微分几何学概论

〔日〕石原　繁 著

王运达　朱希斌 译

王有道　任彦成 校

（学生讲义）

东 北 工 学 院

微分几何学概论

〔日〕 石原 繁著
王运达 朱希斌译
王有道 任彦成校

东北工学院

1982年4月

正值我的老师

矢 野 健 太 郎 教 授

七 十 诞 辰， 译 者 祝 他 健 康 长 寿。

中译本前言

微分几何是一门有长远历史的学科。它最初是以微积分应用在几何上的面貌出现。例如法国蒙日 (G. Monge) 的经典著作 "L'application de l'analyse à la géométrie" (1795)。后经蒙日的学生以及数学大师高斯 (F. W. Gauss) 的努力，才正式成为数学的一个分支。关于三维欧几里得空间内的曲面理论，达布 (G. Darboux)的四卷 Théorie des surfaces (1887) 是最精采而又丰富的著作，直到现在仍有细读的价值。将曲面论发展为 n 维流形上的黎曼几何学，是德国数学家黎曼 (B. Riemann) 创始的。他在 1854 年的就职典礼中，发表一篇讲演，题为 "Über die hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen"，为黎曼几何学奠立了基础。高斯听讲后叹为奇才，认为可接班者舍此人莫属。可惜由于当时缺乏合适的工具，计算繁复，直到 1916 年 A. Einstein 发表广义相对论后，黎曼几何才引起广泛的兴趣。此后，微分几何学有各种各样的推广，但到目前止，大家仍认为黎曼几何是最本质和最重要的。在这方面本世纪上半叶法国嘉当 (Elie Cartan) 作出许多杰出的贡献，读者可在嘉当全集第三卷中看到。此外，他还有一本专著，即 "Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann" (1946)。随后经 H. Hopf, A. Weil 和我国几何学家陈省身 (S. S. Chern) 等人的努力，微分几何的研究对象，已不再局限于一点邻近而变为整体性质，并为当代最热闹的学科之一。它牵涉到许多数学分支，例如拓扑学，泛函分析，偏微分方程，李群与李代数等。作为基础读物，S. Kobayashi 与 K. Nomizu 合编的 "Foundations of Differential Geometry" 卷 I (1963)，卷 II (1968)，与 S. Helgason 的 "Differential Geometry and Symmetric Spaces" (1962) 实为最好的著作。但这两部书

水平较高，对一个初学者来说，还需要一部入门著作，作为古典微分几何到近代微分几何的桥梁。我认为日本学者石原繁（Shigeru Ishihara）所著“微分几何学概论”恰好能起这样的作用。此书从曲线论开始一直讲到上同调群在几何上的应用，有条不紊，逐步深入。既有高斯的参数法，又有 Ricci 的张量方法，嘉当的外微分形式，和 K. Nomizu 的 ∇ 算符。读者学过之后，对这些方法的演变与它们之间的关系，将会瞭如指掌。所以很值得一读，以作在微分几何这门学科中登堂入室的准备。本书作者石原繁先生是日本东京工业大学数学系教授，发表论文甚多，在学术界久负盛名。

王运达先生精通日语，又对微分几何有很深造诣。他利用教学余闲，已译出日文名著多种，供我国不谙日语者阅读。现在又把石原繁先生的“微分几何学概论”译成中文，实对有志于此门学科者嘉惠不浅。承寄来油印初稿，翻阅后竟不忍释手，除对王运达先生表示衷心感谢外，不得不稍写几句，以供选读此书者参考。

黄正中

1981年9月于南京大学

东北工学院应用数学系傅文章、迟汉忠、杨胜芳、李建华等同志为出版此书中译本作了大量工作，特此表示谢意。

王运达

1982年3月

前　　言

本书的题目是微分几何学概论。微分几何学概论应该讲些甚么目前似乎尚无定论。自古以来，认为几何学是研究图形性质的一门数学分支。但是有许多问题需要进一步澄清，例如图形是甚么？哪些性质要做为重点来研究。还有，根据哪种方法论进行探索．我们的看法是，只要这些问题的处理方案一经决定，几何学的性格也就明确下来。因此，在几何学的形态上应该有很多差异。在这种形势下，做为微分几何学概论一书要阐明甚么，按怎样的顺序，根据哪种方法论去开展理论探讨等问题上，当然要有所选择。

