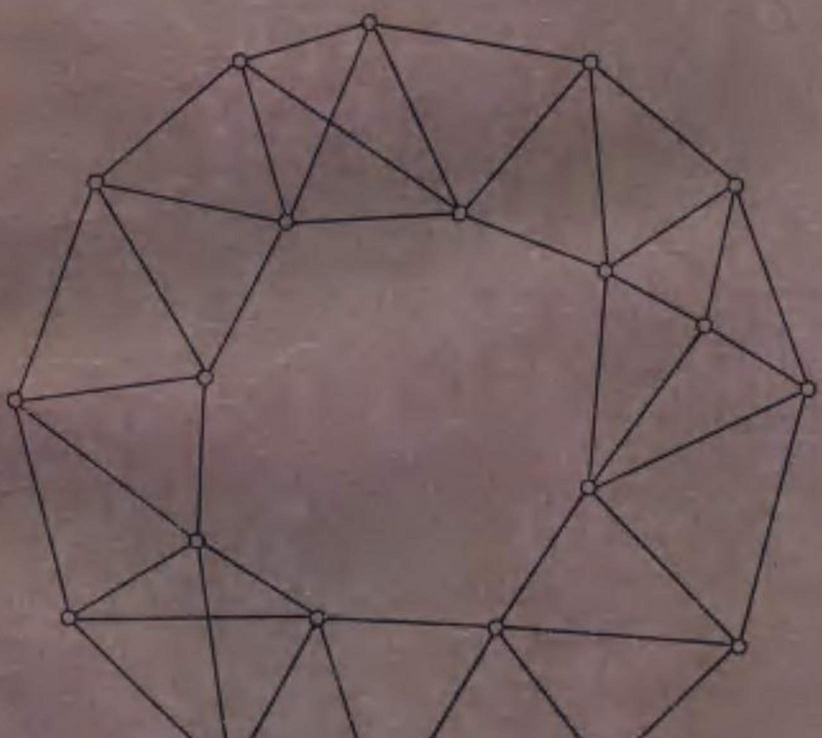
高等学校试用教材

控制网测量平差

吴俊昶 刘大杰 主编



测绘出版社

高等学校试用教材

控制网测量平差

吴俊昶
刘大杰 主编

测绘出版社

本书系统讨论了平面控制网（三角网、三边网、边角网、导线网）的各种经典平差方法，如条件平差、间接平差等，并对三角网、导线网的相关平差、秩亏自由网平差、逐次相关间接平差及设立尺度比未知数的平差等作了详细介绍。此外还简要介绍了各种高精度大地网的平差方法、大规模线性对称方程组的求解原理及空间误差椭球等，书末附有几个常用的平差程序。

本书可作为高等院校测量专业教材，亦可作为有关专业人员的学习参考书。

高等学校试用教材

控制网测量平差

吴俊昶　刘大杰主编

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16 · 印张 28.5 · 插页 1 · 字数 646 千字

1985 年 12 月第一版 · 1985 年 12 月第一次印刷

印数 1—3,900 册 · 定价 5.90 元

统一书号：15039 · 新 395

前　言

本书是於宗俦、鲁林成主编的《测量平差基础》的后续教材。

在《测量平差基础》一书中介绍各种平差方法的一般原理时，涉及了控制网平差的某些内容，但未对此作全面的讨论。本书将较系统、深入地讨论控制网平差问题，重点介绍平面控制网的平差，包括三角网平差、三边网平差、导线网平差、边角网平差和分区平差。

除了天文大地网平差是在参考椭球面上进行的以外，其余各种平面控制网的平差通常是在投影平面上进行的。本书第一章至第六章介绍的都是在投影平面上的平差方法。

为了反映近代平差理论在测量平差实践中的应用，本书编入了三角网相关平差、导线网相关平差及设立尺度比未知数的平差等内容；并在第七章中概要地介绍了高精度大地网的平差方法，包括天文大地网平差、卫星多普勒网平差、天文大地网与卫星多普勒网的联合平差、动态水准网平差和三维大地网平差等。此外，这一章还介绍了大规模对称线性方程组的求解及空间误差椭球。

由于电子计算机技术的发展，常规的测量平差算法也有了很大的发展。为此，本书介绍了几个电算程序。

为使理论和实践较好地结合起来，本书提供了丰富的实例。

在教学中，可以根据专业的需要对各章的内容作必要的删减和变动。有“*”号的可作为自学内容，有“**”号的作为参考资料或选修内容。各章之间的关系见目录后的示意图，供教学或自学时参考。

本书由吴俊昶和刘大杰同志主编，鲁林成和于正林同志参加了部分编写工作，我院测量平差教研组的全体同志参加了本书编写大纲的讨论，崔希璋教授担任本书的编写顾问。全书插图由冯秦珍同志描绘。

於宗俦教授和陶本藻副教授审阅了本书，并提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示谢意。

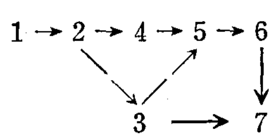
我们恳切希望读者对本书的错误或不足之处提出批评和建议，帮助我们改正。

编　者

1984 年 3 月

目　录

附：各章的关系



第一章　三角网条件平差

§ 1-1　概　　述

三角测量外业完成之后，所得观测数据需要进行内业计算处理。内业计算包括：三角测量概算，平差计算等工作。通过三角测量概算可以得到每个三角点上归算到标石中心的和在投影平面内的方向观测值，这些观测值就作为平差中的观测量（概算的详细内容在大地测量学中讨论）。除由概算求得的方向观测值之外，还要查出与平差该三角网有关的一些起算数据。如已知（固定的）边长、坐标方位角和坐标等，它们或者是由边长测量和天文测量推算而得，或者是属于高级控制网中已经平差的数据。

