高等学校试用教材

高等数学

（数学物理方法）

（物理专业用）

第四册

四川大学数学系高等数学
微分方程教研组编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书为高等数学第四册，主要为数学物理方法的内容：复变函数论，数学物理方程，特殊函数等，可供综合大学和师范学院物理专业作为试用教材。

高等学校试用教材

高 等 数 学

（数学物理方法）

（物理专业用）

第 四 册

四川大学数学系高等数学微分方程教研组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 12.75 字数 300,000

1979年8月第1版1980年1月第1次印刷

印数 00,001—42,000

书号 13012·0376 定价 0.92 元

目　录

第一篇　复变函数论

大家知道，在解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（这里 a、b、c 都是实数且 $a\neq 0$）时，如果判别式 $b^2-4ac<0$，就会遇到负数开方的问题，最简单的一个例子是在解 $x^2+1=0$ 时，就会遇到 -1 开平方. 为了使负数开平方有意义，也就是要使这类方程有解，我们需要扩大数的范围，这时引进一种所谓**虚数**，用符号 i 当作虚数单位，即规定

(i) $i^2=-1$;

(ii) 它与实数在一起可以进行通常的四则运算.

根据这个规定就会出现形如 $a+bi$（这里 a, b 都是实数）的数，我们把它叫做**复数**.

复变函数论要研究的是：复变数 $z=x+iy$ 的函数的基本概念和理论及其一些应用. 复变函数理论的发展与数学分析是不能分离的，但它有它自身的特点，它的中心对象是解析函数. 由于解析函数具有许多独特的性质，致使复变函数论方法不但在纯粹数学各个部门有很多的应用，而且在各种应用数学、数学物理课程中也有广泛的应用，成为一种不可缺少的强有力的工具.

第一章　复数与复变函数

†第一节　复　　数*

§1.1.1. 复数域

所谓**复数**，是指形如 $z=x+iy$ 的数，其中 $i=\sqrt{-1}$ $(i^2=-1)$ 称为**虚单位**，x, y 都是实数，分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，记为 $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

实部为 0 的复数 $0+iy=iy$ 称为**纯虚数**，或**虚数**. 虚部为 0 的复数 $x+i\cdot 0=x$ 就是实数. 因此，全体实数是全体复数的一部分. 实部与虚部都为 0 的复数称为复数 0，记为 0. 故 $x+iy=0$ 必须且只须 $x=0$, $y=0$.

复数的**相等**与**加**、**减**、**乘**、**除**等运算是这样规定的：

(i) $x_1+iy_1=x_2+iy_2$，必须且只须 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$;

(ii) $(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$;

(iii) $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$;

(iv) $$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

其中 $x_2+iy_2\neq 0$.

显然，除法是乘法的逆运算.

若 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_3=x_3+iy_3$，则以下的交换律、结

* 作有记号 † 的部分是指与微积分中有关部分平行的内容，只作扼要讲解.

合律和分配律成立:

交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$;

结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

分配律: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

全体复数在引进上述相等关系和运算法则之后,称为**复数域**. 在复数域中没有复数大小的概念.

如果两个复数的差别仅仅是它们的虚部异号,则称这两个复数为**共轭复数**,或者说,这两个复数**共轭**. 复数 $z=x+iy$ 的共轭复数记为 $\bar{z}=x-iy$. 共轭复数有一些简单而重要的性质,例如

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$$

$$z+\bar{z}=2x=2\mathrm{Re}\,z$$

$$z-\bar{z}=2iy=2i\mathrm{Im}\,z$$

§ 1.1.2. 复平面

一个复数 $z=x+iy$,本质上由一对有序实数 (x,y) 唯一确定,于是能够建立平面上全部的点和全体复数间一一对应的关系(图 1.1). 由于 x 轴上的点对应着实数,故 x 轴称为**实轴**, y 轴上的点对应着纯虚数,所以 y 轴称为**虚轴**,这样表示复数的平面称为**复平面**或 **z 平面**.

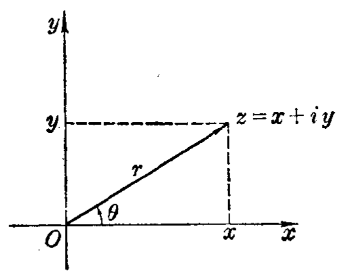

图 1.1

引进复平面之后,我们在“数”和“形”之间就建立了联系. 今后,我们不再区分“数”和“点”了,说到“点”可以指它所代表的“数”,说到“数”也可以指这个数所代表的“点”.

在复平面上,从原点到点 $z=x+iy$ 所引的矢量与这个数 z 也构成一一对应关系.

例如,若 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, 则 $z_1+z_2=(x_1+x_2)+$

$+i(y_1+y_2)$. 由(图 1.2)可以看出 z_1+z_2 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量与 z_2 所对应的矢量的和矢量.

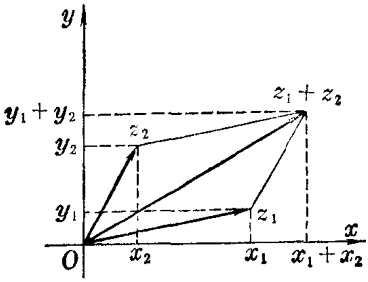

图 1.2

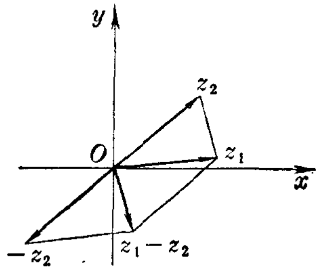

图 1.3

又如, 将 z_1-z_2 表成 $z_1+(-z_2)$, 可以看出 z_1-z_2 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量减 z_2(即加 $-z_2$)所对应的矢量(图1.3). 它与 z_2 为起点 z_1 为终点的矢量相等.

§1.1.3. 复数的模与幅角

表示复数 z 的点, 也可以用极坐标 r 和 θ 来确定(图 1.1).

上面我们用矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示复数 $z=x+iy$, x, y 顺次等于 $\overrightarrow{Oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量, 矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**, 或**绝对值**, 以符号 $|z|$ 或 r 表示, 因而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$$

根据(图 1.1), (图 1.2)及(图 1.3)我们有下面三个不等式:

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.1}$$

$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|, \text{(三角形两边和}\geqslant\text{第三边)}. \tag{1.2}$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|, \text{(三角形两边差}\leqslant\text{第三边)}. \tag{1.3}$$

由(图 1.3)可见, $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 的**距离**, 记为

$$\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2| \tag{1.4}$$

复数 $z\neq 0$ 所对应的矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的**幅角**, 记为 $\theta=\operatorname{Arg}z$.

我们知道，任一复数 $z\neq 0$ 有无穷多个幅角，如果 θ_0 是其中一个，则有

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi \quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

我们以 $\arg z$ 表其中的一个特定值，并把满足条件

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

的幅角称为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，或称为 z 的**主幅角**，记为$\arg z$. 于是有

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{1.5}$$

注意，原点的模为 0，幅角无定义.

从直角坐标与极坐标的关系，我们可以用复数的模与幅角来表示非 0 复数 z. 由(图 1.1)即得

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1.6}$$

特别当 $r=1$ 时

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

这种复数称为**单位复数**.

我们引出熟知的**欧拉公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1.7}$$

并且容易验证

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.8}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.9}$$

利用公式(1.7)，就可以把(1.6)改写成

$$z=x+iy=re^{i\theta} \tag{1.10}$$

我们分别称(1.6)和(1.10)为复数 $z\neq 0$ 的**三角形式**和**指数形式**.

例 1. $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}$$