

张建亚 编
陈永明

微积分 程序教程

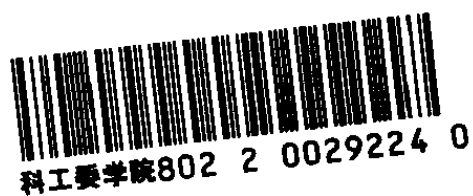
上海科学技术文献出版社

00757

微积分程序教程

张 建 亚
陈 永 明 编

6F/27/11



上海科学技术文献出版社

内 容 提 要

本书是采用程序教学的方式编写, 其内容为一元函数的微积分。

本书可作师范院校、工科院校(包括电视大学、职工业余大学、函授大学)学生学习和在职中学数学教师进修使用, 对自学者尤为适宜, 也可供从事微积分课教学的教师参考。

编 者 的 话

程序教学是美国心理学家斯金纳 (B. F. Skinner) 等首创的教学方法, 其主要特点是“小步子”。即把学习的内容细分成若干个小的学习步骤, 每一步都是一个问题, 由学习者循序回答。问题与问题之间的难度相差很小, 容易学懂。

本书是吸取了国外程序教学法的优点, 并结合我国的实际情况作了改进编写而成的。通过实践, 我们认为国外程序教学法有不少优点, 但也有其不足之处。教学中采用“小步子”, 循序渐进, 由浅入深, 容易学习, 有利于调动学习者的学习主动性和积极性, 但在培养解答能力方面较为薄弱。我们希望既保持国外程序教学循序渐进的优点, 又能使学习者的解答能力得到锻炼与培养。因而对有些内容, 在编写时, 故意先出现一个较难的问题(我们称之为大步子), 紧接着安排几个提示性的小问题(我们称之为支程序)。这样, 对有能力解出这个问题的学习者, 可以跳过支程序; 对有困难的学习者也提供了一个独立思考的机会, 而且学了支程序之后, 回头再解原来的问题就没有什么困难了。这种编写方法, 我们称为“大小步子结合”。这样做, 一方面锻炼和培养学习者的分析解决问题的能力, 另一方面也达到了因材施教的目的。“大小步子结合”的提法是否确切, 本书中结合得是否妥当, 尚需在实践中逐步总结、改进、提高。

为了便于自学, 本书每节前都写了“学习建议”; 对有些内容作了“小结”; 对有些解题方法作了“评论”; 对容易混淆的概念和容易疏忽的地方作了“注”; 每章还安排一节“杂例讨论”, 介绍综合性题目的解法。本书的习题有一定的难度, 学习者可量力而行, 选做一部分。

为了便于学习者复习和小结, 在每一“步子”前标以记号(如

[引], [正], [注], ……), 学习者一下子就可以了解这个“步子”的性质和地位。

本书可供师范院校、工科院校(包括电视大学、业余职工大学、函授大学)学生学习和在职中学数学教师进修使用,对自学者尤为适宜。本书还可供微积分课的教师作教学参考。

上海师范学院数学系系主任应制夷同志主持了本书审稿工作,参加审稿工作还有林炎生、张方盛同志。在编写过程中,陆子芬、曹伟杰、龚伦超、周彭年、赵善继、刘俊杰、曹瑞熊同志以及上海师范学院数学系函数论教研组许多同志都提出了很多有益的建议,上海师范学院和上海市徐汇区教育学院领导对我们的试验及编写工作给于有力支持,在此一并表示感谢。由于我们水平有限,一定存在不少问题,恳请专家、同行和广大读者批评指正。

上 海 师 范 学 院 张 建 亚

上海市徐汇区教育学院 陈永明

1983. 1

使 用 说 明

1. 本书是一种程序式的自学教材。全书内容由一道道题目组成，读者必须逐次阅读和解答每一道题目，并写出完整的答案，解完这些题目，知识也就基本掌握了。每一道题目后面，一般都有答案，供读者核验。如果你答错了，必须重新学习这一道题目。在你未完成解答之前，始终要把答案遮盖起来。