为了确定一个三角网的大小和位置所必需的数据，称为必要起算数据。一个三角网的必要起算数据有4个，即1条已知的边长，1条边的已知坐标方位角和1个点的纵横坐标（或者2个已知点的纵横坐标）。一个三角网只要有了这些必要的起算数据，那么该网的大小和位置就被确定下来了，也就是说，这个三角网既不能平行移动，也不能再旋转和伸缩了。以后在提到某三角网有4个起算数据时，如不特别说明，就是指具有4个必要的起算数据。

按起算数据的数目三角网通常分为以下两类：

1. 独立网　当三角网的起算数据等于或少于4个时，称该网为独立网或自由网，如图1-1中的三角网●，其中无起算数据或只有1～3个起算数据的三角网，也称为秩亏自由网，如图1-1中的（c）和（d）。

2. 非独立网　当三角网的起算数据多于4个时，称该网为非独立网或附合网，如图1-2中的三角网。

还有一种特殊的三角网（如图1-3），它包含有2个或2个以上的已知三角点，但这些已知点互不相邻。这种三角网与线形锁相似，所以称为线形三角网或简称为线形网。此外，还有一些其它类型的特殊三角网。

通过分析可以发现，任何三角网，无论其控制面积有多大，其本身的结构有多复杂，总是由三角形（图1-4(a)）、大地四边形（图1-4(b)）和中点多边形（图1-4(c)）等三种基本图形相互联接，或相互重叠构成的。例如图1-1(a)的三角网就是由1个中点五边形、1个中点六边形与1个大地四边形相互重叠，外加1个三角形构成的。

三角测量的水平角观测，一般采用方向法或全组合测角法。用这些方法所得的结果都可化为一组完全方向组。在进行三角网平差时，就以这些方向作为观测值，通过平差求出各个方向值的改正数，从而求出每一方向的平差值。另外也可以先将两两相邻的方向值相

● 在平面控制网图中，用“△”表示已知三角点，“○”表示待定点，双线表示已知边，带箭号的方向表示具有已知坐标方位角的方向，实线表示双向观测边，半实半虚线表示单向观测边。

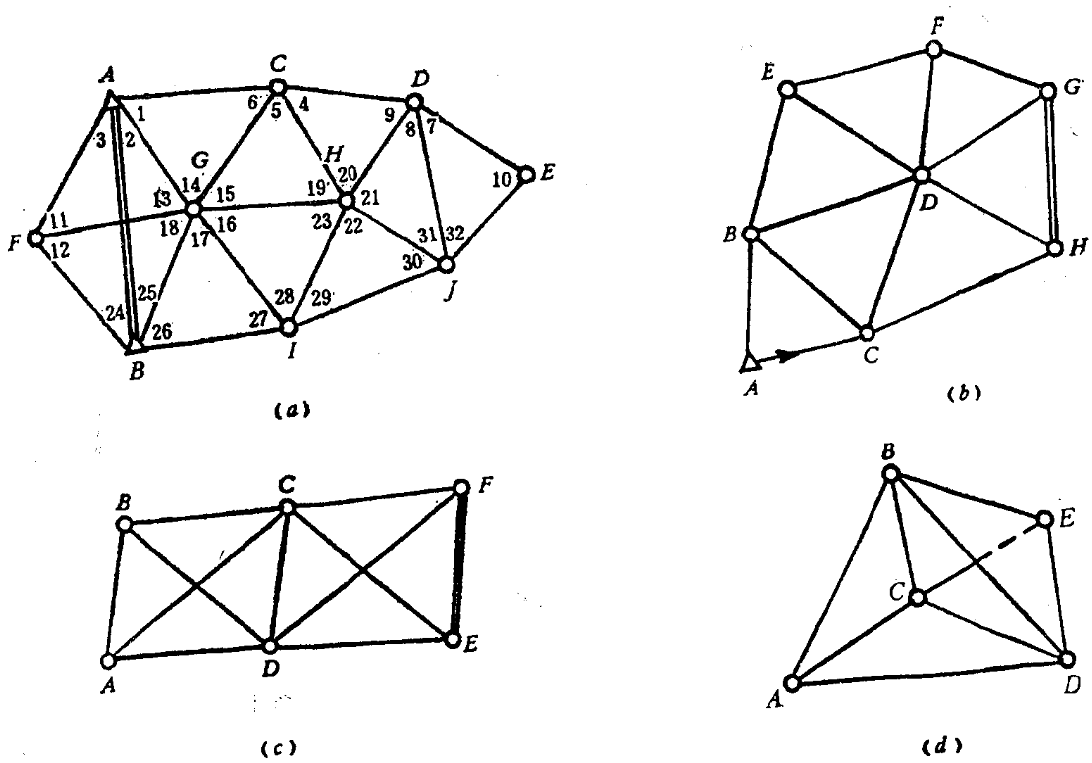

A B C D E F G H I J
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
(a)
A B C D E F G H
(b)
A B C D E F
(c)
A B C D E
(d)

