责任编辑：余秉本
封面设计：邱云松

原著〔日〕有马哲 浅枝阳

**线性代数讲解** 翻 译 胡师度 周世武

四川人民出版社出版 （成都盐道街三号）
四川省新华书店发行 渡口新华印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张11.5 插页1 字数297千
1985年3月第一版 1985年3月第一次印刷
印数：1—9,000 册

书号：7118·733 定价：1.94元

# 序

这是一本线性代数练习的自学参考书，特别宜于两类学生应考之用：一类是复习时间不足或基础不牢，但又急于掌握起码知识的学生，如要会解方程组，矩阵的标准型等等；另一类是打算报考数学研究生，需要复习线性代数的学生.

在线性代数学中，概念的理解与计算技能的训练密切相关。线性代数所特有的抽象性往往使初学者为之苦恼，具体实例对于抽象概念的接受与掌握起着重大作用.

本书是由 79 个例题与 253 个习题（实际多于此数）所组成的有解习题集：

(1) 题目多从单纯复习定义的简单问题开始，其中不少是有数值的具体计算题. 在线性无关，方程组，矩阵及二次曲面标准型的问题中，尤其是这样. 通过这些具体实例，向那些望线性代数而生畏甚至却步的读者开辟了通向抽象概念的途径.

(2) 开头的 §1·1 编入少量复数的简单问题，是因为新的高中数学课程中已有相应的内容.

(3) 选入了不少用消去法计算逆矩阵与解方程组的问题.

(4) 许多涉及 $n=2$ 与一般 $n$ 的问题， 例如二阶矩阵与 $n$ 阶矩阵，二维与 $n$ 维等，编在一个题内，对于要应急的读者，只要会解$n=2$的情形，也能暂时凑合.

(5) 对于一般的读者，通常讨论实线性空间.

(6) 二维向量或三维向量的问题见 §1·2， §1·4， §9·3，§9·4等节，复数的许多问题实际上是二维向量的问题.

(7) 带 * 号的问题为专攻数学的读者而设，其中有的较难.

全书所编问题的数量与针对性，涉及到读者的程度；学工学

理亦或学数学，偏重计算练习或是理论等多个方面，希望读者根据自己的情况（知识基础，学习条件与目标等）适当取舍，考虑到实际的需要，对于问题的类型，提法以及解法力求多样化．见多识广，有助应考．

全书章节的组成，与有马　哲：线性代数入门（东京图书，1974）一书一致．在各节的开始，汇集了有关的定义与定理，接着用例题阐明如何实际运用定理．若对所用定理本身的证明或基础域尚有疑难？请参看上列入门书．

本书中与微分方程有关的问题是 § 1·3 例题 3，§ 1·4 例题 3，§1·4 问题14*，§7·2 问题 6*，以及 §7·3 问题 5*．上列《线性代数入门》一书中不曾解说的问题也收入几个，特别是二次曲面分类的问题，全部收入本书，并予以解答．

把题目分成例题与习题，在数学上自无多大差异，只不过就例题言，解答更加详尽而已．

线性代数的习题集不多；就少有的几种来看，其内容往往是教科书中容纳不下的定理的证明，缺乏实例．为此，我们致力于使本书成为一册实例丰富，类型多变，易于接受的习题集．在课堂教学中，常常是光讲理论，练习不足，碰到的习题范围狭窄，因此要求有一本称心的习题集的呼声日有所闻，但愿本书能满足这种愿望．

篇幅所限，许多问题只得割爱，若将来有机会，再根据读者的意见予以补充．

本书的完成，颇费周折．有烦于印刷厂与东京图书编辑部，特别是给须藤静雄先生添了麻烦，谨此致谢．

有马　哲
浅枝　阳　　1976 年 3 月 11 日

# 目　录

序

第1篇　未引入尺度的线性空间……………(1)

第1章　线性空间，线性映射……………(1)

§1·1　数域，复数……………(1)
§1·2　线性空间……………(14)
§1·3　线性子空间……………(26)
§1·4　线性映射……………(35)

第2章　矩阵空间……………(49)

