〔美〕H.J.威佛 著 王中德 张辉 译

离散和连续傅里叶分析理论

北京邮电学院出版社

离散和连续傅里叶分析理论

〔美〕H.J.威佛 著

王中德
张 辉 译

北京邮电学院出版社

内 容 简 介

本书是一本为非数学专业的理工科学生和工程技术人员讲授傅里叶分析的专门教材。内容包括傅里叶级数、傅里叶变换，以及离散傅里叶变换。此外，用三章（第二、三、四章）篇幅介绍了必要的数学预备知识；最后还详细讨论了采样理论。

对于那些在科研或技术工作中要经常用到傅里叶分析方法的科研工作者或工程技术人员，本书是一本较好的参考书。本书亦可作为理工科院校高年级学生、研究生及教师的参考书。

离散和连续傅里叶分析理论

〔美〕H.J.威佛 著

王中德 张辉 译

责任编辑 阮平生

*

北京邮电学院出版社出版

100088 海淀区学院路42号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 印张11.25 字数291千字

1991年4月第一版 1991年4月第一次印刷

印数：1-2000 册

ISBN 7-5635-0052-9/O·4 定价：3.50元

译 者 序

傅里叶分析是近代数学各种分支中应用得最广泛的一个分支。自从六十年代中期快速傅里叶变换算法被发现以来，傅里叶分析的应用领域愈益扩大。到今天，几乎一切现代科学技术领域都要用到傅里叶分析法。

傅里叶分析包括傅里叶级数，傅里叶变换，离散傅里叶变换及其快速算法、即快速傅里叶变换。尽管傅里叶分析法已获得极其广泛的应用，然而，将傅里叶分析的各个方面均加以系统介绍的教材尚不多见。威佛的这本教材，正好填补了这方面的不足。

在这本书中，作者把傅里叶级数，傅里叶变换与离散傅里叶变换之间的相似特性作了详尽的介绍，并用类比手法来加深读者的印象。本书注重概念的介绍以及定理或公式的使用条件，并用大量例题帮助读者掌握概念。同时，本书也注意了论述的严谨性。

本书的主要对象是工程技术人员。本书可作为理工科高年级的教学参考书。由于本书各章均有大量例题和习题，对于那些希望进一步提高傅里叶分析能力的工程技术人员和科研人员，本书是一本较好的参考书。

在翻译过程中，我们对原文中明显误印或漏印的地方，已作了改正，但未加注释。

本书第二、三、四章由王中德译，其余各章由张辉译，全书由王中德定稿。

由于我们经验不足，水平有限，翻译中的错误与不妥之处在所难免，敬请广大读者予以批评、指正。

译 者

1990年5月

原　序

本书中所用的离散和连续傅里叶分析这个词，意在把三个相互区别又明显相似的领域结合在一起。这三个领域就是傅里叶级数、傅里叶变换和离散傅里叶变换。这些题目很少合在一起作为单独一门课程。多数情况下，学生是在一门较广泛的课程中将它们作为子题目加以学习。例如，傅里叶级数通常是在一门中等程度的微积分学中用一节来加以介绍。这本教材的主要目的之一，就是把三个领域的内容统一介绍。这样，学生就很容易理解它们之间的相似性质，并有可能从其它两个领域的知识中加深对某一领域的洞察。

为了使这本教材能自成体系，书中收入了数学基础与积分理论两章，以及介绍广义函数的一章，已经熟悉这些内容的读者，可以跳过这几章，直接阅读那些专门讨论傅里叶分析的章节。

这本书是Wiley出版社出版我的第二本讨论傅里叶分析的书，第一本名为《离散和连续傅里叶分析的应用》，是一本把傅里叶分析应用于科学和技术的广泛领域中的参考书。为使读者能够运用傅里叶分析去完成复杂而有效的运算，书中仅介绍了最基础的理论，而没有提供更多、更深入的傅里叶分析理论。本书提供较多的傅里叶分析的理论，因而本书既可作为参考书，亦可作为教科书。作为参考书，为使读者能对傅里叶变换与傅里叶级数的性质与性能有更深入的理解，本书可作为第一本书的补充。作为一本教科书，本书为傅里叶分析提供一种相当全面且易于理解的处理方法。作为傅里叶分析一个学期的课程，这本书的材料是足够的。

