漫话数学归纳法的应用技巧

苏淳

数学奥林匹克竞赛丛书

中国科学技术大学出版社

数学奥林匹克竞赛丛书

漫话数学归纳法的应用技巧

苏　淳

中国科学技术大学出版社

1992・合肥

[皖]新登字 08 号

漫话数学归纳法的应用技巧

苏 淳

*

中国科学技术大学出版社出版
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)
上海市印刷三厂排版
黄山市印刷总厂印刷
安徽省新华书店发行

*

开本 787×1092/32 印张 4.625 字数 102 千
1992 年 3 月第 1 版 1992 年 3 月第 1 次印刷
印数:1—8000 册
ISBN7—312—00318—4/G·42

目　　次

1　数学归纳法与直接证法

大家知道，数学上的许多命题都与自然数 n 有关．这里所说的 n，往往是指任意的一个自然数．因此，这样的一个命题实际上也就是一整列命题．

要证明这样一整列命题成立，当然可以有多种不同的方法．其中常用的一种方法是置 n 的任何具体值而不顾，仅仅把它看成是一个任意的自然数，也就是说，假定它只具备任何自然数都具备的共同性质，并且在这样的基础上去进行推导、运算．如果我们在推导运算中没有遇到什么难以克服的困难，那么我们就有可能用这种方法来完成命题的证明了．这种方法就是习惯上所说的直接证法．下面来看两个简单的例子．

例 1　证明，对任何自然数 n，如下的等式都能成立：

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

证　我们有

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left(\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x\right.$$

$$\left.+\cdots+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x\right).$$

利用积化和差公式

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta),$$

即知

$$\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x+\cdots$$

$$+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x$$

$$=\sin\frac{1}{2}x+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x\right.$$

$$\left.-\sin\frac{3}{2}x\right)+\cdots+\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

综合上述等式即得所证. 可见不论 n 为任何自然数，所证的恒等式都能成立.

在刚才所作的推导中由于借助了积化和差公式，所以证明得很顺利. 我们甚至连 n 是奇数还是偶数都用不着考虑就完成了证明. 这样的证明当然是对任何的自然数 n 都能够成立的，这就是我们所说的"将 n 置于**任意的境地**"的含意. 下面再看一个例子.

例 2 证明，对任何自然数 n，数

$$A_n=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$$

都能被 8 整除.

证 按照 n 的奇偶性，我们分别将 A_n 表示成两种不同的形式. 当 n 为奇数时，有

$$A_n=(5^n+3^n)-(3^{n-1}-1), \qquad (1)$$

当 n 为偶数时，将 A_n 表示为

$$A_n=5(5^{n-1}+3^{n-1})-(3^n-1). \qquad (2)$$

于是上述两式中，第一个括号内的指数都是奇数，第二个括

号内的指数都是偶数．我们知道，如果 k 为奇数，则有

$$a^k+b^k=(a+b)(a^{k-1}-a^{k-2}b+\cdots+b^{k-1}).$$

如果 k 为偶数，则 c^2-1 可整除c^k-1．于是只要分别视$a=5$，$b=3$ 及 $c=3$，即可根据上述事实，知(1)、(2)两式中的前后两项都是8的倍数，从而完成了命题的证明．

在这个证明中，我们虽然分别对 n 为奇数和n为偶数作了不同的处理，但并未改变 n 是**任意**自然数这一根本的属性，因此所作的证明可对任何自然数 n 成立．这是直接证法的最主要的特点．

直接证法在许多场合下具有简洁的优点，因此应用得非常广泛．再看一个取自1989年全国高中数学联合竞赛试题的例子．

例 3 已知：$x_i\in R$ $(i=1, 2, \cdots, n;\ n\geqslant 2)$，满足：$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$．证明

$$\left|x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

证 由条件$\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$ 知 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 不全为零；由条件$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 知这 n 个实数中既有正数也有负数．记

$$A_1=\{i:\ x_i\geqslant 0\},\quad A_2=\{i:\ x_i<0\}.$$

则 A_1 和 A_2 都不是空集，它们互不相交，且$A_1\cup A_2=\{1, 2, \cdots, n\}$．若再记 $S_1=\sum\limits_{i\in A_1}x_i$，$S_2=\sum\limits_{i\in A_2}x_i$，就有

$$S_1+S_2=0,\quad S_1-S_2=1.$$

因此，知$S_1=-S_2=\dfrac{1}{2}$．采用所引入的符号，就有

$$\left|x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right|=\left|\sum_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}+\sum_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}\right|.$$