2. 有些题后面带有△号的题目，这是为对学习这一题有困难的读者安排的提示性题目，没有困难的读者可以跳过。

3. 题目的形式有：填充题、问答题、选择题。下面举一个选择题的例子：“ N 是什么数？ N 是(实数 整数 正整数)”，括号内是三项供选择的内容。

4. 为了便于学习和复习，每个题目前，都标明这个题目的性质。所标明的符号及其意义如下：

〔引〕 为引出主要内容所安插的启发性题目；

〔正〕 定义、定理等主要内容；

〔例〕 例题；

〔练〕 练习题；

〔注〕 对于容易混淆和疏忽之处所作的注释；

〔结〕 新知识小结；

〔复〕 旧知识复习。

5. 本书层次分得较细，有章、节、小节；有些小节又分若干段，标题用楷体印成。

目 录

第一章 函 数

§ 1.1 函数概念	(1)
§ 1.1.1 函数	(1)
§ 1.1.2 函数定义的剖析	(4)
§ 1.2 函数的几种特性	(8)
§ 1.2.1 函数的奇偶性	(9)
§ 1.2.2 函数的单调性	(11)
§ 1.2.3 函数的周期性	(14)
§ 1.2.4 函数的有界性	(20)
§ 1.3 反函数	(22)
§ 1.3.1 反函数的定义和两种表示形式	(22)
§ 1.3.2 反函数的图象	(26)
§ 1.3.3 反函数的存在性	(29)
§ 1.4 复合函数	(32)
§ 1.5 初等函数	(36)
§ 1.5.1 基本初等函数	(36)
§ 1.5.2 初等函数	(43)
§ 1.6 杂例讨论	(44)
习题	(47)

第二章 数 列 的 极 限

§ 2.1 数列极限的概念	(49)
§ 2.1.1 预备知识	(49)
§ 2.1.2 数列极限的初步描述	(52)
§ 2.1.3 数列极限概念的精确化	(54)
§ 2.1.4 运用定义验证数列极限	(60)

§ 2.1.5 收敛数列与发散数列	(70)
§ 2.2 数列极限的性质和运算法则	(71)
§ 2.2.1 预备知识	(71)
§ 2.2.2 收敛数列的性质	(76)
§ 2.2.3 数列极限的运算法则	(85)
§ 2.2.4 利用运算法则求极限	(92)
§ 2.3 数列极限存在的一个判别法	(96)
§ 2.3.1 预备知识——单调数列	(96)
§ 2.3.2 数列极限存在的一个判别法	(97)
§ 2.3.3 重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	(100)
§ 2.4 杂例讨论	(103)
习题	(106)

第三章 函数的极限

§ 3.1 自变量趋于无限时的函数极限	(108)
§ 3.1.1 $x \rightarrow +\infty$ 时的函数极限	(108)
§ 3.1.2 $x \rightarrow -\infty$ 时的函数极限	(115)
§ 3.1.3 $x \rightarrow \infty$ 时的函数极限	(119)
§ 3.2 自变量趋于有限数时的函数极限	(121)
§ 3.2.1 $x \rightarrow a$ 时的函数极限	(122)
§ 3.2.2 函数的单边极限	(131)
§ 3.3 函数极限的性质和运算法则	(133)
§ 3.3.1 函数极限的性质	(134)
§ 3.3.2 函数极限的运算法则	(136)
§ 3.3.3 求 $x \rightarrow \infty$ 时的函数极限	(136)
§ 3.3.4 求 $x \rightarrow a$ 时的函数极限	(139)
§ 3.3.5 重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(142)
§ 3.3.6 重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	(146)
§ 3.4 杂例讨论	(149)
习题	(152)

第四章 无穷小量与无穷大量

§ 4.1 无穷小量	(153)
§ 4.1.1 无穷小量的概念	(153)
§ 4.1.2 无穷小量的运算	(155)
§ 4.2 无穷大量	(157)
§ 4.2.1 无穷大量的概念	(157)
§ 4.2.2 无穷大量与无穷小量的关系	(162)
§ 4.3 无穷小(大)量的比较	(164)
§ 4.3.1 无穷小量的比较	(164)
§ 4.3.2 无穷小量的阶	(166)
§ 4.3.3 无穷大量的比较	(170)
§ 4.4 杂例讨论	(171)
习题	(173)

