张建亚
陈永明 编

微积分程序教程

上海科学技术文献出版社

微积分程序教程

张建亚
陈永明　编

上海科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书是采用程序教学的方式编写，其内容为一元函数的微积分。

本书可作师范院校、工科院校（包括电视大学、职工业余大学、函授大学）学生学习和在职中学数学教师进修使用，对自学者尤为适宜，也可供从事微积分课教学的教师参考。

编 者 的 话

程序教学是美国心理学家斯金纳 (B. F. Skinner) 等首创的教学方法，其主要特点是“小步子”. 即把学习的内容细分成若干个小的学习步骤，每一步都是一个问题，由学习者循序回答. 问题与问题之间的难度相差很小，容易学懂.

本书是吸取了国外程序教学法的优点，并结合我国的实际情况作了改进编写而成的. 通过实践，我们认为国外程序教学法有不少优点，但也有其不足之处. 教学中采用“小步子”，循序渐进，由浅入深，容易学习，有利于调动学习者的学习主动性和积极性，但在培养解答能力方面较为薄弱. 我们希望既保持国外程序教学循序渐进的优点，又能使学习者的解答能力得到锻炼与培养. 因而对有些内容，在编写时，故意先出现一个较难的问题(我们称之为大步子)，紧接着安排几个提示性的小问题(我们称之为支程序). 这样，对有能力解出这个问题的学习者，可以跳过支程序；对有困难的学习者也提供了一个独立思考的机会，而且学了支程序之后，回头再解原来的问题就没有什么困难了. 这种编写方法，我们称为“大小步子结合”. 这样做，一方面锻炼和培养学习者的分析解决问题的能力，另一方面也达到了因材施教的目的. “大小步子结合”的提法是否确切，本书中结合得是否妥当，尚需在实践中逐步总结、改进、提高.

为了便于自学，本书每节前都写了“学习建议”；对有些内容作了“小结”；对有些解题方法作了“评论”；对容易混淆的概念和容易疏忽的地方作了“注”；每章还安排一节“杂例讨论”，介绍综合性题目的解法。本书的习题有一定的难度，学习者可量力而行，选做一部分.

为了便于学习者复习和小结，在每一“步子”前标以记号(如

〔引〕,〔正〕,〔注〕,……),学习者一下子就可以了解这个“步子”的性质和地位.

本书可供师范院校、工科院校(包括电视大学、业余职工大学、函授大学)学生学习和在职中学数学教师进修使用,对自学者尤为适宜.本书还可供微积分课的教师作教学参考.

上海师范学院数学系系主任应制夷同志主持了本书审稿工作,参加审稿工作还有林炎生、张方盛同志.在编写过程中,陆子芬、曹伟杰、龚伦超、周彭年、赵善继、刘俊杰、曹瑞熊同志以及上海师范学院数学系函数论教研组许多同志都提出了很多有益的建议,上海师范学院和上海市徐汇区教育学院领导对我们的试验及编写工作给于有力支持,在此一并表示感谢.由于我们水平有限,一定存在不少问题,恳请专家、同行和广大读者批评指正.

上海师范学院　张建亚
上海市徐汇区教育学院　陈永明
1983.1

使 用 说 明

1．本书是一种程序式的自学教材．全书内容由一道道题目组成，读者必须逐次阅读和解答每一道题目，并写出完整的答案，解完这些题目，知识也就基本掌握了．每一道题目后面，一般都有答案，供读者核验．如果你答错了，必须重新学习这一道题目．在你未完成解答之前，始终要把答案遮盖起来．

2．有些题后面带有△号的题目，这是为对学习这一题有困难的读者安排的提示性题目，没有困难的读者可以跳过．

3．题目的形式有：填充题、问答题、选择题．下面举一个选择题的例子："N 是什么数？N 是(实数　整数　正整数)"，括号内是三项供选择的内容．

4．为了便于学习和复习，每个题目前，都标明这个题目的性质．所标明的符号及其意义如下：

〔引〕　为引出主要内容所安插的启发性题目；

〔正〕　定义、定理等主要内容；

〔例〕　例题；

〔练〕　练习题；

〔注〕　对于容易混淆和疏忽之处所作的注释；

〔结〕　新知识小结；

〔复〕　旧知识复习．

5．本书层次分得较细，有章、节、小节；有些小节又分若干段，标题用楷体印成。

目　　录

第一章　函　　数

第二章　数列的极限

第三章　函数的极限

第四章　无穷小量与无穷大量

第五章　连 续 函 数

第六章 导数与微分

第七章　微分学基本定理

第八章　导 数 应 用

第九章 不定积分

第十章 定 积 分

第十一章 定积分的应用

第一章 函 数

从本章到第五章是一元函数微积分的引论部分。

本章所述的函数是微积分的研究对象. 考虑到中学里已经学过函数，因而这里只对其重点内容有针对性地加以阐述和补充。

§1.1 函数概念

学习建议 本节内容十分重要，特别是确定函数的两个要素务必弄懂，否则学习以后的有关内容时就会发生困难。另外，读者对分段函数较生疏，所以也须引起重视。

§1.1.1 函 数

函数的定义

1〔正〕**定义** 设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照某一种对应规律 f，都可以唯一地确定变量 y 的相应的值，我们就说变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \quad x\in D \quad (\text{读作 } x \text{ 属于 } D)$$

x 称为自变量，y 称为因变量，从 x 到 y 的对应规律 f 又称函数关系，D 叫做函数的定义域.

为了叙述方便，函数定义可简述为：

$$\text{每一}x\in D \xrightarrow{f} \text{唯一}y.$$

2〔例〕 ① 自由落体运动的规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度。根据函数的定义，下降距离 s 是时间 t 的函数。

② 球的体积V与半径R有关，二者之间的关系是$V=$____.根据函数定义，球体积V是球半径R的函数.