故当编写本书之际，为了对那些学习数学的人、把数学应用在科学技术上的人、以及想学习这些领域的基础的人多少都有帮助，要采取怎样的方针才好呢？我们作了思考。综合考虑了数学发展的现状，特别是几何学及其相邻各领域的发展现状，并且展望了最近的将来，才决定下来这本书的内容如目录所示。

在本书里，首先讨论了古典微分几何学即三维欧氏空间中的曲线与曲面的微分几何学性质。但不够深入，只是概括地展望了一下。但是，为了让读者能熟悉曲面概念的自然发展即流形概念，又能自然地接触到流形上的黎曼几何，我们下了一翻工夫，论述流形及黎曼几何时，主要讨论了二维问题，对一般维数问题做到尚可理解的程度。在接近尾声阶段，用极其初等方法讲到组合拓扑学问题以及流形的同调。其后又运用外微分形式法讨论了上同调。在最终阶段非常粗浅地介绍了同调与上同调的关系。

在本书里，特别是卷末的第六章，无证明地介绍并且使用了各种重要定理。象在这样一本小书里，要想证明这样定理无论如何也作不到，读者只能理解它的意义，要想填补这些空白就得更上一层楼了。

当阅读本书时，根据您的情况可以略去第一章曲线，并不妨碍理解本书以后的内容。

以下略。

石原　繁

1976 年 2 月于日本东京

目　　录

第一章　曲　　线

§1　向　　量

在三维欧氏空间 E^3 内取直角坐标系。当 E^3 的点 P 的坐标为 (x, y, z) 时，此点以 $P(x, y, z)$表示之。E^3 内的向量 $\boldsymbol{A}$ 的分量为 A_x，A_y，A_z 时，将 $\boldsymbol{A}$ 记做

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

对于 E^3 的一点 $P(x, y, z)$，对应以从原点 O 到 P 的向量$\overrightarrow{OP}$，这个向量$\overrightarrow{OP}$叫做点 P 的**位置向量**。点 $P(x, y, z)$ 的位置向量 $\boldsymbol{x}$ 可写做

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

二向量

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

的**内积** $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 与**外积** $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 分别是

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z,\quad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} A_yB_z-A_zB_y \\ A_zB_x-A_xB_z \\ A_xB_y-A_yB_x \end{pmatrix}$$

关于三个向量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$，下式成立。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix} \qquad (1.1)$$

此式又可写如

$$|\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}|=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

向量$\boldsymbol{A}$之**长**（或**模**）由下式给定。

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}=\sqrt{(A_x)^2+(A_y)^2+(A_z)^2}$$

设在区间I上定义的向量函数（其值为E^3的向量函数）$\boldsymbol{A}(t)$（$t\in I$）为

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix} A_x(t) \\ A_y(t) \\ A_z(t) \end{pmatrix} \quad (t\in I),$$

则其分量 $A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$ 为定义在I上的函数。如果三个函数 A_x，A_y，A_z 连续时，就说向量函数$\boldsymbol{A}$**连续**。如果A_x，A_y，A_z无限次可微分时，就说向量函数$\boldsymbol{A}$**无限次可微分**，$\boldsymbol{A}$叫做C^∞**向量函数**。一般来说无限次可微分函数叫做C^∞**函数**。以C^∞向量函数$\boldsymbol{A}$的分量的导函数为分量的向量函数

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{pmatrix}$$

叫做向量函数$\boldsymbol{A}$的**导向量**（**函数**），用记号

$$\boldsymbol{A}',\ \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}$$

表示。这时下式成立。

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+h)-\boldsymbol{A}(t)}{h}$$

对于向量函数的微分法，普通函数的微分法里成立的规律，几乎全都成立。特别是下列规律成立：对二向量函数$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的内积与外积有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

【问题 1.1】 设 $\boldsymbol{A}$ 为单位 C^∞ 向量函数（长为1的向量叫做**单位向量**）．试证下列事实。

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}'=0$。

(2) 如果 $\boldsymbol{A}'\neq 0$，那末 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 垂直。