§2·1　矩阵的和与数乘……………(49)
§2·2　矩阵的积……………(54)
§2·3　逆矩阵的定义……………(64)

第3章　维数，基底……………(73)

§3·1　线性无关……………(73)
§3·2　维数，基底……………(81)
§3·3　线性映射的矩阵表示，秩……………(99)
§3·4　基底变换，初等变换，逆矩阵的计算法……………(111)

第4章　线性映射的标准型……………(132)

§4·1　线性映射的标准型，由初等变换求矩阵的标准型……………

§4·2 线性映射的纤维,线性方程组……………………(139)

第5章 行列式……………………………………(161)

§5·1 行列式的定义和性质……………………………(161)
§5·2 行列式的又一定义………………………………(162)
§5·3 行列式的计算法…………………………………(167)
§5·4 逆矩阵,克莱姆公式……………………………(177)
§5·5 以函数作元素的矩阵与行列式…………………(184)

第6章 线性变换………………………………………(188)

§6·1 子空间的和与直和………………………………(188)
§6·2 线性变换与方阵…………………………………(193)
§6·3 特征多项式,其特征多项式分解为一次式之积的线性变换……………………………………(199)
§6·4 其特征多项式没有重根的线性变换……………(208)

第7章 线性变换的约当标准型………………………(219)

§7·1 最小多项式………………………………………(219)
§7·2 分解定理…………………………………………(225)
§7·3 只有一个特征值的线性变换……………………(231)
§7·4 约当标准型………………………………………(243)

**第2篇 引入尺度的线性空间**……………………(255)

第8章 欧几里德线性空间……………………………(255)

§8·1 内积………………………………………………(255)
§8·2 尺度同构映射(西线性映射)…………………(266)
…·3 正规变换…………………………………………(274)
…变换………………………………………………(28…

第9章　厄米特型，二次型……………………(310)
§9·1　共轭双线性型，对称双线性型………………(310)
§9·2　厄米特型，二次型…………………………(313)
§9·3　空间的合同变换，坐标变换………………(331)
§9·4　二次曲面，二次曲线………………………(340)

# 第1篇　未引入尺度的线性空间

## 第1章　线性空间，线性映射

### §1·1　数域，复数

**定义**　以 $\mathbf{R}$ 表全体实数的集合，以 $\mathbf{C}$ 表全体复数的集合．即定义

$$\mathbf{C}=\{a+bi \mid a,b\in \mathbf{R}\}$$

其中 $i^2=-1$，$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c$ 和 $b=d$．复数也称数．对 $\alpha=a+bi$，称 $a$ 为 $\alpha$ 的实部，$b$ 为 $\alpha$ 的虚部，并以 $a=\mathrm{Re}(\alpha)$，$b=\mathrm{I_m}(\alpha)$ 表示．不是实数的复数称为虚数，实部为0的虚数称为纯虚数．复数的和与积分别定义为

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

$\alpha=a+bi$ 的负数 $-\alpha$ 与倒数 $\alpha^{-1}$（也写作 $\frac{1}{\alpha}$，$1/\alpha$ 等等），分别定义为

$$-\alpha=-(a+bi)=-a-bi,$$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\text{（但}a+bi\neq 0\text{）}$$

并将 $\beta+(-\alpha)$ 写作 $\beta-\alpha$，　$\beta\frac{1}{\alpha}$ 写作 $\frac{\beta}{\alpha}$ 或 $\beta/\alpha$．

**命题**　集合 $\mathbf{C}$ 满足下列性质（1）～（9）（称为域的公理）．

公理 $I$（加法公理）

（1）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

（2）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(3) 对于实数 $0\in \mathbf{C}$，任意的 $\alpha\in \mathbf{C}$，有

$$0+\alpha=\alpha+0=\alpha$$

(4) 对于 $\alpha\in \mathbf{C}$ 及其负数 $-\alpha\in \mathbf{C}$，有

$$(-\alpha)+\alpha=\alpha+(-\alpha)=0$$

公理 II（乘法公理）

(5) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$

(6) $\alpha\beta=\beta\alpha$

(7) 对于实数 $1\in \mathbf{C}$，任意的 $\alpha\in \mathbf{C}$ 有

$$1\alpha=\alpha 1=\alpha$$

(8) 对于 $\mathbf{C}\ni\alpha\neq 0$ 及其倒数 $\alpha^{-1}\in \mathbf{C}$ 有

$$\alpha^{-1}\alpha=\alpha\,\alpha^{-1}=1$$

公理 III（联结加法与乘法的公理）

(9) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$，$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