尽管这本书是傅里叶分析的理论教材，但为了便于阐明理论的运用，书中加进了大量的示例。此外，每章均附有习题，读者

可以通过这些习题检验自己对书中所讲内容的理解程度。同时，这些习题也是对该章内容的一种补充。

本书各章内容概述如下：

第一章　绪论　本章对傅里叶级数和傅里叶变换两部分作了介绍，并举出了一些例子来说明对傅里叶分析进行理论研究的动机和意义。

第二章　数学基础　本章对数学分析中的一些基本概念进行了回顾。内容包括：函数、序列、度量空间、极限、连续、收敛等。这些概念对理解傅里叶分析很有帮助。这一章只是为使本书完备而加入的。对于已经熟悉这些内容的读者，可以跳过这一章。

第三章　积分理论　积分这一概念在傅里叶级数和傅里叶变换两方面均起着极其重要的作用。这两方面均要求从勒贝格意义上来看待积分表达式。本章介绍的内容包括：阶梯函数、勒贝格测度、可积函数、平方可和函数、可积函数的级数等等。这一章也是为使本书完备而加进的，对于那些在此领域已有了解的读者，可以跳过这一章。

第四章　广义函数理论　有许多有用的函数，如像δ函数和梳状函数，无法用标准的数学分析来加以描述。本章用函数的内积作引导来介绍广义函数的概念，提供了一种处理非标准化函数的方便和简洁的方法。从而，广义函数可定义成一种把特定的函数集合变成复数集合的映射。

第五章　傅里叶级数　这一章开始正式论述傅里叶分析，并讨论周期函数的傅里叶级数，此处假定这些周期函数是平方可和以及或者是勒贝格可积的。本章重点放在用三角正交函数系的傅里叶级数来表示函数。然而，本章将对一般的正交函数系及其性质进行广泛的讨论。这一章介绍狄利克莱核函数，并用它来讨论傅里叶级数的收敛性以及吉布斯现象。又介绍了一些非常有用的定理，这些定理可以用来对级数的系数进行实际计算。这一

章中含有大量的例题，目的在于演示本章所述的许多理论概念。

第六章 傅里叶变换 本章介绍某类函数的傅里叶变换，这类函数叫做绝对可积函数。首先讨论其存在性，接着考虑这类函数的变换的某些独特的性能和特征，并介绍了几个对计算和运算特别有用的定理。讨论了函数的卷积和相关以及很有用的卷积定理。与前一章相似，本章也用大量已经解决的例题来演示理论概念。

第七章 广义函数的傅里叶变换 本章用广义函数理论来阐述傅里叶变换。这种方式使我们能对比前一章所讨论的那些函数更广泛得多的一类函数（广义函数）的变换进行计算。前一章对绝对可积函数表明的那些有用的定理中的大多数，几乎对任何一种似是而非的函数也都成立。如果用广义函数理论来重新考查卷积，就能得到对卷积的新的认识。这一章也在傅里叶变换与傅里叶级数之间建立起一种简单而明了的关系。理论概念再一次通过示例得以明确。

第八章 离散傅里叶变换 本章讨论离散傅里叶变换。它是两个N阶序列之间的一种映射。傅里叶变换与离散傅里叶变换之间的惊人相似将由几个特性定理加以揭示。有关周期性要求以及离散傅里叶变换方面一些常见的错误概念将在这一章中澄清。序列的卷积以及序列的卷积定理均在本章介绍，最后以对快速傅里叶变换算法的简述作为本章的结尾。

第九章 采样理论 也许离散傅里叶变换最有用的地方就是可以用它来精确地逼近任一函数或波形的傅里叶变换（及傅里叶级数）。它是这样来实现的，首先，通过采样把函数转换成序列，然后由采样序列的离散傅里叶变换来恢复函数的傅里叶变换。本章把采样当作是原始函数与梳状函数的乘积。当把这种观点用到频域后，不但获得对采样理论深入得多的理解，而且是对著名的韦塔克—仙农采样定理的一种简明证明。有关混叠效应和窗效应这些问题将既在时域中也在频域中加以阐述。这一章的理