模仿微分学定义 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{A}$ 的高阶导函数。$\boldsymbol{A}$ 的 n 阶导函数用记号

$$\boldsymbol{A}^{(n)},\quad \frac{d^n\boldsymbol{A}}{dt^n}$$

表示。将 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{A}$ 在 $t_0\in I$ 的周围台劳展开之，在 t_0 的某邻域内得

$$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t_0)+\boldsymbol{A}'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}''(t_0)(t-t_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n+\boldsymbol{R}_n$$

式中 $\boldsymbol{R}_n$ 为剩余项。

【问题 1.2】 关于 C^∞ 向量函数 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，试证下式。

(1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}'=\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}\|'$

(2) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}''-\boldsymbol{A}''\cdot\boldsymbol{B}$

(3) $|\boldsymbol{ABC}|'=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{BC}|+|\boldsymbol{AB}'\boldsymbol{C}|+|\boldsymbol{ABC}'|$

对于两个以上自变量的向量函数也模仿普通微分法定义其连续性，可微性。此外，偏微分、全微分的记号也模仿微分法。

§2 曲　　线

开区间 I 在 E^3 里的映射 $\boldsymbol{x}:I\to E^3$ 叫做**曲线**，其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 表示对于 $t(\in I)$，点 $P_t\in E^3$ 的**位置向量**。今设

$$x(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad (t\in I)$$

则表示此曲线的方程

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad (t\in I) \qquad (2.1)$$

为**参数表示**。这时 t 叫做**参数**。当 $x(t)(t\in I)$为 C^∞ 向量函数时，此曲线叫做 **C^∞ 曲线**。用方程

$$x=x(t), \quad (t\in I)$$

或方程(2.1)表示这条曲线。C^∞ 曲线 $x=x(t)$ $(t\in I)$满足条件

$$x'(t)\neq 0 \quad (t\in I) \qquad (2.2)$$

时，叫做**正则曲线**，下列事实成立。

设 $x:I\to E^3$ 为正则曲线，对于任意的 $t_0\in I$，取 t_0 的充分小邻域 $U(\subset I)$，则映射 x 在 U 内是1对1。

《**注意**》正则曲线 $x:I\to E^3$ 于其定义域 I 全域上倒未必是1对1。如下图1.1自相交曲线也是正则曲线。

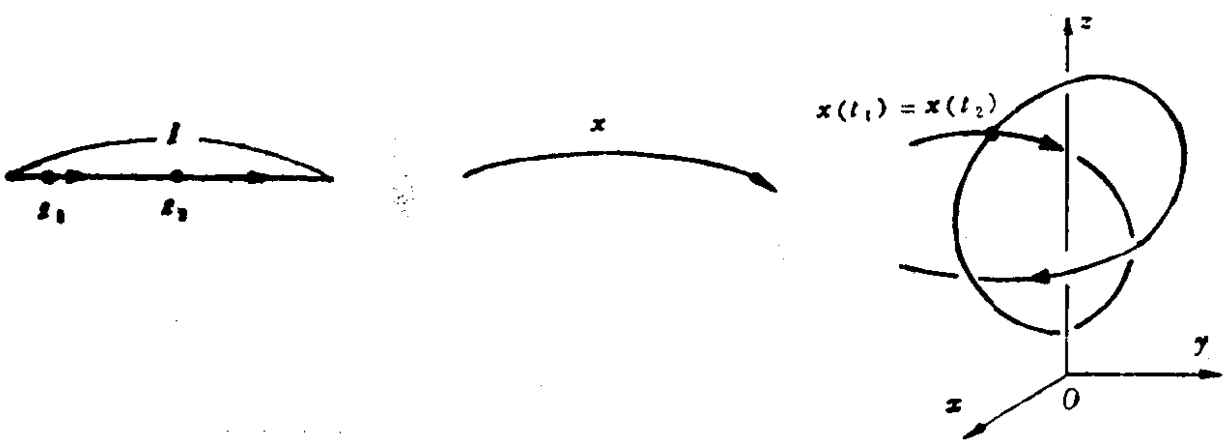


图 1.1

正则曲线的条件(2.2)的含义是：曲线 $x:I\to E^3$ 的象（常识曲线）无尖点，而且当参数 t 变动时对应的点 $x(t)$ 也运动。

就正则曲线 $x=x(t)$ $(t\in I)$而言，当 t 在区间 I 移动时，考虑相应的点 $x(t)$ 在 E^3 中的运动，因此直观地说，正则曲线可以看做表示一条有向曲线。