图 1-1

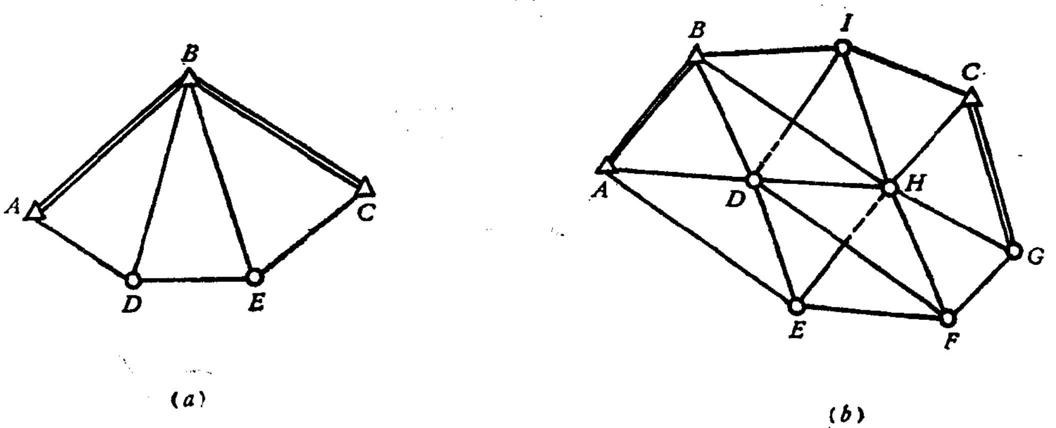

A B C D E
(a)
A B C D E F G H I
(b)

图 1-2

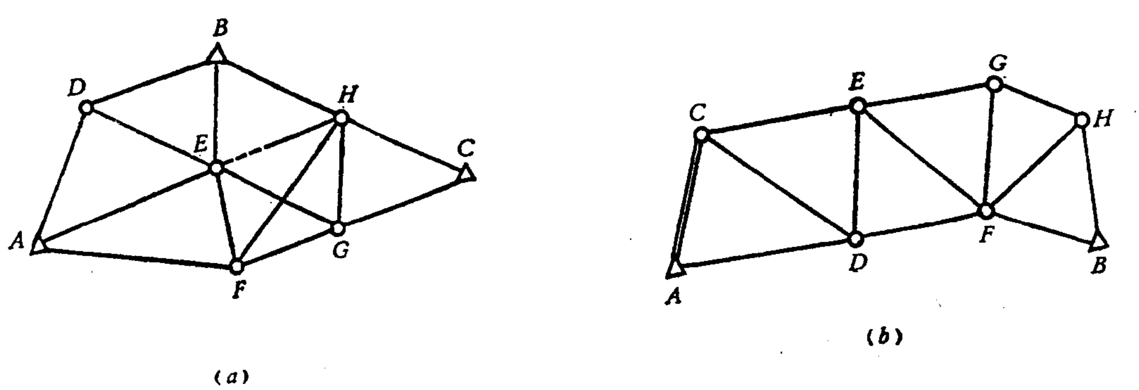

A B C D E F G H
(a)
A B C D E F G H
(b)

图 1-3

减以求出它们之间的夹角，并且就以这些角度作为观测值，通过平差求出各角度的改正数，从而求出每一角度的平差值。前者称为按方向平差，后者称为按角度平差。从理论上说，前者是完全严密的方法，后者是一种简化的方法，但按角度平差的计算工作要比按方向平差简便，而且通过实践证明，两种平差的结果虽有差别，但相差很小。因此，在实际作业中，往往是用角度来代替方向进行平差。特别对于三、四等三角网，在手算的情况下采用角度平差是较为合适和方便的。

§ 1-2　独立三角网的条件方程

独立三角网按条件平差时，首先需要确定条件式的个数，并正确地列立条件式。有关列立三角网基本图形条件式的概念，已在《测量平差基础》(后称《基础》)第四章中作了介绍。本节将进一步讨论独立网中条件方程的种类、个数和列立方法。

《基础》中已经介绍，对于3个观测角的三角形，应列1个图形条件。图1-4(a)中三角形 DEJ 的图形条件为

$$v_7+v_{10}+v_{32}+w=0, \tag{1-2-1}$$

式中，v_i 为观测角 L_i 的改正数，闭合差

$$w=L_7+L_{10}+L_{32}-180^\circ. \tag{1-2-2}$$

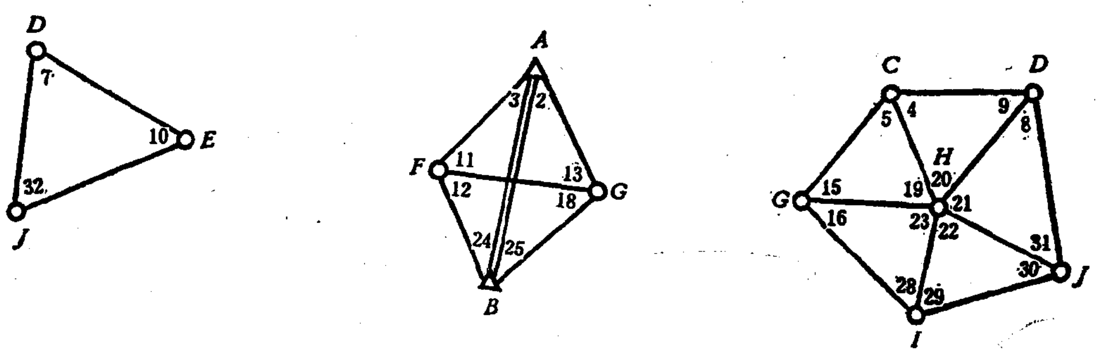


图 1-4

对于大地四边形来说，应列3个图形条件和1个极条件。在大地四边形 $AGBF$ (图1-4(b))中，可以组成4个三角形图形条件，1个四边形图形条件，2个扭四边形图形条件。但在这些图形条件中，只有3个图形条件是线性无关的。通常取3个三角形图形条件进行平差计算。例如，可以取如下的3个图形条件

$$\left.\begin{array}{lllll} v_2+v_3+v_{11} & +v_{13} & & +w_a=0 \\ v_2 & +v_{13}+v_{18} & +v_{25} & +w_b=0 \\ & v_{12}\quad +v_{18}+v_{24} & +v_{25} & +w_c=0 \end{array}\right\}. \tag{1-2-3}$$