由 A_1 和 A_2 的定义和性质知 $\sum\limits_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}$ 是若干个非负数之和，$\sum\limits_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}$ 是若干个负数之和，因此就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|=\left|\sum_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}+\sum_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\left|\sum_{i\in A_1}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i\in A_2}x_i\right|$$

$$=\left|S_1+\frac{S_2}{n}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},$$

可见命题的结论是成立的.

在这里，我们采用了许多符号，是为了书写简便. 有志于参加数学竞赛的读者们，应当努力使自己习惯于这些符号，并逐步学会使用各种符号.

在这个证明中，我们同样没有想过“n 究竟是几”的问题，只是把精力花费在对命题条件的推敲和剖析上. 我们应当养成这种细致分析题目条件的习惯. 解题的思路往往就来自于这种分析之中.

以上所说的都是一些直接证法. 如果我们能用这种证法把推理进行下去，那么就应当力争把它进行到底. 但有时，我们也会碰到一些与n有关的命题，对于它们很难从**任意**的 n 入手，那么我们就只好另辟蹊径了. 先看一个例子.

例 4 证明，对于每个不小于 3 的自然数 n，都可以找到一个正整数 a_n，使它可以表示为自身的 n 个互不相同的正约数之和.

显然，我们很难对**任意**一个不小于 3 的自然数 n，直接去找出相应的 a_n 来. 面对这样的情形，较为稳妥的做法只能是先从 a_3，a_4，…找起.

经过不多的几步探索，就可以发现，有

$$6=1+2+3,$$

而且 1，2，3 恰好是 6 的 3 个互不相同的正约数，因此可将 a_3 取作 6．在此基础上，又可发现有

$$12=1+2+3+6,$$

而且1，2，3，6恰好又是12的 4 个互不相同的正约数，因此又可取 $a_4=12$. 循此下去，便知可依次取 $a_5=24$，$a_6=48$，…．这也就告诉了我们：如果我们取定了 a_k，那么接下去就只要再取 $a_{k+1}=2a_k$ 就行了．事实上，如果 a_k 可以表示成自身的 k 个互不相同的正约数 $b_1<b_2<\cdots<b_k$ 之和，即

$$a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k,$$

那么就有

$$2a_k=b_1+b_2+\cdots+b_k+a_k.$$

如果记 $b_{k+1}=a_k$，则显然有 $b_1<b_2<\cdots<b_k<b_{k+1}$，表明它们互不相同；而且显然它们都是 $2a_k$ 的正约数．可见确实可以将 a_{k+1} 取为 $2a_k$．由于此处 k 具有**任意**性，所以我们确实已对一切不小于 3 的自然数 n 都证得了所需证明的断言．

我们在这里所采用的证法，就是所谓“数学归纳法”，有时也简称为归纳法．它在解决诸如此类的与自然数 n 有关的问题时，往往是行之有效的，因此被广泛地应用在数学之中．

刚才我们在证明中，实际上是遵循着如下思路行事的，即为了证明某个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$ 成立，我们首先对最小的 n_0，验证 $P(n_0)$ 成立；然后再假定对 $n=k$，有 $P(k)$ 成立，并在此基础上，推出 $P(k+1)$ 也成立．于是我们便**相信**了，对一切自然数 $n\geqslant n_0$，命题 $P(n)$ 都能成立．

当然，大家都会问：“这种**相信**是不是确有其道理呢？”．

我们可以告诉大家，这种**相信**是可靠的，是有其充分的数学依据的．我们可以设想一下，如果在经过了如上所述的推理之后，命题 $P(n)$ 仍不能对一切自然数 $n\geqslant n_0$ 成立，那

么如果记

$$A_1=\{n:\ n\geqslant n_0,\ P(n)\text{不成立}\},$$
$$A_2=\{n:\ n\geqslant n_0,\ P(n)\text{ 成立}\},$$