给定**闭区间** I 在 E^3 中的映射 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$，当存在含 I 的开区间 I^* 与正则曲线 $\boldsymbol{x}^*: I^* \to E^3$ 在 I 上 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t)$ 成立时，映射 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$ 叫做在闭区间 I 上定义的**正则曲线**。当 $I = [a,b]$ 时，二点 $\boldsymbol{x}(a)$ 与 $\boldsymbol{x}(b)$ 叫做此正则曲线的**端点**。故今后假设曲线的定义域是开区间或闭区间。

当将区间 I^* 映射在区间 I 上的，I^* 上的 C^∞ 函数 $t = t(\theta)$ 满足条件

$$\frac{dt}{d\theta} > 0 \quad (\theta \in I^*) \tag{2.3}$$

时，$t = t(\theta)$ 叫做参数的**容许变换**。

如果 $t = t(\theta)$ 为容许变换，则 $t = t(\theta)$ 将 I^* 1 对 1 地映射在 I 之上，又是增函数。故存在其反函数 $\theta = \theta(t)$，这是将 I 映射在 I^* 上的容许变换。

对于两条正则曲线 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$ 与 $\boldsymbol{x}^*: I^* \to E^3$，假设存在将 I^* 映射在 I 上的容许变换 $t = t(\theta)$ 使 $\boldsymbol{x}(t(\theta)) = \boldsymbol{x}^*(\theta)$ 成立。这时，说 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^*$ 等价，以 $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}^*$ 记之。这个等价关系～是在正则曲线全体的集中定义的，是一种等价关系。将正则曲线全体的集以此等价关系分类，考虑得到的等价类，于是得直观上有向的曲线。对这种含义下的有向曲线进行研究是本章的目的。故在前面定义的正则曲线的性质之中只处理在参数的容许变换下不变的性质，就可达到这种目的。因此，我们规定今后在正则曲线的性质中只考虑在容许变换下不变的。

《**注意**》设区间 I^* 在区间 I 上的映射可用 I^* 上的 C^∞ 函数 $t = t(\theta)$ 表示，如不是满足条件(2.3)而是满足

$$\frac{dt}{d\theta} < 0 \quad (\theta \in I^*) \tag{2.4}$$

利用它来变换正则曲线的参数，则正则曲线改变方向。

当正则曲线 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$ 不含重点时，即对于 $t_1 \neq t_2$ $(t_1, t_2 \in I)$ 若 $\boldsymbol{x}(t_1) \neq \boldsymbol{x}(t_2)$ 时，则此正则曲线叫做**简单正则曲线**。

【问题 2.1】 既使在容许变换下改变参数，简单正则曲线的定义

并不改变，试证明之。

对于正则曲线 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$，取 I 的子闭区间 $I^* = [a, b]$，则正则曲线 $\boldsymbol{x}: I^* \to E^3$ 叫做**正则弧**或给定正则曲线的**弧**。

对于正则曲线 $\boldsymbol{x}: I \to E^3$，其象 $\boldsymbol{x}(I)$ 为 E^3 的子集，在直观意义下，做为图形，形成曲线。因此，做为图形的曲线叫做正则曲线和做为映射的正则曲线有时用语相同。还有，做为图形的曲线上的点有时只叫做正则曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ 上的点。对于正则弧与弧有时也用相同的用语。

弧长 以 C 表示正则弧 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$。考虑闭区间 $[a, b]$ 的分割

$$\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

与此分割的各分点相对应的 E^3 的点分别设为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0), \quad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t_1), \quad \cdots, \quad \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}(t_n)$$

设依次连结这些点而得折线 Γ_n 之长为 $L(\Gamma_n)$，则

$$L(\Gamma_n) = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{x}(t_{i-1})\|$$