因此，作复数的加减乘除，只要将 $i$ 视为字母，令 $i^2=-1$ 进行运算即可。

**例题1** 设 $\alpha=-7+22i$，$\beta=4+5i$，试将 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，$\alpha\beta$，$\alpha/\beta$ 写成 $a+bi$ 的形式。

**解** $\alpha+\beta=-3+27i$，$\alpha-\beta=-11+17i$，$\alpha\beta=(-7+22i)(4+5i)=-28+53i+110i^2=-138+53i$，$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-7+22i}{4+5i}=\dfrac{(-7+22i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=2+3i$ □*

对于数 $\alpha=a+bi$，称 $\bar{\alpha}=a-bi$ 为 $\alpha$ 的共轭复数. 显然

$$\bar{\bar{\alpha}}=\alpha,\ \overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\ \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\bar{\beta},\ \alpha\bar{\alpha}=a^2+b^2$$

在平面上选定直角坐标系，令点 $(a, b)$ 与数 $\alpha=a+bi$ 对应，则 $\mathbf{C}$ 的元与平面上的点 1－1 对应. 于是将数 $a+bi$ 与点 $(a, b)$ 等同，$\mathbf{C}$ 与平面等同. 此时称平面为复平面. 称横坐标轴为实轴，纵坐

* 符号□表示例题解完的意思。

标轴为虚轴.

原点o与$\alpha=a+bi=(a, b)$的距离称为$\alpha$的绝对值(或模)，写作$|\alpha|$.即定义$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$。$|\beta-\alpha|=\{$点$\alpha$与点$\beta$间的距离$\}$.显然

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|,\quad |\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$$

成立.

对于$\alpha=a+bi=(a,b)\neq o$，将向径从实轴旋转至半直线$o\alpha$的位置，所得一般角称为$\alpha$的幅角. 若$\theta$是$\alpha$的一个幅角，则$\theta+(2\pi$的整数倍)也是$\alpha$的幅角. $\theta$是$\alpha$的一个幅角，当$0\leqslant\theta<2\pi$时，称为幅角的主值，写作$\theta=\arg\alpha$. 若设$r=|\alpha|$，则$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，故$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$成立. 这称为复数$\alpha$的极式(或三角形式).

**例题2** 求$\alpha_1=1+\sqrt{3}i$，$\alpha_2=-\sqrt{3}+i$，$\alpha_3=-1-\sqrt{3}i$，$\alpha_4=\sqrt{3}-i$，$\beta_1=2$，$\beta_2=2i$，$\beta_3=-2$，$\beta_4=-2i$的绝对值、幅角、极式.

**解** $|\alpha_1|=|\alpha_2|=|\alpha_3|=|\alpha_4|=|\beta_1|=|\beta_2|=|\beta_3|=|\beta_4|=2$，$\arg(\alpha_1)=\pi/3$，$\arg(\alpha_2)=5\pi/6$，$\arg(\alpha3)=4\pi/3$，$\arg(\alpha_4)=11\pi/6$，$\arg(\beta_1)=0$，$\arg(\beta_2)=\pi/2$，$\arg(\beta_3)=\pi$，$\arg(\beta_4)=3\pi/2$. 极式分别为

$$\alpha_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\qquad \alpha_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\alpha_3=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right),\ \alpha_4=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\beta_1=2(\cos 0+i\sin 0),\qquad \beta_2=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$\beta_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $\qquad\qquad \beta_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$,

各点分布情况见图 1.