有时，为使法方程具有易于解算的形式，而采用2个扭四边形图形条件和1个四边形图形条件，即

$$\left.\begin{array}{l} v_2 \qquad -v_{12}+v_{13} \qquad -v_{24} \qquad +w'_a=0 \\ \quad v_3+v_{11} \qquad -v_{18} \qquad -v_{25}+w'_b=0 \\ v_2+v_3+v_{11}+v_{12}+v_{13}+v_{18}+v_{24}+v_{25}+w'_c=0 \end{array}\right\}. \tag{1-2-4}$$

在大地四边形 $AGBF$ 中，可取 A，G，B，F 和对角线的交点为极列出 5 个极 条件，平差计算时，只须列出 1 个极条件。通常采用以对角线交点为极点的极条件，它的非线性形式为

$$\frac{\sin\widehat{L}_2\sin\widehat{L}_{11}\sin\widehat{L}_{18}\sin\widehat{L}_{24}}{\sin\widehat{L}_3\sin\widehat{L}_{12}\sin\widehat{L}_{13}\sin\widehat{L}_{25}}=1\ . \tag{1-2-5}$$

它的线性形式（真数形式）为

$$\begin{aligned} &\operatorname{ctg}L_2v_2+\operatorname{ctg}L_{11}v_{11}+\operatorname{ctg}L_{18}v_{18}+\operatorname{ctg}L_{24}v_{24}-\operatorname{ctg}L_3v_3 \\ &\quad -\operatorname{ctg}L_{12}v_{12}-\operatorname{ctg}L_{13}v_{13}-\operatorname{ctg}L_{25}v_{25}+w_d=0, \end{aligned} \tag{1-2-6}$$

式中

$$w_d=\rho''\left(1-\frac{\sin L_3\ \sin L_{12}\ \sin L_{13}\ \sin L_{25}}{\sin L_2\ \sin L_{11}\ \sin L_{18}\ \sin L_{24}}\right). \tag{1-2-7}$$

极条件（1-2-6）式也可以通过先对（1-2-5）式取自然对数，然后线性化得到，所以闭合差还可按下式计算

$$\begin{aligned} w_d=\rho''\{&\ln\sin L_2+\ln\sin L_{11}+\ln\sin L_{18}+\ln\sin L_{24}-\ln\sin L_3 \\ &-\ln\sin L_{12}-\ln\sin L_{13}-\ln\sin L_{25}\}. \end{aligned} \tag{1-2-8}$$

如果对（1-2-5）式取常用对数后展成线性形式，则为

$$\delta_2v_2+\delta_{11}v_{11}+\delta_{18}v_{18}+\delta_{24}v_{24}-\delta_3v_3-\delta_{12}v_{12}-\delta_{13}v_{13}-\delta_{25}v_{25}+w'_d=0, \tag{1-2-9}$$

式中

$$\begin{aligned} w'_d=&\lg\sin L_2+\lg\sin L_{11}+\lg\sin L_{18}+\lg\sin L_{24}-\lg\sin L_3 \\ &-\lg\sin L_{12}-\lg\sin L_{13}-\lg\sin L_{25}\ . \end{aligned} \tag{1-2-10}$$

对于中点 n 边形来说，应列 $n+2$ 个条件方程式，其中有 n 个三角形图形条件，1 个圆周条件（水平条件）和 1 个极条件。例如，对中点五边形 H-$CDJIG$（图 1-4(c)）来说，应列出下列 7 个条件方程

$$\left.\begin{array}{ll} v_4+v_9+v_{20} & +w_1=0 \\ v_8+v_{21}+v_{31} & +w_2=0 \\ v_{22}+v_{30}+v_{29} & +w_3=0 \\ v_{16}+v_{23}+v_{28} & +w_4=0 \\ v_5+v_{15}+v_{19} & +w_5=0 \\ v_{19}+v_{20}+v_{21}+v_{22}+v_{23} & +w_6=0 \\ \multicolumn{2}{l}{\operatorname{ctg}L_4v_4+\operatorname{ctg}L_8v_8+\operatorname{ctg}L_{30}v_{30}+\operatorname{ctg}L_{28}v_{28}+\operatorname{ctg}L_{15}v_{15}} \\ \multicolumn{2}{l}{-\operatorname{ctg}L_9v_9-\operatorname{ctg}L_{31}v_{31}-\operatorname{ctg}L_{29}v_{29}} \\ \multicolumn{2}{l}{-\operatorname{ctg}L_{16}v_{16}-\operatorname{ctg}L_5v_5+w_7=0} \end{array}\right\}, \tag{1-2-11}$$

其中，前五个是三角形图形条件，第六个是圆周条件，最后一个是极条件。圆周条件和极条件的闭合差分别为

$$\left.\begin{aligned} w_6 &= L_{19}+L_{20}+L_{21}+L_{22}+L_{23}-360^\circ \\ w_7 &= \rho''\left(1-\frac{\sin L_5 \sin L_9 \sin L_{16} \sin L_{29} \sin L_{31}}{\sin L_4 \sin L_8 \sin L_{15} \sin L_{28} \sin L_{30}}\right) \end{aligned}\right\} . \tag{1-2-12}$$

极条件的闭合差也可按下式计算

$$\begin{aligned} w_7 = \rho''(&\ln\sin L_4+\ln\sin L_8+\ln\sin L_{15}+\ln\sin L_{28}+\ln\sin L_{30} \\ &-\ln\sin L_5-\ln\sin L_9-\ln\sin L_{16}-\ln\sin L_{29}-\ln\sin L_{31}) . \end{aligned} \tag{1-2-13}$$