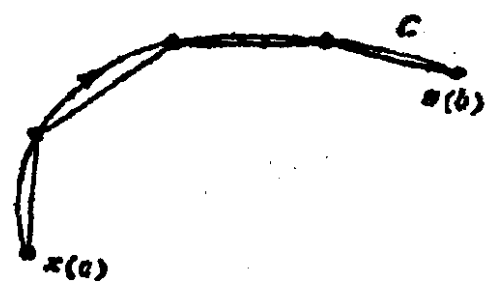


图 1.2

如所周知，上面给定的分割 Δ 以任何方式分细时，$L(\Gamma_n)$ 总收敛于确定的数值 $L(C)$。这时，我们说弧 C 的**弧长**是 $L(C)$，弧 C **具有弧长**。下列定理成立。

定理 1.1 正则弧（曲线）$C: \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ 具有弧长，其弧长 $L(C)$ 由下式给定。

$$L(C) = \int_a^b \left\| \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (2.5)$$

〈证明〉 证明请参照微积分学。

在正则弧 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\quad(a\leqslant t\leqslant b)$里，作参数的容许变换 $t=t(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$而得的正则弧设为 $\overline{C}: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t(\theta))$，则

$$L(\overline{C})=\int_{\alpha}^{\beta}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{d\theta}\right\|d\theta=\int_{a}^{b}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\ \frac{dt}{d\theta}\right\|\frac{d\theta}{dt}dt$$

然因 $dt/d\theta>0$，故

$$L(\overline{C})=\int_{a}^{b}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\|\frac{dt}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dt}dt=\int_{a}^{b}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\|dt=L(C)$$

即正则弧 C 的弧长 $L(C)$在参数的容许变换下是不变的。在这种含义下可以说正则弧长具备几何学意义。又当给定欧氏空间 E^3 的**合同变换**（在映射 $T:E^3\to E^3$ 之下，任意两点间的距离保持不变）时，可从正则弧 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\quad(t\in I)$ 作出正则弧 $\overline{C}: \boldsymbol{x}=T(\boldsymbol{x}(t))$。这个 $\overline{C}$ 叫做在合同变换 T 之下移动 C 而得的曲线。由弧长的定义知，C 的弧长 $L(C)$ 与 $\overline{C}$ 的弧长 $L(\overline{C})$ 相等。即弧长在 E^3 中的合同变换下是不变的。总之可以说，合同的正则弧具有相同的弧长。

考虑正则曲线 $C: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\quad(t\in I)$。取常数 $t_0\in I$，令

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\|dt,\quad(t\in I)\tag{2.6}$$

则 $s=s(t)$是区间 I 上的 C^∞ 函数而且

$$\frac{ds(t)}{dt}=\left\|\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\right\|>0\quad\left(\because\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\neq0\right)$$

今设 $I=[a,\ b]$，$s(a)=\alpha$，$s(b)=\beta$，则 $s=s(t)$ 为参数的容许变换，将反函数 $t=t(s)$代入 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，得正则曲线 $\overline{C}: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t(s))$，$(s\in[\alpha,\ \beta])$。这个参数 $s\in[\alpha,\ \beta]$叫做给定正则曲线 C 的**弧长**。正则曲线 $\overline{C}$ 就是给定正则曲线 C 以弧长 s 为参数表达。

如果设正则曲线 C 的参数为弧长 s，则 C 可用 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$表示。于是在(2.6)中以 $t=s$ 代入之得

$$s=\int_{0}^{s}\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right\|ds$$

在上式中对 s 微分两边得

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right\| = 1 \tag{2.7}$$

即在曲线上的各点，与曲线相切的向量 $d\boldsymbol{x}/ds$ 是单位向量。

【问题 2.2】 对于正则曲线，如果二参数 s 与 $\bar{s}$ 都是其弧长时，则 $\bar{s}=s+a$（a 为常数）．试证明之。

§3 曲率 挠率

切向量 当给定正则曲线 $C:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ $(t\in I)$ 时，向量

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

在曲线 C 的点 $\boldsymbol{x}(t)$ 处切于 C。因此，$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 叫做**切向量**。设曲线 C 关于弧长 s 的参数表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，则由(2.7)可见

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{x}'(s)=\frac{d\boldsymbol{x}}{ds},\quad \boldsymbol{t}=\frac{\dot{\boldsymbol{x}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{x}}(t)\|}$$