则有$A_1\neq\varnothing$. 但因已证 $P(n_0)$成立，知$n_0\notin A_1$，即有$n_0\in A_2$. 由于 A_1 是非空的自然数集合，所以其中一定有一个最小的元素 n_1. 由于 $n_0\notin A_1$，所以 $n_1>n_0$，即有 $n_1-1\geqslant n_0$. 由于 n_1 是 A_1 中最小的数，所以 $n_1-1\notin A_1$，从而 $n_1-1\in A_2$. 这就是说有命题 $P(n_1-1)$成立. 记$k=n_1-1$，则由我们所证，知可由$P(k)$成立推出 $P(k+1)$成立，也就是有 $P(n_1)$ 成立，从而 $n_1\in A_2$，即$n_1\notin A_1$，导致矛盾. 可见确有$A_1=\varnothing$. 也就是说，有 $A_2=\{n:\ n\geqslant n_0\}$，即对一切$n\geqslant n_0$，$P(n)$都成立.

以上所证明的原理，就叫做**数学归纳法原理**. 有了这个原理，我们就可以放心大胆地使用数学归纳法了.

利用数学归纳法不仅可以处理象例 4 那样不宜于采用直接证法的问题，而且也可以处理一些可以通过直接证法来解决的问题，例如前面提到过的例 1 和例 2，它们的证明过程如下：

例 1 又证：当$n=1$时，我们有

$$\text{左式}\ =\frac{1}{2}+\cos x,$$

$$\begin{aligned}\text{右式}\ &=\frac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{3\sin\frac{1}{2}x-4\sin^3\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}\\&=\frac{3}{2}-2\sin^2\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}-(1-\cos x)\\&=\frac{1}{2}+\cos x,\end{aligned}$$

所以对于$n=1$，等式是成立的.

假设对于$n=k$，等式成立，即有

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos kx=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

我们要来证明对于$n=k+1$，等式也成立．我们有

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos kx+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}+\cos(k+1)x$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+2\cos(k+1)x\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\left(\sin\left(k+\frac{3}{2}\right)x-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\sin\left(k+\frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\sin\left[(k+1)+\frac{1}{2}\right]x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

所以对于$n=k+1$，等式也成立．从而对一切自然数n，等式都成立．

例 2 又证：因$A_1=5+2+1=8$，知其为8的倍数，所以当$n=1$时命题成立．

假设A_k可被8整除，要证A_{k+1}也可被8整除．我们有

$$A_k=5^k+2\cdot3^{k-1}+1,$$
$$A_{k+1}=5^{k+1}+2\cdot3^k+1=5\cdot5^k+6\cdot3^{k-1}+1,$$
所以就有
$$A_{k+1}-A_k=4(5^k+3^{k-1}).$$
由于对任何自然数 k，数 5^k 和 3^{k-1} 都是奇数，所以其和 5^k+3^{k-1} 恒为偶数，从而 $4(5^k+3^{k-1})$ 一定是 8 的倍数. 这也就表明 $A_{k+1}=A_k+4(5^k+3^{k-1})$ 可被 8 整除，明所欲证. 因此，对任何自然数 n，数 A_n 都可被 8 整除.

在如上的证明过程中，我们都严格地遵守了数学归纳法所要求的两个步骤：（1）验证 $P(n_0)$ 成立；（2）假设 $P(k)$ 成立，推出 $P(k+1)$ 也成立. 正如我们在证明数学归纳法原理的过程中所看到的，这两个步骤对于保证命题 $P(n)$ 对一切 $n\geqslant n_0$ 都能成立是必不可少的. 因此必须严格遵守.

后面我们将要读到数学归纳法的各种技巧，它们虽然显得灵活多变，但都是在严守上述两个步骤的前提之下所设施的各种变通，而绝对没有取消这两个步骤中的任何一个. 为了同后面将要介绍的各种变通形式相区别，我们将本节所采用的归纳法形式叫做数学归纳法的基本形式，也有人称之为第一归纳法.

同其它任何一种数学方法一样，数学归纳法也不是万能的，例如前面的例 3 就不宜于采用数学归纳法来加以证明，读者不难自行理解其中的道理. 由于后面还要进一步谈到这个问题，这里不再赘述.

