. 共轭复数有一些简单而重要的性质,例如

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re}z$$

$$z - \bar{z} = 2iy = 2i\operatorname{Im}z$$

§ 1.1.2. 复平面

一个复数 $z = x + iy$, 本质上由一对有序实数 (x, y) 唯一确定, 于是能够建立平面上全部的点和全体复数间一一对应的关系(图 1.1). 由于 x 轴上的点对应着实数, 故 x 轴称为实轴, y 轴上的点对应着纯虚数, 所以 y 轴称为虚轴, 这样表示复数的平面称为复平面或 z 平面.

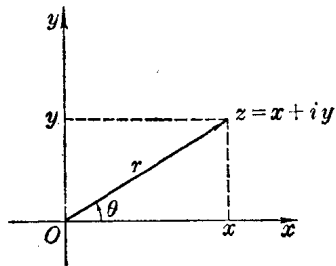


图 1.1

引进复平面之后,我们在“数”和“形”之间就建立了联系. 今后,我们不再区分“数”和“点”了,说到“点”可以指它所代表的“数”,说到“数”也可以指这个数所代表的“点”.

在复平面上,从原点到点 $z = x + iy$ 所引的矢量与这个数 z 也构成一一对应关系.

例如,若 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, 则 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) +$

$+i(y_1+y_2)$. 由(图 1.2)可以看出 z_1+z_2 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量与 z_2 所对应的矢量的和矢量.

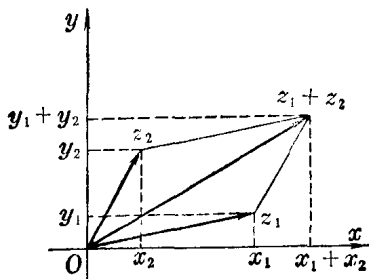


图 1.2

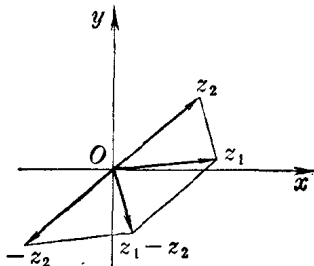


图 1.3

又如, 将 z_1-z_2 表成 $z_1+(-z_2)$, 可以看出 z_1-z_2 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量减 z_2 (即加 $-z_2$) 所对应的矢量(图 1.3). 它与 z_2 为起点 z_1 为终点的矢量相等.

§ 1.1.3. 复数的模与幅角

表示复数 z 的点, 也可以用极坐标 r 和 θ 来确定(图 1.1).

上面我们用矢量 \vec{Oz} 来表示复数 $z=x+iy$, x, y 顺次等于 \vec{Oz} 沿 x 轴与 y 轴的分量, 矢量 \vec{Oz} 的长度称为复数 z 的模, 或绝对值, 以符号 $|z|$ 或 r 表示, 因而有

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

根据(图 1.1), (图 1.2) 及(图 1.3) 我们有下面三个不等式:

$$|x| \leq |z|, \quad |y| \leq |z|, \quad |z| \leq |x| + |y|. \quad (1.1)$$

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|, \quad (\text{三角形两边和} \geq \text{第三边}). \quad (1.2)$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \quad (\text{三角形两边差} \leq \text{第三边}). \quad (1.3)$$

由(图 1.3) 可见, $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 的距离, 记为

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \quad (1.4)$$

复数 $z \neq 0$ 所对应的矢量 \vec{Oz} 与实轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的幅角, 记为 $\theta = \text{Arg}z$.

我们知道,任一复数 $z \neq 0$ 有无穷多个幅角,如果 θ_0 是其中一个,则有

$$\theta = \text{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

我们以 $\arg z$ 表其中的一个特定值,并把满足条件

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

的幅角称为 $\text{Arg}z$ 的主值,或称为 z 的主幅角,记为 $\arg z$. 于是有

$$\theta = \text{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.5)$$

注意,原点的模为 0,幅角无定义.

从直角坐标与极坐标的关系,我们可以用复数的模与幅角来表示非 0 复数 z . 由(图 1.1)即得

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (1.6)$$

特别当 $r=1$ 时

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

这种复数称为单位复数.

我们引出熟知的欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (1.7)$$

并且容易验证

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1.8)$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.9)$$

利用公式(1.7),就可以把(1.6)改写成

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (1.10)$$

我们分别称(1.6)和(1.10)为复数 $z \neq 0$ 的三角形形式和指数形式.

例 1. $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$