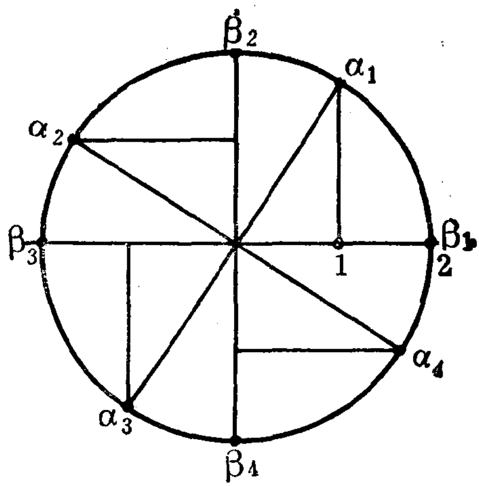


图1

**命题** （棣莫佛（De Moivre, A.）公式） □

（i） $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$

（ii） 对任意整数 $n$，$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

**例题 3** 设 $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$，求 $\alpha^{10}$.

**解** $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore\quad \alpha^{10}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}\right)=\frac{1}{2^5}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{i}{32}$$ □

**定义** 从集合 S 到 S 本身的映射 S→S 称为 S 的变换。

**命题** 在复平面 C 内

(i) 取共轭复数的变换 $\mathbf{C}\to\mathbf{C},\zeta\mapsto\bar{\zeta}$ 是关于实轴对称的变换，且

$|\bar{\alpha}|=|\alpha|,\arg(\bar{\alpha})=-\arg(\alpha)+2\pi$

但 $\alpha\neq0$。

(ii) 固定 $\alpha\in\mathbf{C}$ 时，变换 $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$，$\beta\mapsto\beta+\alpha$ 是将各点 $\beta\in\mathbf{C}$ 沿有向线段 $\overrightarrow{o\alpha}$ 的方向作长度 $|\alpha|$ 的平行移动。

(iii) 固定 $\mathbf{C}\ni\alpha\neq o$ 时，变换 $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$，$\beta\mapsto\alpha\beta$ 是先将各点 $\beta\in\mathbf{C}$ 至原点的距离乘以 $r=|\alpha|$，然后再旋转 $\theta=\arg\alpha$。

$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，$\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta+$（$2\pi$ 的整数倍）

(iv) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$，$\arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta+$（$2\pi$ 的整数倍）

特别，$\left|\dfrac{1}{\beta}\right|=\dfrac{1}{|\beta|}$，$\arg\left(\dfrac{1}{\beta}\right)=-\arg\beta+$（$2\pi$ 的整数倍）

**例4** 设 $\alpha=\dfrac{1+i}{3}$，$\beta=\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$，求 $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{12}$。

**解** $|\alpha|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$\therefore\ \alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$。$|\beta|=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ \beta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$。$\therefore$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).\quad\therefore\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{12}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{12}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{2^{18}}{3^{12}}.$$ □

**定义** 对复数 $\xi=x+iy$，定义

$$e^{\xi}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y$$

对于实数 $x$，$e^x$ 与普通指数函数的值一致.对于纯虚数 $iy$，$e^{iy}=\cos y+i\sin y$，这是绝对值为 1，幅角为 $y$ 的复数.复数 $\alpha$ 的极式也可写成 $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$（后者又称为复数的指数形式）

**例题5** 将 $\alpha=-14\sqrt{3}-14i$ 写成 $re^{i\theta}$ 的形式

**解** $|\alpha|=28$

$$\therefore\quad \alpha=28\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=28\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=28e^{i7\pi/6}$$

□

**命题** $e^{\xi+\eta}=e^{\xi}e^{\eta}$（加法公式），$e^{-\xi}=\dfrac{1}{e^{\xi}}$

**例题6** (i) 对复数 $A=Re^{i\Theta}$，$R=|A|>0$，自然数 $n$，试证明满足 $z^n=A$ 的复数 $z$ 恰有 $n$ 个，它们为

$$z=R^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\Theta}{n}+\frac{2\pi}{n}K\right)},\qquad 0\leqslant K\leqslant n-1.$$

(ii) 求 1 的全部 $n$ 次根，即满足 $z^n=1$ 的所有复数 $z$.