第五章 连续函数

§ 5.1 函数的连续性	(175)
§ 5.1.1 函数在一点处连续的概念	(175)
§ 5.1.2 左、右连续	(182)
§ 5.1.3 区间连续	(183)
§ 5.2 间断	(184)
§ 5.2.1 间断的概念	(185)
§ 5.3.2 间断点的各种情形	(186)
§ 5.3 初等函数的连续性	(190)
§ 5.3.1 连续函数的四则运算	(190)
§ 5.2.2 反函数和复合函数的连续性	(192)
§ 5.3.3 初等函数的连续性	(196)
§ 5.3.4 连续理论在求极限方面的应用	(198)
§ 5.3.5 求极限小结	(205)
§ 5.4 闭区间上连续函数的性质	(207)
§ 5.4.1 有界性定理	(207)
§ 5.4.2 最大最小值定理	(208)

§ 5.4.3 零值定理	(209)
§ 5.4.4 介值定理	(211)
§ 5.4.5 反函数连续性定理的证明	(213)
§ 5.5 杂例讨论	(215)
习题	(217)

第六章 导数与微分

§ 6.1 导数的概念	(219)
§ 6.1.1 实例——导数概念的引出	(219)
§ 6.1.2 导数定义	(225)
§ 6.2 简单函数的导数	(232)
§ 6.3 可导问题	(236)
§ 6.3.1 可导与连续关系	(236)
§ 6.3.2 左、右导数	(237)
§ 6.4 函数的和、差、积、商的求导法则	(242)
§ 6.4.1 预备知识——关于函数增量的复习	(242)
§ 6.4.2 函数和、差的求导法则	(244)
§ 6.4.3 函数积的求导法则	(244)
§ 6.4.4 函数商的求导法则	(247)
§ 6.5 反函数的导数	(249)
§ 6.6 复合函数求导法则	(254)
§ 6.6.1 预备知识——导数记号 y'_x 及 $\frac{dy}{dx}$	(254)
§ 6.6.2 复合函数求导法则	(255)
§ 6.6.3 初等函数求导法小结	(263)
§ 6.7 求导法补充	(265)
§ 6.7.1 隐函数求导法	(265)
§ 6.7.2 对数求导法	(267)
§ 6.7.3 由参数方程所确定的函数的导数	(270)
§ 6.8 微分	(272)
§ 6.8.1 微分的定义与求法	(273)
§ 6.8.2 微分与函数增量的关系	(275)

§ 6.8.3 微分的几何意义	(278)
§ 6.8.4 微分的运算法则, 微分形式不变性	(279)
§ 6.8.5 微分在近似计算中的应用	(282)
§ 6.9 高阶导数与高阶微分	(285)
§ 6.9.1 高阶导数	(285)
§ 6.9.2 高阶微分	(295)
§ 6.10 杂例讨论	(299)
习题	(302)

第七章 微分学基本定理

§ 7.1 微分学中值定理	(305)
§ 7.1.1 罗尔定理	(305)
§ 7.1.2 拉格朗日定理	(310)
§ 7.1.3 柯西定理	(318)
§ 7.2 洛必达法则	(321)
§ 7.2.1 $\frac{0}{0}$ 型	(321)
§ 7.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型	(326)
§ 7.2.3 $0 \cdot \infty, \infty - \infty$ 型	(328)
§ 7.2.4 $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型	(331)
§ 7.2.5 运用洛必达法则的几点注意	(333)
§ 7.3 泰勒公式	(335)
§ 7.3.1 关于 $x=0$ 的泰勒公式	(335)
§ 7.3.2 几个简单函数的马克劳林展开式	(340)
§ 7.3.3 关于 $x=x_0$ 的泰勒公式	(345)
§ 7.3.4 泰勒公式的二个应用	(347)
§ 7.4 杂例讨论	(305)
习题	(352)

第八章 导数应用

§ 8.1 函数单调性的判定	(355)
§ 8.1.1 复习单调性的定义	(355)