综合上述，由三角形、大地四边形和中点多边形等三种基本图形构成的独立三角网中，存在图形条件、圆周条件和极条件等三种条件。为了确定网中各种条件的个数，并列出足数而又线性无关的条件式，下面介绍用来确定网中条件式个数的点算法和公式法。

一、点算法

首先画出独立三角网略图。绘图时，凡遇大地四边形暂不绘出两条对角线中的一条对角线。例如，若暂不画出图 1-1(a)中大地四边形 $AGBF$ 的对角线 AB，则该三角网绘成图 1-5 的形状。由图可见，该三角网是由中点五边形 H-$DJIGC$ 与中点六边形 G-$CHIBFA$ 相重叠，外加三角形 DEJ 构成的。

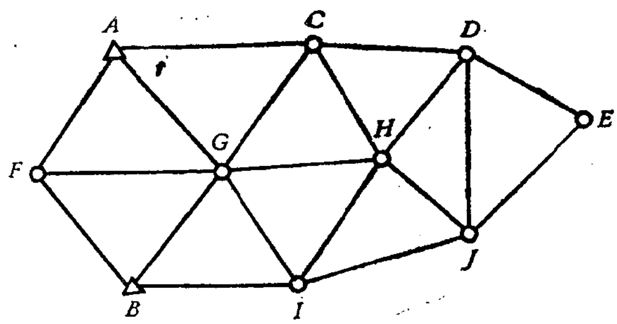


图 1-5

按前述可知，对于三角形 DEJ 来说，应列 1 个图形条件；对于中点五边形来说，应列 5 个图形条件，1 个圆周条件和 1 个极条件；对于中点六边形来说，应列 6 个图形条件，1 个圆周条件和 1 个极条件。必须指出，该网的中点五边形与中点六边形是互相重叠的，其中三角形 CHG 和 HIG 是重叠部分，在计算中点多边形的图形条件式个数时被重复计算了。因此，就图 1-5 的三角网来说，应列出 $1+5+6-2=10$ 个图形条件，2 个圆周条件和 2 个极条件，即全网应列 14 个条件方程。

简言之，当三角网中没有大地四边形时，图形条件式的个数为网中三角形的个数，圆周条件和极条件的个数各等于中点多边形的中心点的个数。

现在将 A、B 间的联线 AB 边加入，AB 边将三角形 AGF 和 GBF 连结成了大地四边形，因而比起两个单三角形 AGF 和 GBF 来说，就增加了 1 个图形条件和 1 个极条件。所以，对于图 1-1(a)的三角网来说，应列出 16 个条件方程，其中有 11 个图形条件，2 个圆周条件和 3 个极条件。

一般说来，每增添 1 条对角线而构成大地四边形时，增加了两个观测角，就应增加 1

个图形条件和 1 个极条件。

以上的讨论，是针对三角网中的角度全部观测了的情况的。有时三角网中某些点未曾设站观测，或者某些边只进行了单向观测，例如图 1-6 的三角网，其中H点未设站观测，AF 边只作单向观测。在这种情况下，按点算法确定三角网条件式个数时，可按如下顺序进行。

首先，画出三角网中的全部实线(图 1-7)。此时，应列出 7 个图形条件——6 个三角形图形条件和 1 个四边形图形条件，1 个圆周条件和 1 个中点五边形极条件。

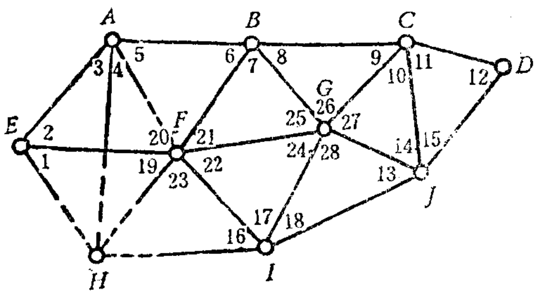


图 1-6

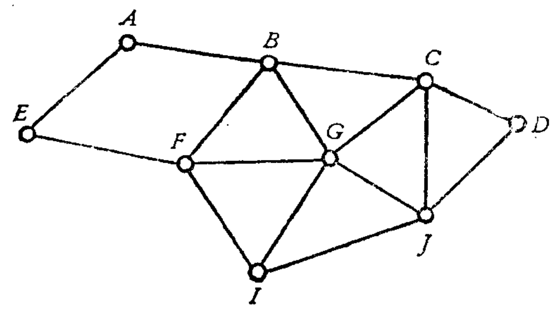


图 1-7

其次，补绘除了可以构成大地四边形以外的半虚半实的边(图 1-8)。这时，又构成 1 个中点六边形，所以将增加 1 个圆周条件和 1 个极条件，但不会增加图形条件。

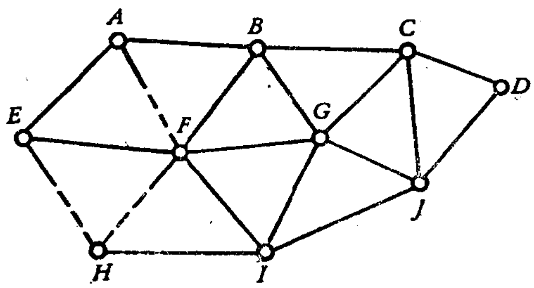


图 1-8

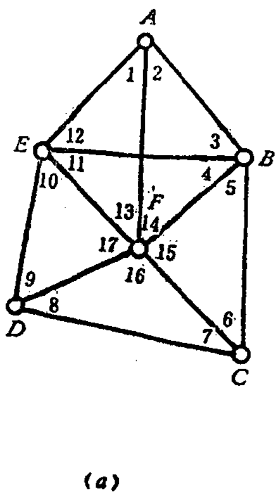
最后，绘出构成大地四边形的半虚半实的 AH 边(图 1-6)。此时，仍不增加图形条件，而只增加 1 个极条件。