**解** (i) 设 $z=re^{i\theta}$，则 $z^n=r^n e^{in\theta}$，故

$$z^n=A\Longleftrightarrow\begin{cases}r^n=R\\ e^{in\theta}=e^{i\Theta}\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}r=R^{1/n}\\ n\theta=\Theta+2\pi K\ （K为整数）\end{cases}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\Theta}{n}+\frac{2\pi}{n}K$$

$$\Longleftrightarrow z=R^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\Theta}{n}+\frac{2\pi}{2}K\right)}$$

上式中，给出不同 $z$ 的 $K$ 有 $n$ 个，例如，$K=0,1,\cdots,n-1$。

(ii) 在 (i) 中取 $A=1$，$R=1$，$\Theta=0$ 则满足 $z^n=1$ 的 $z$ 由 $e^{i2\pi K/n}$，$0\leqslant K\leqslant n-1$ 给出．由此，若令 $\omega=e^{i2\pi/n}=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，则 1 的 $n$ 次根是 $1(=\omega^n)$, $\omega$, $\omega^2$, $\cdots$, $\omega^{n-1}$．例如，1 的 2 次根是 1，$-1$．3 次根是 1，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\alpha^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$．4次根是 1，$i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$．5 次根是 1，$\beta=e^{i2\pi/5}$，$\beta^2$，$\beta^3$，$\beta^4$．

**定义** 复数集合 **C** 的子集合 **K** 含有 0 与 1，关于 **C** 的加法与乘法封闭时，称 **K** 为数域，即，所谓数域 $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{C}$，是满足如下条件的数集。

数域条件
$$\begin{cases}\text{(i)} & \text{若 } x,\ y\in\mathbf{K}，\text{则 } x+y\in\mathbf{K},\ -x\in\mathbf{K}\\ \text{(ii)} & \text{若 } x,\ y\in\mathbf{K}，\text{则 } xy\in\mathbf{K}，\text{又若 } x\neq 0 \text{ 则 } x^{-1}\in\mathbf{K}\\ \text{(iii)} & 0,\ 1\in\mathbf{K}\end{cases}$$

例如，**C** 和 **R** 都是数域．**C** 称为复数域，**R** 称为实数域。

例 (i) 形如 $m/n$($m$, $n$ 为整数，$n\neq 0$) 的数称为有理数．以$Q$ 表示全体有理数．若 $x$，$y$ 是有理数，则$x+y$，$-x$，$xy$，$x^{-1}$($x\neq 0$ 时)也是有理数，故$Q$ 满足数域的条件，称为有理数域。

(ii) $D$ 为任意整数时，集合

$$\mathbf{K}=\{a+b\sqrt{D}\mid a、b\in\mathbf{Q}\}$$

是数域，何故？若 $D$ 是整数的平方则 $\mathbf{K}=\mathbf{Q}$．若 $D$ 不是整数的平方，$x$，$y\in\mathbf{K}$ 时，显然有 $x+y\in\mathbf{K}$，$-x\in\mathbf{K}$．$xy\in\mathbf{K}$．又 $x=a+b\sqrt{D}\in\mathbf{K}$，$x\neq 0$ 时，

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt{D}}=\frac{a-b\sqrt{D}}{(a+b\sqrt{D})(a-b\sqrt{D})}$$

$$=\frac{a}{a^2-b^2D}+\frac{-b}{a^2-b^2D}\sqrt{D}\in\mathbf{K},$$

故 K 满足数域的条件，这里利用了 $a-b\sqrt{D}\neq 0$.（若不然，设 $a-b\sqrt{D}=0$，若 $b\neq 0$ 则 $\sqrt{D}=a/b$，$D=a^2/b^2$（=整数），于是$\frac{a}{b}$为整数，$D=$(整数)$^2$，矛盾；若$b=0$，则$a=0$，这与$x=a+b\sqrt{D}\neq 0$ 矛盾）.

(iii) 所有正负整数与零所成的集 Z，虽然满足条件 (i) 和 (iii)，但不满足条件(ii)，故 Z 不是数域.