§ 8.1.2 函数增减的充分判别法	(356)
§ 8.1.3 函数增减的充要条件	(358)
§ 8.1.4 研究函数的单调性	(360)
§ 8.1.5 利用单调性证明不等式	(362)
§ 8.2 函数的极值与最大(小)值	(363)
§ 8.2.1 极值的定义和必要条件	(363)
§ 8.2.2 极值的判别法	(365)
§ 8.2.3 函数的最大(小)值	(368)
§ 8.3 函数的凸性与拐点	(374)
§ 8.3.1 函数凸性的定义	(374)
§ 8.3.2 函数凸性的判别法	(376)
§ 8.3.3 曲线的拐点	(378)
§ 8.4 曲线的渐近线	(381)
§ 8.4.1 渐近线的定义	(381)
§ 8.4.2 渐近线的分类及求法	(382)
§ 8.5 函数作图	(386)
§ 8.6 平面曲线的曲率	(390)
§ 8.6.1 曲率的定义	(391)
§ 8.6.2 曲率的计算	(394)
§ 8.6.3 曲率半径	(398)
§ 8.7 杂例讨论	(399)
习题	(402)

第九章 不定积分

§ 9.1 不定积分的概念及运算法则	(405)
§ 9.1.1 不定积分的定义	(405)
§ 9.1.2 不定积分的基本公式	(411)
§ 9.1.3 不定积分的运算法则	(414)
§ 9.2 换元积分法和分部积分法	(418)
§ 9.2.1 换元积分法	(418)
§ 9.2.2 分部积分法	(432)
§ 9.3 有理函数的积分	(440)

§ 9.3.1 有理函数	(440)
§ 9.3.2 简单有理真分式的积分	(444)
§ 9.3.3 有理函数的积分	(447)
§ 9.4 三角函数有理式的积分	(449)
§ 9.4.1 万能代换	(449)
§ 9.4.2 特殊情形	(451)
§ 9.4.3 引用三角恒等式求积分	(453)
§ 9.5 简单无理函数的积分	(455)
§ 9.5.1 形如 $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ 的积分	(455)
§ 9.5.2 形如 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 的积分	(458)
§ 9.6 积分法小结	(466)
§ 9.6.1 求积分的若干方法与基本类型	(467)
§ 9.6.2 积分法的选择	(468)
§ 9.6.3 不能用初等函数表示的不定积分	(468)
§ 9.7 杂例讨论	(469)
习题	(472)

第十章 定 积 分

§ 10.1 定积分的概念	(474)
§ 10.1.1 预备知识——求和记号“ Σ ”	(474)
§ 10.1.2 实例——定积分概念的引入	(476)
§ 10.1.3 定积分的定义	(482)
§ 10.1.4 定积分定义的剖析	(484)
§ 10.1.5 定积分的存在问题	(485)
§ 10.1.6 定积分的几何意义及两个规定	(489)
§ 10.2 定积分的性质	(490)
§ 10.2.1 定积分的基本性质	(490)
§ 10.2.2 定积分中值定理	(496)
§ 10.3 定积分与不定积分的联系	(497)
§ 10.3.1 积分上限函数	(497)
§ 10.3.2 微积分学基本定理	(498)

§ 10.3.3 牛顿-莱布尼兹公式	(502)
§ 10.4 定积分的换元法及分部积分法	(504)
§ 10.4.1 定积分的换元法	(505)
§ 10.4.2 定积分的分部积分法	(513)
§ 10.5 定积分的近似计算	(516)
§ 10.5.1 矩形法	(517)
§ 10.5.2 梯形法	(519)
§ 10.5.3 抛物线法——辛卜生法	(520)
§ 10.6 杂例讨论	(524)
习题	(528)

第十一章 定积分的应用

§ 11.1 平面图形的面积	(530)
§ 11.1.1 曲线由直角坐标方程给出的情形	(530)
§ 11.1.2 曲线由参数方程给出的情形	(538)
§ 11.1.3 曲线由极坐标方程给出的情形	(541)
§ 11.2 平面曲线的弧长	(548)
§ 11.2.1 曲线弧长的定义	(548)
§ 11.2.2 曲线的弧长公式	(548)
§ 11.3 体积	(555)
§ 11.3.1 已知平行截面的立体的体积	(555)
§ 11.3.2 旋转体的体积	(561)
§ 11.4 定积分在物理中的两个应用	(564)
§ 11.4.1 功	(565)
§ 11.4.2 液体的压力	(569)
§ 11.5 函数的平均值	(572)
§ 11.6 杂例讨论	(575)
习题	(578)
第一~十一章 习题答案	(580)