综上所述可知，对图 1-6 中的三角网应列立 7 个图形条件，2 个圆周条件和 3 个极条件，即共应列 12 个条件方程。

例[1-1] 试按点算法确定下列两个三角网（图 1-9）中条件式的总数和各类条件式的个数。

解：图 1-9(a)是由 1 个大地四边形和 1 个中点多边形重叠而成的独立网。如抽去大地四边形的对角线 BE，就剩下 1 个中点五边形。因此，应列 5 个图形条件，1 个圆周条件和 1 个极条件。加入大地四边形的对角线 BE 后，则应增加 1 个图形条件和 1 个极条件。所以，图 1-9(a)的三角网应有 6 个图形条件，1 个圆周条件和 2 个极条件，总共应列 9 个条件。

图 1-9(b)中的三角网是由 2 个大地四边形和 2 个中点多边形重叠而成。先抽去大地四边形对角线 BG 和 DE，则该网就是由 2 个中点多边形相互重叠而成的图形。考虑到 HI 边是单向观测的边，所以，三角形 FIH 的图形条件就不存在，故有 8 个图形条件，2 个圆周条件和 2 个极条件。然后，加入对角线 DE，则增加 1 个图形条件和 1 个极条



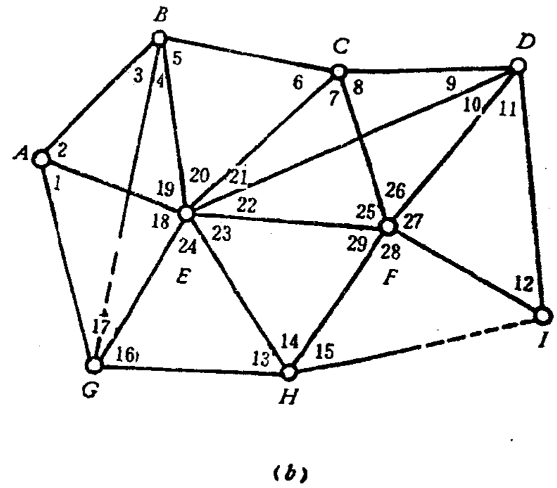


图 1-9

件。再加入对角线 BG，因 BG 是单向观测的边，所以只增加 1 个极条件。于是图 1-9(b)中的三角网，共有图形条件 9 个，圆周条件 2 个和极条件 4 个，总共应列 15 个条件方程。

二、公式法

独立三角网中，使用公式法确定条件方程个数时，采用以下符号：

p 为三角点总数；

p' 为未设站的三角点个数；

l 为边的总数；

l' 为半虚半实边的个数；

n 为观测角的总数。

1. 条件总数

前已介绍，条件式的总数等于多余观测的个数。为此，首先要确定网中必要观测的个数。如果在三角网中以某边为起算边，将该边的两端点作为已知点，此后，每确定 1 个新点需要观测 2 个角度。因此，当网内有 p 个三角点时，除去起算边的两个端点外，要确定（$p-2$）个新点，必需观测 $2(p-2)$ 个角度。现全网共观测了 n 个角度，所以多余观测数，即条件式总数

$$r_{独}=n-2(p-2)=n-2p+4 . \tag{1-2-14}$$

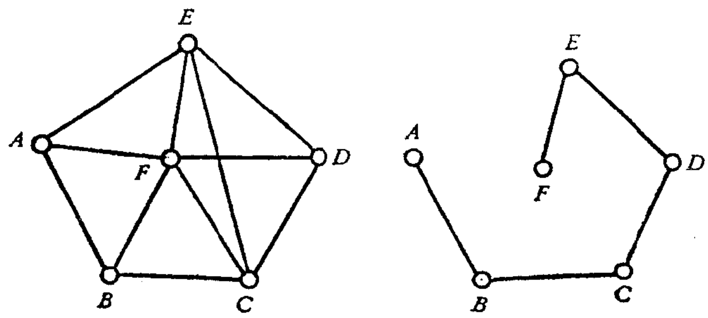
例如，图 1-1(a)中的三角网，$n=32$，$p=10$，所以共应列条件 $r_{独}=32-2\times10+4=16$ 个。

又如，图 1-9(b)中的三角网，$n=29$，$p=9$，所以共应列条件 $r_{独}=29-2\times9+4=15$ 个。

2. 图形条件的个数

图形条件只有在完全由实线（对向观测的边）连接的图形中才能产生，即含有未设测站的点和单向观测边的多边形都不会产生图形条件。

当 $p-p'$ 个测站用 $(p-p')-1$ 条实线连接时，例如将6个测站点（图1-10(a)）用五条实线联接（图1-10(b)）起来，此时，因为没有构成封闭的几何图形，故不产生图形条件。若再增加一条实线，就将产生一个图形条件。当网内有 $l-l'$ 条实线时，图形条件的个数



(a) (b)

图 1-10

$$r_{图}=(l-l')-(p-p')+1. \tag{1-2-15}$$

当三角网中的每条边都是对向观测边（实线）时，得

$$r_{图}=l-p+1. \tag{1-2-16}$$

例如，对于图1-1(a)中的三角网来说，$l=20$，$p=10$，$l'=p'=0$，故有图形条件 $r_{图}=20-10+1=11$ 个。又如，对于图1-9(b)中的三角网来说，$l=19$，$l'=2$，$p=9$，$p'=0$，故有图形条件 $r_{图}=(19-2)-(9-0)+1=9$ 个。