## 习　　题

> **习题1** 对于函数 $C(z)=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，$S(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$，试证明下列各式.
>
> $C(z)^2+S(z)^2=1$，$C(z+w)=C(z)C(w)-S(z)S(w)$，
>
> $S(z+w)=S(z)C(w)+C(z)S(w)$

**解** $C(z)^2+S(z)^2={}^2\dfrac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}-\dfrac{e^{2iz}-2+e^{-2iz}}{4}=1$.

$$C(z)C(w)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\times\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$$

$$=\frac{e^{i(z+w)}+e^{-(2+w)}+e^{-i(z-w)}+e^{i(-z+w)}}{4}.$$

$$S(z)S(w)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\quad\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$=\dfrac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}-e^{i(z-w)}-{}^{i(-z+w)}}{-4}$. $\therefore C(z)C(w)-S(z)S(w)=$

$\dfrac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}=C(z+w)$.同样,$S(z)C(w)+C(z)S(w)=$

$\dfrac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i}=S(z+w)$

**习题2** 设 $S$、$T$ 分别是平面 $\mathbf{C}$ 上以 $\alpha$、$\beta\in\mathbf{C}$ 作中心的点对称变换.

(i) 证明变换 $S$: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 可表成 $S(z)=2\alpha-z$.

(ii) 证明合成变换 $T(S(z))$是 $\mathbf{C}$ 上的平行移动.

**解** (i) 固定点 $z\in c$ 时，由点对称的定义，点 $\alpha$ 是联结两点 $z$ 与$S(z)$的线段的中点，$\therefore\ \alpha=\dfrac{z+S(z)}{2}$，$S(z)=2\alpha-z$

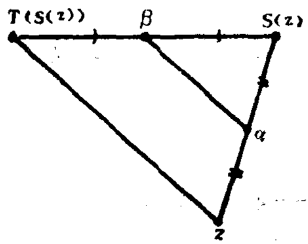


图2

(ii) 与 $S(z)=2\alpha-z$一样，$T(z)=2\beta-z$. $\therefore T(S(z))=2\beta-S(z)=2\beta-(2\alpha-z)=z+2(\beta-\alpha)$.这表明合成变换 $T(S(z))$是平行移动.

**习题3** (i) 证明在复平面 $\mathbf{C}$ 上，集合$\{z\in\mathbf{C}|\ Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+D=0\}$表示圆周；这里 $B\in C$, $A$, $D\in R$, $B\bar{B}>AD$, $A\neq0$. 反之，$\mathbf{C}$ 上的圆周恒可写成上面的形式。

(ii) 点 $z$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 上的一个圆周上变动时，证明点 $w=1/z$ 也在某个圆周（或直线）上变动.

**解** (i) 令 $B=b-ic$, $z=x+iy$,则 $Az\bar{z}=A(x^2+y^2)$, $Bz+\overline{Bz}=2(bx+cy)$，$0=Az\bar{z}+Bz+\overline{Bz}+D=A(x^2+y^2)+2(bx+cy)+D$

$$\therefore\quad 0=x^2+y^2+\frac{2bx}{A}+\frac{2cy}{A}+\frac{D}{A}$$

$$\left(x+\frac{b}{A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{A}\right)^2=\frac{B\bar{B}-AD}{A^2}>0\cdots\cdots 圆$$

反之，设有圆 $a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=0$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$a\neq0$，$b^2+c^2>ad$，若令 $b-ic=B$，则 $B\bar{B}=b^2+c^2>ad$

$0=a(x^2+y^2)+2bx+2cy+d=aZ\bar{Z}+BZ+\bar{B}\bar{Z}+d$.

(ii) $Z$ 在圆 $AZ\bar{Z}+BZ+\bar{B}\bar{Z}+D=0$ 上变动时，若代入 $Z=\frac{1}{W}$，则得 $DW\bar{W}+\bar{B}W+B\bar{W}+A=0$。故 $D\neq0$ 时表示圆，$D=0$ 时表示直线。

| |
|---|
| **习题4** 设复数 $\alpha=x+iy$，$\beta=u+iv$ 的实部 $x$，$u$，虚部 $y$，都是整数，且 $\alpha\beta=2$. 求 $\alpha$，$\beta$. |