第一章 函 数

从本章到第五章是一元函数微积分的引论部分。

本章所述的函数是微积分的研究对象。考虑到中学里已经学过函数，因而这里只对其重点内容有针对性地加以阐述和补充。

§1.1 函 数 概 念

学习建议 本节内容十分重要，特别是确定函数的两个要素务必弄懂，否则学习以后的有关内容时就会发生困难。另外，读者对分段函数较生疏，所以也须引起重视。

§1.1.1 函 数

函数的定义

1 [正] 定义 设有两个变量 x 和 y ，变量 x 的变域为 D ，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照某一种对应规律 f ，都可以唯一地确定变量 y 的相应的值，我们就说变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \quad x \in D \quad (\text{读作 } x \text{ 属于 } D)$$

x 称为自变量， y 称为因变量，从 x 到 y 的对应规律 f 又称函数关系， D 叫做函数的定义域。

为了叙述方便，函数定义可简述为：

$$\text{每一 } x \in D \xrightarrow{f} \text{唯一 } y.$$

2 [例] ① 自由落体运动的规律是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 s 表示下降距离， t 表示时间， g 是重力加速度。根据函数的定义，下降距离 s 是时间 t 的函数。

② 球的体积 V 与半径 R 有关, 二者之间的关系是 $V = \underline{\hspace{2cm}}$.
 根据函数定义, 球体积 V 是球半径 R 的函数.

③ 式子 $y^2 = x$. 对 $(0, +\infty)$ 中的每一个 x 值, 是不是都有 y 值与它对应? 如果有, 有几个值与它对应? 这个式子中的 y 是不是 x 的函数?

【答案 ② $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. ③ 有; 有两个; 不是.】

3 [练] ① 下列式子中的 y 是不是 x 的函数?

$$y = \sqrt{-x}; \quad y = \sqrt{-x^2}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{-x^2}}.$$

② 式子 $y = 6$ 中不含 x , 我们可以这样认为: 不论 x 取什么实数, y 总等于 6, 因此此式中的 y 也可以看作 x 的 $\underline{\hspace{2cm}}$.

③ 式子 $x = 1$ 中不含 y , 可不可以认为 y 是 x 的函数?

④ 式子 $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ x^2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$

对 $(-\infty, +\infty)$ 中的每一个 x 值, 是不是都有唯一的 y 与之对应? y 是不是 x 的函数? 是一个函数还是两个函数?

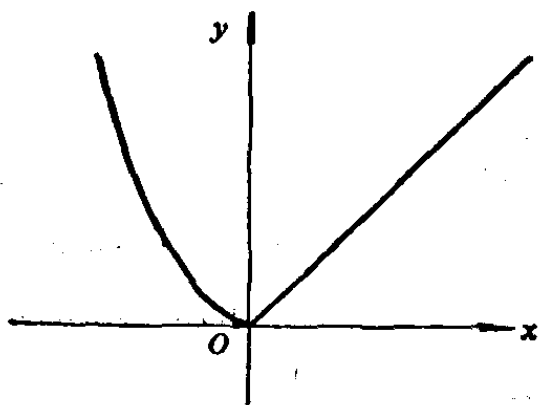


图 1-1-1

【答案 ① 因在 $(-\infty, 0]$ 中每个 x , 都有唯一的 y 与它对应, 所以是函数; 是; 不是. ② 函数. ③ 不可以, 因为对于 $x = 1$, 有无穷多个 y 与它对应. ④ 有; 是; 一个函数.】

4 [注] 第 3④ 题的函数是由两个数学式子表示的. 凡是在自变量不同的取值范围里, 用不同的数学式子来表示的函数叫分段函数. 试画出第 3④ 题分段函数的图象.

【答案 见图 1-1-1.】

函数值

5 [正] 定义 设函数 $y = f(x)$, 当自变量 x 取定义域中的某一定值 x_0 时, 因变量的相应值叫做当 $x = x_0$ 时的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 $f(x)|_{x=x_0}$.