在前面所讲到的数学归纳法的两个步骤中，我们通常将“验证 $P(n_0)$ 成立”称作**起步**；将“假设 $P(k)$ 成立”称作**归纳假设**；而将由“假设 $P(k)$ 成立”推出“$P(k+1)$ 也成立”的过程叫做**归纳过渡**，有时也叫作**向前跨步**. 起步的过程一般较

容易，而归纳过渡有时却很需要认真动一番脑筋，有时甚至需要运用各种技巧和多种不同的数学工具．归纳过渡通常是全题论证的关键，在此非认真下功夫不可，而其中最最重要的，则是设法利用归纳假设．

2　认真用好归纳假设

如果说在用数学归纳法证题时，归纳过渡是证题的关键，那么归纳假设就是过渡的基础．数学纳归法之所以显得有生命力，就是因为它避开了直接接触 n 的任意性，而把证明过程变成为一个“连环套”，使得人们在验证了 $P(n_0)$ 成立之后，只要再在“$P(k)$ 已成立”的假设基础上证出“命题 $P(k+1)$ 也成立”就行了．这就意味只需要再往前迈出一步就够了，因此大大减少了论证中的不确定性．既然如此，运用好归纳假设当然就极为重要．我们甚至可以说，“如何千方百计地创造条件以利用归纳假设?”的问题，正是论证者们在此所应考虑的最中心的问题．

在许多场合下，如何利用归纳假设的问题并不显得很困难．我们来看两个简单的例子．

例 1　某次象棋比赛共有 n 人参加($n\geqslant 2$)，每两人都应对奕，且一定决出胜负．证明，比赛结束后，可将这 n 个人列为一队，使队列中的每一个人都曾战胜过紧跟在他后面的那个人．

如果 $n=2$，结论显然成立．

假设当 $n=k$ 时结论成立，我们来证明当 $n=k+1$ 时结论也成立．这时，我们先从中任意叫出 k 个人来．由于这 k 个人中的每两个人都曾决过胜负，因此根据归纳假设，可将他们按照要求列成一列．此后，我们再让剩下的那个人按照如下办法插进已列好的队列中：如果他曾战胜过队列中的第

1个人，那么他就站在最前头；否则，就再看第2个人是否被他战胜过，他可以一直这样依次看下去，直到看到一个曾被他战胜过的人后，他就插到该人的前面；如果这样的人一个也找不到，那么他就站在队列的最后去．不难看出，这样的队列即是合乎要求的．可见对$n=k+1$，结论也能成立．所以对一切$n\geqslant 2$，结论都能成立．

在这里，先叫出k个人来列队，即是为了利用归纳假设．如果没有这k个人先行列队，那么是很难说清楚$k+1$个人是如何列队的．但是一旦有了这k个人所列的队列作为基础，那么就只要再说明第$k+1$个人如何插入其中，并能保持队列所具备的性质就可以了．

例 2 有一批文件分成n个部分分别由n个人保管，这n个人每人都有电话机．证明，当$n\geqslant 4$时，只需通电话$(2n-4)$次，就可以使n个人全都了解了全部文件的内容．

证 当$n=4$时，甲和乙、丙和丁先分别通一次话，相互告知各自掌握的文件内容；然后，甲和丙、乙和丁再分别通一次话，相互告知各方所了解的内容，即可使所有人都了解到全批文件内容，可见断言成立(共通了4次电话)．

假设当$n=k$时断言也成立，即只须通$2k-4$次电话，即可使所有k个人都了解到全批文件的内容，我们要来证明当$n=k+1$时断言也成立．

设想首先由第$k+1$个人打电话给第1个人，以把他所掌管的文件内容全都告知第1个人．然后按归纳假设，前k个人之间只须打$(2k-4)$次电话即可使他们全都知道全批文件的内容，然后第1个人再给第$k+1$个人打电话，告知他全批文件内容．所以一共只须打$1+(2k-4)+1=2(k+1)-4$次电话．可见断言对$n=k+1$也成立．

在这两个例子中，虽然处理的细节上略有不同，但都可以先自 $k+1$ 个人中任意叫出 k 个人来对他们使用归纳假设（在例 2 中，要求剩下的那个人先将自己所掌握的文件内容告诉别人）. 这是因为不论剩下的是哪一个人，接下来的问题都是容易解决的. 但在有的问题中却不是这样.