3. 圆周条件的个数

一个测站上如果有 s 个方向，当观测了（$s-1$）个角度时，不存在圆周条件。只有在中点多边形的中心点上，在 s 个方向之间观测了 s 个角度时，才会产生圆周条件。如果在三角网中，每个设测站的三角点上，所测的角度数都较该点实线方向的数目少1，则该网中没有圆周条件。设全网中有（$p-p'$）个测站，所有测站上观测了的方向，即实线方向数目为 $2l-l'$（每条对向观测的边有两个实线方向，单向观测的边有1个实线方向），如果只观测了 $(2l-l')-(p-p')$ 个角，则网中不存在圆周条件，现在共观测了 n 个角度，所以圆周条件的个数

$$r_{圆}=n-(2l-l')+(p-p'). \tag{1-2-17}$$

例如，对于图1-1(a)中的三角网来说，圆周条件的个数 $r_{圆}=n-(2l-l')+(p-p')=32-(2\times20-0)+(10-0)=2$ 个。而图1-9(b)中的三角网圆周条件的个数 $r_{圆}=n-$

$(2l-l')+(p-p')=29-(2\times19-2)+(9-0)=2$ 个。

4. 极条件的个数

极条件的作用是使经过不同三角形（推算路线）推算的同一条边长具有相同的长度。因此，当三角网中的三角点仅由一些边连成单三角锁时，就不会产生极条件。因此，连接网中前面 3 个三角点需要 3 条边(图1-11)，这些边可以是实线(对向观测)，也可以是半虚半实的线(单向观测)。此后，每增加 1 个三角点，需由 2 条边交会，这样就构成 1 条由若干个三角形邻接而成的单三角锁。由此可知，网中必要的（不产生极条件的）边数为 $3+2(p-3)=2p-3$。此后，每增加 1 条边(实线或半虚半实的线)，就会对网中某边形成 1 条不同的推算路线，这就产生了 1 个极条件。若三角网中的总边数为 l，则极条件的个数

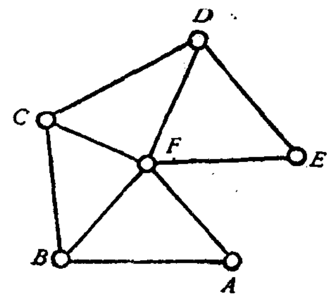


图 1-11

$$r_{极}=l-2p+3. \qquad (1\text{-}2\text{-}18)$$

例如，对于图 1-1(a)中的三角网来说，应列出的极条件个数 $r_{极}=20-2\times10+3=3$ 个。而图 1-9(b)的三角网中，极条件个数 $r_{极}=19-2\times9+3=4$ 个。

作为检核，将 $r_{图}$((1-2-15)式)、$r_{圆}$((1-2-17)式)和 $r_{极}$((1-2-18)式)求和，和数应等于独立网条件式总数 $r_{独}$((1-2-14)式)，即

$$r_{图}=(l-l')-(p-p')+1,$$
$$r_{圆}=n-(2l-l')+(p-p'),$$
$$+)\ r_{极}=l-2p+3,$$
$$\overline{\qquad r_{独}=n-2p+4.\qquad}$$

例[1-2] 按公式法计算图 1-6 中三角网的条件式总数和各类条件式的个数。

解：对于图 1-6 中的三角网，$n=28$，$p=10$，$p'=1$，$l=20$，$l'=5$，则网中应列出的条件个数为

$$r_{独}=n-2p+4=28-20+4=12,$$
$$r_{图}=(l-l')-(p-p')+1=(20-5)-(10-1)+1=7,$$
$$r_{圆}=n-(2l-l')+(p-p')=28-(40-5)+(10-1)=2,$$
$$r_{极}=l-2p+3=20-20+3=3.$$

表 1-1

角号	L °	′	″	角号	L °	′	″
1	106	50	40.3	5	33	40	57.1
2	42	16	38.6	6	28	26	12.5
3	30	52	46.4	7	23	45	11.9
4	125	20	36.8	8	127	48	40.7

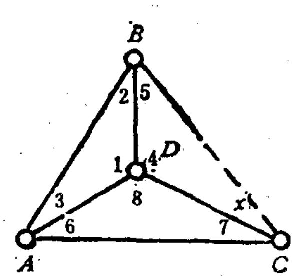


图 1-12

例[1-3] 已知图 1-12 中的观测角值如表 1-1，试 列出该三角网的条件式。

解： 按条件式个数的计算公式可知，该三角网共有 4 个条件方程，其中有 2 个图形条件，1 个圆周条件和 1 个极条件。

2 个图形条件和 1 个圆周条件为

$$v_1+v_2+v_3+5.3=0,$$

$$v_6+v_7+v_8+5.1=0,$$

$$v_1+v_4+v_8-2.2=0.$$

网中的 CB 方向未曾观测，但列极条件时要用到未经观测的角度 x，极条件为

$$\frac{\sin\hat{L}_8\cdot\sin\hat{L}_2\cdot\sin\hat{x}}{\sin\hat{L}_7\cdot\sin\hat{L}_3\cdot\sin\hat{L}_5}=1,$$

此时，应将该角按平差图形化为观测角的函数。由图 1-12 得 $\hat{x}=180°-\hat{L}_4-\hat{L}_5$，而 $\sin\hat{x}=\sin(180°-\hat{L}_4-\hat{L}_5)=\sin(\hat{L}_4+\hat{L}_5)$。极条件方程写成线性形式为

$$\operatorname{ctg}L_2v_2+\operatorname{ctg}(L_4+L_5)(v_4+v_5)+\operatorname{ctg}L_8v_8$$
$$-\operatorname{ctg}L_3v_3-\operatorname{ctg}L_5v_5-\operatorname{ctg}L_7v_7+w_s=0,$$