论讨论最终归纳为利用采样定理和离散傅里叶变换来得到函数的傅里叶变换的六个步骤的程序。这六个步骤已经用FORTRAN子程序实现，并附在本书附录中。

(谢辞略)

H.约塞夫·威佛

1988年9月于加利福尼亚

目　　录

第三章　积分理论

第四章　广义函数理论

第五章　傅里叶级数

第一章 绪 论

很难想象任何其它数学分支能象傅里叶分析这样有如此之多的实际应用。多年来，傅里叶分析的数学知识（傅里叶级数和傅里叶变换）被用来对科学和工程技术的广泛领域中的物理现象进行研究。一些随手可得的例子有热传导、波的传播、电路分析、振动、控制系统分析、光学系统和电子电路分析等。有趣的是，傅里叶分析有如此广泛的应用的原因之一是傅里叶核exp$[2\pi iwt]$为一n阶线性微分方程的解，而该方程是用来描述上述各种物理现象的数学模型。

除了是一个非常有用的数学应用的分支外，傅里叶分析还对大多数现代数学理论的发展起了推动作用。这主要因为大部分早期工作是以其使用者的直觉和聪明才智为基础进行的。例如，伯努利在研究绳子的振动时，论证出在区间$[0, \pi]$上无限个正弦函数的线性组合能够表示一个连续函数。当时的纯粹数学家嘲笑这一观点，不愿接受这一结论。然而，当数学的预言开始与物理现实相适应时，数学理论不得不作修改和改进，以解释其一致性。

实际上，许多早期的傅里叶分析的“机械”运算推进了这一学科理论的发展。致力于应用的使用者们对应用数学来解决实际问题感兴趣，他们并不关心为什么和何时傅里叶级数收敛到生成函数这样的理论问题。尽管他们使用积分技术确实得出了他们的答案，他们并未详细研究他们正在计算的积分的存在依据。这是纯粹数学家的任务。

随着这一领域研究工作的进展以及其应用范围的扩大，人们提出了一些有用的，但性能欠佳的函数，如δ函数和梳状函数。

这些函数特别适用于描述象点电荷、点负载、脉冲激励等现象，这些函数不能用标准的数学函数理论来描述，因此广义函数理论得以发展。

纵观其200多年的历史，傅里叶分析持续不断地在发展。在数字计算机出现之前，傅里叶变换（和级数）是用解析的方法计算的。数字计算机与离散傅里叶变换（DFT）相配合，使得计算任何一个“性能相当良好的”函数的傅里叶变换和傅里叶级数成为可能。遗憾的是DFT需要大量的数学运算（复数加法和乘法），因而并不真正实用。60年代中期，“快速傅里叶变换”（FFT）提出后，局面开始改变。FFT实际并不是一种变换，但确是一种非常有效的计算序列的DFT的算法，FFT显著地减少了计算序列的DFT所需的数学运算量。70年代中期，出现了更小、更快、更价廉的微计算机，与高效率的FFT算法结合在一起，重新唤起人们使用傅里叶分析的兴趣。使用数字计算机计算并更精确地逼近一个函数的傅里叶变换，人们不再停留在只研究那些其解析表达式能够进行积分运算的函数。事实上，使用数字计算机时，函数甚至不必用数学表达式来描绘。当用一电子设备去监测一个特殊的物理实验时所产生的频率特性，就是这种情况。例如，用加速度计研究结构的振动特性时，得到的就是这种信号。

由于数字计算机能为人们提供几乎一切物理可实现函数的傅里叶变换，人们可能会得出这样的结论，认为没有必要考虑傅里叶分析的解析特性和理论情况。实际上，正确的答案恰恰与之相反。由于编程计算一个采样函数的变换时，数字计算机几乎总是给出答案。因此，必须对傅里叶分析有一个完整的认识，才能判断答案是否正确与合理。换言之，FFT可以当作一个产生傅里叶变换和傅里叶级数的“黑盒子”。然而，为了避免将结果误用，使用者应该对傅里叶变换的基础理论和特性有适当的理解。