**解** $4=|\alpha|^2|\beta|^2=(x^2+y^2)(u^2+v^2)$。因 $x^2+y^2$，$u^2+v^2$ 是大于零的整数，故 $x^2+y^2=1,2,4$。$x^2+y^2=1$ 时，$(x,y)=(\pm1,0)$，$(0,\pm1)$，所以"$\alpha=\pm1$，$\beta=\pm2$；$\alpha=\pm i$，$\beta=2\alpha^{-1}=\mp2i$"。当 $x^2+y^2=2$ 时，$(x,y)=(\pm1,\pm1)$，所以"$\alpha=\pm(1+i)$，$\beta=\pm(1-i)$"；"$\alpha=\pm(1-i)$，$\beta=\pm(1+i)$"。当 $x^2+y^2=4$ 时，$u^2+v^2=1$，$\therefore$ "$\beta=\pm1$，$\alpha=\pm2$"；"$\beta=\pm i$，$\alpha=\mp2i$"

| |
|---|
| **习题5** 证明任何数域 $\mathbf{K}$ 都包含全部有理数，即 $\mathbf{K}\supseteq\mathbf{Q}$. |

**解** 由 $\mathbf{K}\ni1$ 得 $2=1+1\in\mathbf{K}$，$3=2+1\in\mathbf{K}$，……故所有的自然数 $n\in\mathbf{K}$。由 $n\in\mathbf{K}$ 得 $-n\in\mathbf{K}$。$\therefore$所有的整数 $\in\mathbf{K}$。$\therefore n$，$m$ 为整数，$n\neq0$ 时，$1/n\in\mathbf{K}$，$m/n=m(1/n)\in\mathbf{K}$，$\therefore$ 所有的有理数 $m/n\in\mathbf{K}$。

**习题6** $a_i \in \mathbf{R}$，$\alpha \in \mathbf{C}$，$f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$，证明 $f(\alpha)=0 \Longrightarrow f(\bar{\alpha})=0$，$\alpha$ 为 $f(t)$ 的 $k$ 重根 $\Longrightarrow \bar{\alpha}$ 也为 $f(t)$ 的 $k$ 重根

**解** 因 $\overline{a_k\alpha^k}=a_k\bar{\alpha}^k$，故在 $0=f(\alpha)$ 的两端取共轭复数则得：$0=\bar{0}=\overline{f(\alpha)}=\overline{a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n}=\bar{a}_0+\overline{a_1\alpha}+\cdots+\overline{a_n\alpha^n}=a_0+a_1\bar{\alpha}+\cdots+a_n\bar{\alpha}^n=f(\bar{\alpha})$，$\therefore 0=f(\bar{\alpha})$。又若 $\alpha$ 为 $f(t)$ 之 $k$ 重根，则存在复系数多项式 $g$，使 $f(t)=(t-\alpha)^kg(t)$，$g(\alpha)\neq 0$。设将 $g(t)$ 的各系数换以相应的共轭复数后所得多项式为 $G(t)$，则 $f(t)=(t-\bar{\alpha})^kG(t)$，$G(\bar{\alpha})=\overline{g(\alpha)}\neq 0$，故 $\bar{\alpha}$ 为 $f(t)$ 之 $k$ 重根。

**习题7** 对于复数 $\alpha$，$\beta$，若 $\alpha\beta=0$，试证明 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$。

**解** 若 $\alpha\beta=0$，$\alpha\neq 0$，则 $0=\frac{1}{\alpha}(\alpha\beta)=\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\beta=1\cdot\beta=\beta$。

**习题8** 求复平面上两点 $A,B$ 间的距离，以及 $C,D$ 间的距离。
$A=-7+2i$，$B=5-3i$，$C=51+43i$，$D=54+39i$

**解** $A-B=-12+5i$，$|A-B|=13$，
$C-D=-3+4i$，$|C-D|=5$

**习题9** $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(1+i)$，$\beta=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)$ 时，

(*i*) 求 $(\alpha+\beta)^2$，

(*ii*) 以极式表示 $\alpha+\beta$，

(*iii*) 求 $(\alpha+\beta)^{24}$，$(\alpha+\beta)^{100}$。

**解** (*i*) $\alpha+\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$