式中

$$w_s=\rho''\left(1-\frac{\sin L_7\cdot\sin L_3\cdot\sin L_5}{\sin L_8\cdot\sin L_2\cdot\sin(L_4+L_5)}\right).$$

以观测值代入后得

$$+1.0999v_2-1.6722v_3-2.6086v_4-4.1091v_5+1.8466v_6-2.2723v_7+23.8379=0.$$

§ 1-3　附合三角网的附合条件方程

前已介绍，一个三角网中应有 4 个必要的起算数据，即 1 个起算点的纵横坐标，1 个起算坐标方位角和 1 条起算边长，或 2 个起算点的纵横坐标。如果三角网中的起算数据多于上述的 4 个数据，则平差时除了列立独立网的条件式以外，还应列出一些由于有多余起算数据而产生的条件方程式。这些条件式的作用是，将所敷设的加密网强制附合在全部起算数据上，故称为附合条件。

三角网中由多余起算数据形成的附合条件有三种。当有多余起算边时，可以从任一已知边长推算到另一已知边长；当有多余起算坐标方位角时，可以从任一已知坐标方位角推算到另一边的已知坐标方位角；当有多余起算点时，可以从任意两已知点的坐标推算到另一已知点的坐标。为将加密网强制附合在起算数据上，这些位于推算路线末端的起算边、起算坐标方位角、起算点坐标的推算值（利用平差值 $\hat{L}$ 推算）应与已知值相等，这就是上面提及的三种附合条件。这些附合条件依次称为边长（固定边或基线）条件，坐标方位角条件（固定角条件）和（纵、横）坐标条件。下面介绍这些条件式的列法。

一、边长条件——固定边或基线条件

在图 1-13 的三角网中，A，B，E，F 为已知三角点，显然，网中 AB 边和 EF 边都是已知边长。为将此单三角锁强制附合在 4 个已知点上，就长度而言，平差时应顾及从已知边长 AB 通过网中平差角推算另一已知边长 EF，使 EF 边的推算值等于其已知值的边长条件，此边长条件常称为基线条件。为了使基线条件的列立具有一定的规律，习惯上以 b_i 表示第 i 个三角形中与已知边长相对的传距角，a_i 表示与所求边长相对的求距角，而 c_i 表示与间隔边相对的间隔角。将各个三角形中的间隔角顶点用虚线连起来，就成为从 AB 边推算 EF 边的"推算路线"。这样，图 1-13 中三角网的基线条件写为

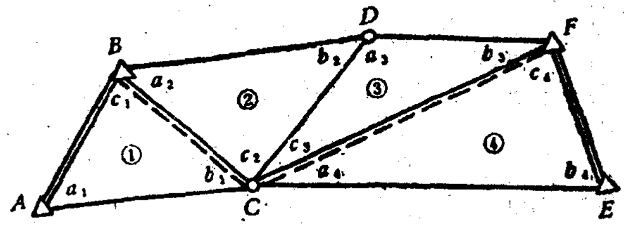


图 1-13

$$EF = AB\frac{\sin\widehat{a}_1\cdot\sin\widehat{a}_2\cdot\sin\widehat{a}_3\cdot\sin\widehat{a}_4}{\sin\widehat{b}_1\cdot\sin\widehat{b}_2\cdot\sin\widehat{b}_3\cdot\sin\widehat{b}_4}, \tag{1-3-1}$$

条件式的线性形式为

$$\operatorname{ctg} a_1 v_{a_1} + \operatorname{ctg} a_2 v_{a_2} + \operatorname{ctg} a_3 v_{a_3} + \operatorname{ctg} a_4 v_{a_4} - \operatorname{ctg} b_1 v_{b_1} - \operatorname{ctg} b_2 v_{b_2} - \operatorname{ctg} b_3 v_{b_3} - \operatorname{ctg} b_4 v_{b_4} + w_s = 0, \tag{1-3-2}$$

式中

$$w_s = \rho''\left(1 - \frac{EF\cdot\sin b_1\cdot\sin b_2\cdot\sin b_3\cdot\sin b_4}{AB\cdot\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\sin a_3\cdot\sin a_4}\right) = \rho''\left(1 - \frac{EF}{EF'}\right). \tag{1-3-3}$$

(1-3-3) 式中，EF' 为由观测值推算得的边长。

若基线条件取常用对数后，按台劳公式展成线性形式，则为

$$\delta a_1 v_{a_1} + \delta a_2 v_{a_2} + \delta a_3 v_{a_3} + \delta a_4 v_{a_4} - \delta b_1 v_{b_1} - \delta b_2 v_{b_2} - \delta b_3 v_{b_3} - \delta b_4 v_{b_4} + w'_s = 0, \tag{1-3-4}$$

式中

$$w'_s = \lg\sin a_1 + \lg\sin a_2 + \lg\sin a_3 + \lg\sin a_4 - \lg\sin b_1 - \lg\sin b_2 - \lg\sin b_3 - \lg\sin b_4 + \lg AB - \lg EF. \tag{1-3-5}$$

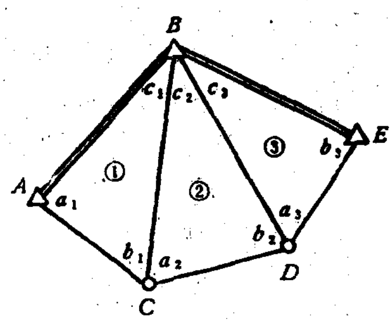


图 1-14

(1-3-2) 式及 (1-3-4) 式分别为基线条件的真数及对数形式。

当三角网中两条已知边 AB 和 BE（图 1-14）连接在一起构成一已知点组时，从已知边 AB 推算到另一已知边 BE 的边长条件，称为固定边条件。固定边条件的最后形式与 (1-3-2) 或 (1-3-4) 式相同。