本书将介绍一些与傅里叶级数和傅里叶变换有关的数学理

论。讲述的方式以有助于傅里叶分析的使用者更深入地了解在完成各种计算和操作时，必须考虑的限制条件为其目的。本书将限制在三角傅里叶分析的范围。具体地说，我们将讨论傅里叶级数，傅里叶变换和离散傅里叶变换，所有这三种情况，都可以看作是傅里叶映射。本章后面的几节，是为傅里叶分析的更加理论化方面的研究给予必要的启发。

傅里叶级数

以矩形形式定义的周期函数（周期为T）的傅里叶级数为

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)+B_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right] \tag{1.1}$$

其中傅里叶级数的系数A_k和B_k由下式给出。

$$A_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{d}t \quad k=1,2,\cdots,\infty \tag{1.2}$$

$$A_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$B_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{d}t \quad k=1,2,\cdots,\infty \tag{1.3}$$

$$B_0=0$$

函数的傅里叶级数表达式也可采用指数形式，这样可简化数学运算。这种形式更接近函数的傅里叶变换表达式。第五章将对此加以详细讨论。

现在计算几种不同函数的傅里叶级数，具体说明可能遇到的数学运算，以及可能产生的一些问题和难点。

第一个函数是图1.1所示的三角锯齿函数，它在区间[－1，1]的数学描述为

$$f(t)=\begin{cases}1+t, & t\in[-1,0)\\ 1, & t=0\\ 1-t, & t\in(0,1]\end{cases}$$

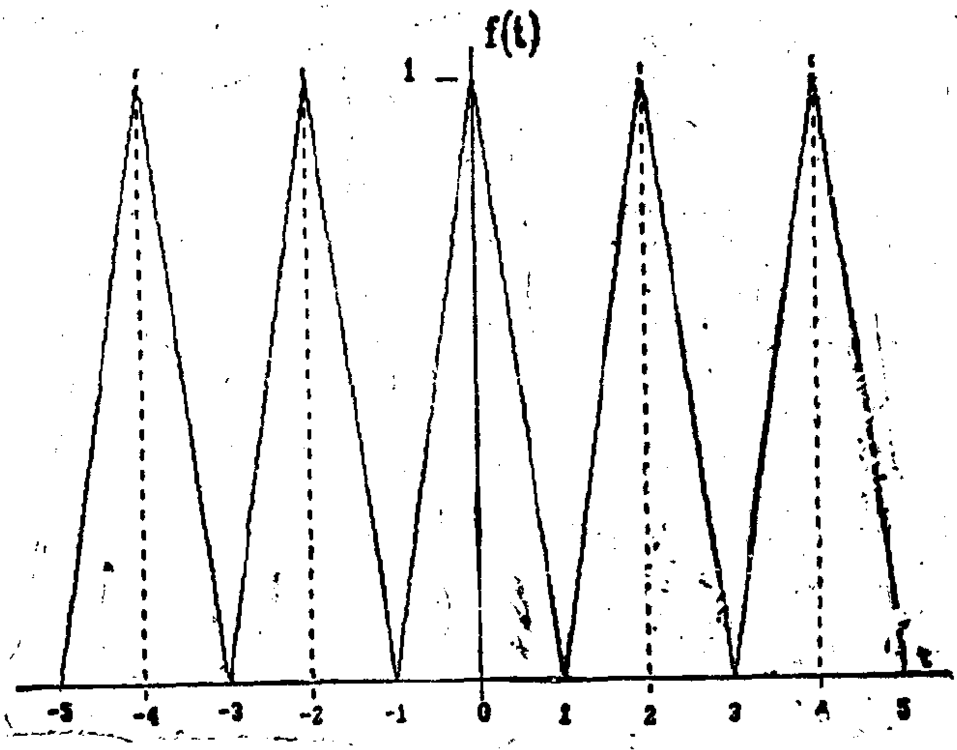

图1.1　锯齿函数

图1.1中已假设将此函数在－1到1区间外作周期扩展。选择这种区间，周期宽度显然为$T=2$。首先应用式(1.2)得

$$A_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{0}(1+t)\cos(\pi kt)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}(1-t)\cos(\pi kt)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2-2\cos(\pi k)}{(\pi k)^2}\qquad k=1,2,\cdots,\infty$$

此外