为单位向量，叫做**单位切向量**，以记号 $\boldsymbol{t}$ 记之。

规定 沿曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 定义的函数（或向量函数）$f(t)$ 对 t 的导函数以 $\dot{f}(t)$ 表示。为了区别，f 对弧长 s 的导函数以 f' 表示。

通过 C 上的点 $\boldsymbol{x}(t)$，垂直于此点处的切向量的平面叫做在此点处的**法平面**。

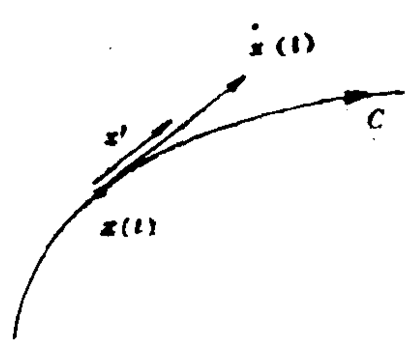


图 1.3

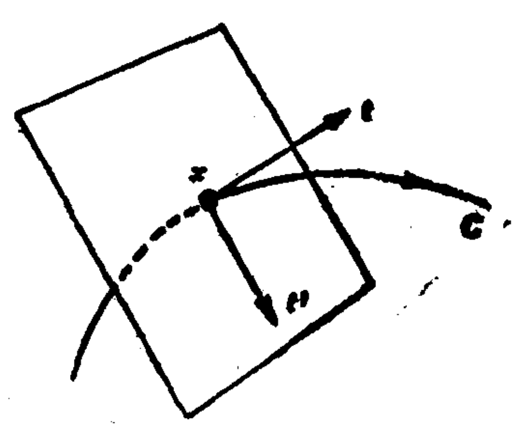


图 1.4

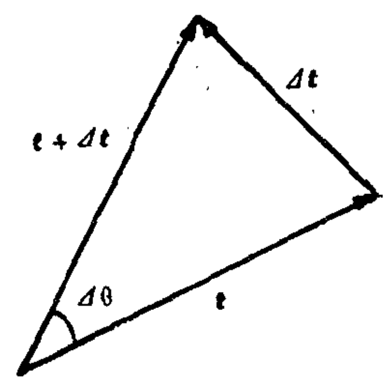
曲率　法向量　其次，考虑

$$t'=\frac{dt}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2} \tag{3.1}$$

因 t 之长为1，所以 $t\cdot t'=0$。即在 $t'\neq 0$ 的点，t' 在法平面上。此 t' 叫做曲线 C 的**曲率向量**。设

$$\kappa(s)=\|t'(s)\|=\|x''(s)\|$$
$$=\sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2} \tag{3.2}$$

函数 $\kappa(s)$ 叫做曲线 C 的**曲率**。从图 1.5 可见，κ 为单位向量 t 对弧长 s 的回转率。即切线方向变化快处曲率 κ 大。



$\|\Delta t\|\doteqdot\Delta\theta$

图 1.5

在 $\kappa\neq 0$ 的点，令

$$\rho=\frac{1}{\kappa} \tag{3.3}$$

ρ 叫做**曲率半径**。在 $\kappa=0$ 的点定义 $\rho=\infty$。$\kappa=0$ 的点叫做**拐点**。

定理 1.2　曲率 κ 恒等于0的曲线是直线或直线的一部分。

〈**证明**〉　因 $\kappa=0$ 恒成立，故 $x''=0$ 恒成立。因此得

$$x=as+b$$

式中 a 与 b 为常向量。（证毕）

公式　对于有任意参数 t 的正则曲线 $x=x(t)$，

$$\kappa=\frac{\|\dot{x}\times\ddot{x}\|}{\|\dot{x}\|^3} \tag{3.4}$$

〈**证明**〉
$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}=x'\dot{s}$$

$$\ddot{x}=\frac{d}{dt}(x'\dot{s})=x'\ddot{s}+x''(\dot{s})^2$$

$$\therefore\quad \dot{x}\times\ddot{x}=(x'\dot{s})\times(x'\ddot{s}+x''(\dot{s})^2)=(\dot{s})^3x'\times x''$$

然因 $\dot{s}=ds/dt=\|\dot{x}\|$。故