③ 式子$y^2=x$. 对$(0, +\infty)$中的每一个x值，是不是都有y值与它对应？如果有，有几个值与它对应？这个式子中的y是不是x的函数？

【答案 ②$V=\frac{4}{3}\pi R^3$. ③有；有两个；不是.】

3〔练〕 ① 下列式子中的y是不是x的函数？

$$y=\sqrt{-x};\qquad y=\sqrt{-x^2};\qquad y=\frac{1}{\sqrt{-x^2}}.$$

② 式子$y=6$中不含x，我们可以这样认为：不论x取什么实数，y总等于6，因此此式中的y也可以看作x的____.

③ 式子$x=1$中不含y，可不可以认为y是x的函数？

④ 式子$y=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ x^2, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$

对$(-\infty, +\infty)$中的每一个x值，是不是都有唯一的y与之对应？y是不是x的函数？是一个函数还是两个函数？

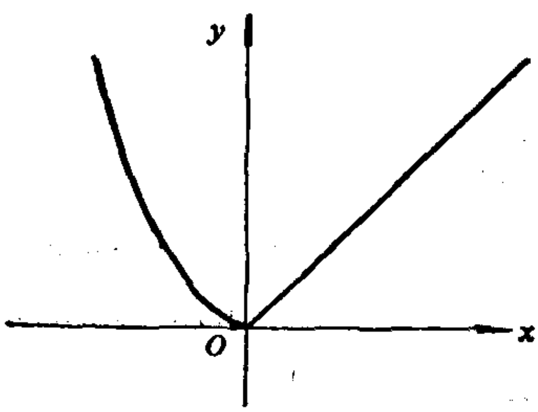

图 1-1-1

【答案 ① 因在$(-\infty,0]$中每个x，都有唯一的y与它对应，所以是函数；是；不是. ②函数. ③不可以，因为对于$x=1$，有无穷多个y与它对应. ④有；是；一个函数.】

4〔注〕 第**3**④题的函数是由两个数学式子表示的. 凡是在自变量不同的取值范围里，用不同的数学式子来表示的函数叫**分段函数**. 试画出第**3**④题分段函数的图象.

【答案 见图1-1-1.】

函数值

5〔正〕**定义** 设函数$y=f(x)$，当自变量x取定义域中的某一定值x_0时，因变量的相应值叫做当$x=x_0$时的函数值，记作$f(x_0)$或$f(x)\big|_{x=x_0}$.

6〔练〕 若 $f(x)=2x^2-5$，求

① $f(1)$； ② $f(2)$；

③ $(2x^2-5)\big|_{x=-\frac{1}{2}}$； ④ $(2x^2-5)\big|_{x=a}$.

【答案 ① -3. ② 3. ③ $-\dfrac{9}{2}$. ④ $2a^2-5$.】

7〔练〕 设 $f(x)=e^x-1$，求 $f(a)$，$f(-a)$；$-f(-a)$；$f(a^2)$；$[f(a)]^2$.

【答案 e^a-1；$e^{-a}-1$；$-e^{-a}+1$；$e^{a^2}-1$；$(e^a-1)^2$.】

8〔练〕 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x>0\ 时,\\ 0, & 当\ x=0\ 时,\\ -1, & 当\ x<0\ 时,\end{cases}$

求 $f(3)$，$f(7.5)$，$f(-4)$，$f(-10.5)$，$f(0)$，并画出这个函数的图象.

这个函数称为**符号函数**，又称为**克朗涅克尔函数**，可记作 $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

评 求分段函数的函数值，应先要看自变量的值落在哪一段里.

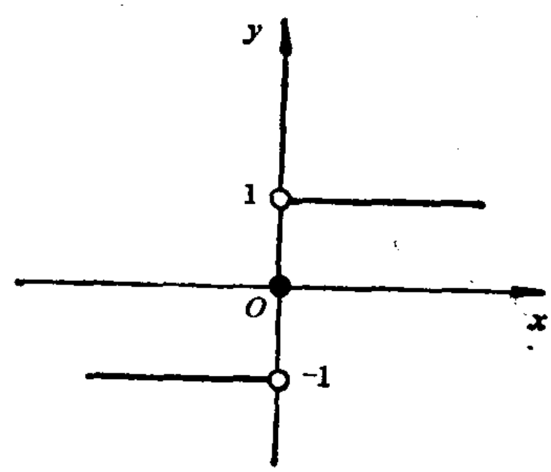

图 1-1-2

【答案 1；1；-1；-1；0；见图 1-1-2.】

9〔练〕 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 当\ -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 当\ 0<x<+\infty.\end{cases}$

求 $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 并画出这个函数的图象.

【答案 -1；0；1；2；4；见图 1-1-3.】

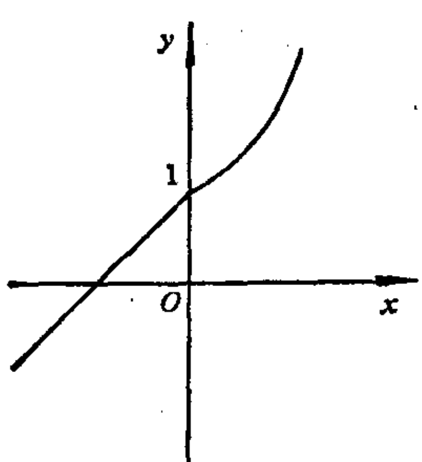

图 1-1-3

函数表示法

10〔正〕 众所周知，函数有三种常用表示法：列表法、图象法、解析法．用得较多的是解析法．除此之外，有时还