例 3 在一块平地上站有 n 个人. 对每个人来说，他到其他人的距离均不相同. 每人都有一支水枪. 当发出火灾信号时，每人都用水枪击中距他最近的人. 证明，当 n 为奇数时，其中至少有一人身上是干的.

证 $n=1$ 时，结论显然成立. 设命题对 $n=2k-1$ 成立，要证当 $n=2k+1$ 时命题也成立. 设 A 与 B 两人之间的距离在所有的两人间的距离中为最小. 撤出 A，B 两人，则由归纳假设知，在剩下的 $2k-1$ 个人中间，至少有一人 C 的身上是干的. 再把 A，B 两人加进去，由于 $AC>AB$，$BC>AB$，所以 A，B 两人都不会用水枪去击 C，从而 C 身上仍然是干的. 所以对一切奇数 n 命题都成立.

在这个问题中，先撤出两人是为了使用归纳假设（按照惯例，这叫做“退”）. 但在退出之后，还应再进：因为我们的目标是解决 $k+1$ 的情形. 既然“退”是为“进”服务的，因此在“退”的时候就应当为“进”作好安排. 这个问题在例 1 和 2 中显得不够突出，而在例 3 中便体现得很清楚了：我们之所以撤出 A 和 B，而不撤出别人，就是为了能方便地将他们再加进去. 下面再看两个例子.

例 4 在平面上给定了 n 个点（$n\geqslant 2$），以其中每两个点为端点都能连得一线段，我们把这些线段中的最长者称作为直径. 证明，直径的数目不会多于 n 条.

证 显然当 $n=2$ 时断言成立. 假设 $n=k$ 时断言也成

立，我们要来证明当 $n=k+1$ 时断言也成立. 将这 $k+1$ 个点所构成的平面点集记作 Z.

如果由 Z 中某点 A 所引出的直径不多于一条，那么由于 $Z-\{A\}$ 是一个由 k 个点构成的平面点集，由归纳假设知其中的直径不多于 k 条，从而知 Z 的直径不会多于 $k+1$ 条.

如果由 Z 中某点 B 所引出的直径不少于 3 条，其中有 BQ, BR, BS(图 1). 记 $r=|BQ|$. 则 Q, R, S 位于以 B 为中心 r 为半径的圆周上. 由于 Q, R, S 中任何两点间的距离都不超过 r，所以它们事实上是位于以 B 为中心以 r 为半径的一段劣弧上. 不妨设 R 位于 Q 与 S 之间. 我们来以 B,Q,S 为中心，以 r 为半径作圆，则平面点集 Z 整个含于上述三圆的交集 J 中. 但除了 B 点之外，J 整个含在以 R 为中心 r 为半径的圆的内部. 这表明由 R 仅可引出一条直径 BR. 于是利用前面已证部分知 Z 的直径不多于 $k+1$ 条. 这样，我们便证得了此时的结论.

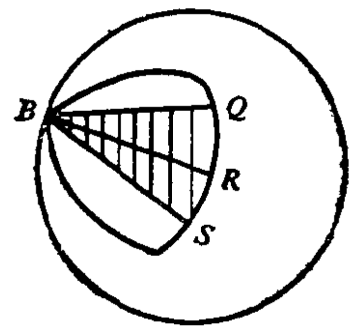

图 1

最后，在剩下的情形里，由 Z 的每点都恰好引出两条直径，这些直径共有 $2(k+1)$ 个端点，故恰有 $k+1$ 条直径.

所以在任何情况下 Z 都至多有 $k+1$ 条直径. 由数学归纳法原理知，断言对任何自然数 n 成立.

在上述论证中，我们将情况区分为三类，其目的还是为了先“退”后“进”. 在区分为三类后，我们采用不同手法加以解决，其中仅有第一种情况用到了归纳假设；而对第三种情况则是直接给出论证的；第二种情形则被化归第一种情形来处理. 这种在归纳过渡时区分情况分别处理的例子还可以举