中学数学基础

ZHONGXUE SHUXUE JICHU

三

习题

史素 任

人民教育出版社

中学数学基础

三角习题解答

史素　任学

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是《中学数学基础》三角（1980年4月第一版）的习题解答。为了便于查找，在习题、复习题的标题下和题号前面的括号内列出了原书上的页次。

中学数学基础
三角习题解答
史 素　任 学

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
国营五二三厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 10.75 字数 320,000
1980年11月第1版　1981年7月第1次印刷
印数 1—325,000
书号 7012·0123　定价 0.80 元

目　录

* 习题(第 6 页)是指《三角》(人民教育出版社 1980 年第一版)一书上第 6 页的习题。下同。

第一章　任意角的三角函数

第一节　角的概念的推广

习　题（第6页）

〔6〕 1. 在直角坐标系中作出下列各角，说明它们各是第几象限的角:

$30°$，$120°$，$210°$，$300°$，$530°$，$1050°$，

$-60°$，$-390°$，$-240°$，$-620°$.

答:（略）

〔6〕 2. 第一象限的角都是锐角吗？如果α是第一象限的角，$\frac{\alpha}{2}$一定在第一象限吗？举例说明.

答: 不一定. 如$390°$是第一象限的角，它不是锐角；它的一半也不在第一象限.

〔7〕 3. 写出和下列各角有相同终边的一切角:

$0°$，$30°$，$90°$，$120°$，$-45°$，$-70°$，$390°$.

答: 如和$30°$角有相同终边的一切角为:

$n\cdot 360°+30°(n=\pm1、\pm2、\pm3\cdots\cdots)$

（其它略）

〔7〕 4. 指出下列各角所在象限:

(1) $4\times360°+30°$　　(2) $-3\times360°+150°$

(3) $n\cdot360°-30°(n=0、\pm1、\pm2、\pm3\cdots\cdots)$

答：(1)、(2)(略)。

(3) $n\cdot360°-30°=n\cdot360°+(-30°)$，所以，$n\cdot360°-30°$ 在第四象限.

〔7〕 5. 把下列各角写成 $n\cdot360°+\alpha$ 的形式($0°\leqslant\alpha<360°$，n 是整数)：

(1) 1350° (2) 3250° (3) −2860° (4) −3000°

答：(1)、(2)、(3)(略)，(4) $-9\times360°+240°$.

〔7〕 6. 下列各角始边相同，判断哪些角有相同终边：

30°, 105°, −75°, 465°, −615°, 285°, −1410°.

答：30°和−1410°；105°、465°和−615°；−75°和285°分别是具有相同终边的角.

〔7〕 7. 一条弦等于半径，这条弦所对的圆心角是不是 1 弧度的角？这个圆心角等于多少度，合多少弧度？

答：不是 1 弧度的角. 这个圆心角等于 60°，因为 $1°\approx0.01745$ 弧度，所以 $60°=\frac{\pi}{3}$弧度≈1.047 弧度.

〔7〕 8. 用弧度制表示下列各角(写成多少 π 的形式)：

(1) 18°	(2) 22°30′	(3) 75°
(4) 120°	(5) 135°	(6) 150°
(7) 210°	(8) 240°	(9) 315°
(10) −270°	(11) −480°	(12) 360°的 k 倍

答：

(1) $\frac{\pi}{10}$	(2) $\frac{\pi}{8}$	(3) $\frac{5\pi}{12}$
(4) $\frac{2\pi}{3}$	(5) $\frac{3\pi}{4}$	(6) $\frac{5\pi}{6}$
(7) $\frac{7\pi}{6}$	(8) $\frac{4\pi}{3}$	(9) $\frac{7\pi}{4}$

(10) $-\frac{3\pi}{2}$　　(11) $-\frac{8\pi}{3}$　　(12) $2k\pi$

〔7〕 9. 用角度制表示下列各角:

(1) $\frac{\pi}{12}$　　(2) $\frac{11\pi}{6}$　　(3) $\frac{5\pi}{3}$

(4) $\frac{7\pi}{10}$　　(5) 3　　(6) 1.85

答: (1) 15°　　(2) 330°　　(3) 300°

(4) 126°　　(5) 171°53′14.4″

(6) 105°59′49.8″

〔7〕 10. 设θ和ϕ分别是等腰三角形的顶角和底角, 写出θ和ϕ的范围. (用弧度表示)

答: $\theta=\pi-2\phi$, $\therefore (0<\theta<\pi)$; $\phi=\frac{\pi-\theta}{2}$, $\therefore\left(0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$

〔7〕 11. 指出下列各式中的α、β、γ、δ各是第几象限的角:

$$2n\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$$\frac{\pi}{2}+2n\pi<\beta<(2n+1)\pi$$

$$(2n+1)\pi<\gamma<\frac{3\pi}{2}+2n\pi$$

$$\frac{3\pi}{2}+2n\pi<\delta<2(n+1)\pi$$

答: α、β、γ、δ分别是第 I、II、III、IV 象限的角.

〔8〕 12. 设皮带轮的直径为 1.2 米, 每分钟旋转 300 次, 求

(1) 皮带轮的角速度(弧度/秒).

(2) 皮带轮上一点的线速度(米/秒).

(3) 每转一周所需时间.

解: (1) 因为皮带轮的角速度是单位时间内它旋转的弧度数,而每分钟它旋转 $300\times 2\pi$ 弧度. 所以

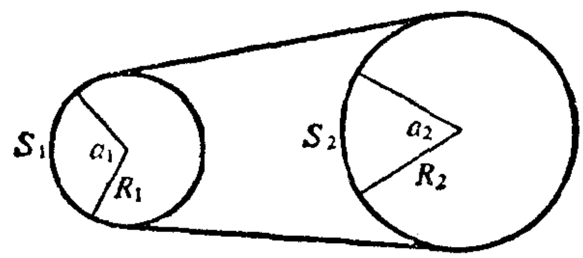
$$\omega=\frac{300\times 2\pi}{60}=10\pi(\text{弧度/秒})$$

(2) 又因为皮带轮旋转时的线速度是皮带轮上一点在单位时间内所经过的弧长, 已知皮带轮的直径为 1.2 米, 所以

$v=10\pi\times 0.6\approx 18.85$(米/秒)

(3) 0.2 秒.

〔8〕 13. 两皮带轮的半径是 $R_1=20, R_2=30$, 求它们的转速的比.



(第 13 题)

解: 转速比等于在相同时间内两轮的转角大小的比. 即求 $\alpha_1:\alpha_2$.

因为在相同时间内,两轮圈上转过的弧长相等,即

$$S_1=S_2$$

在弧度制下,

$$S_1=\alpha_1 R_1$$

$$S_2=\alpha_2 R_2$$

$$\therefore\quad \alpha_1 R_1=\alpha_2 R_2$$

$$\therefore \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{30}{20}$$

$$\therefore \qquad \alpha_1:\alpha_2=3:2$$

答：转速比为 3:2.

〔8〕 14. 在半径为R的圆中，一个扇形的圆心角为θ弧度，求证这个扇形面积为$\frac{1}{2}R^2\theta$.

证明：设扇形面积为S,其圆心角所对的弧长为l,则

$$S=\frac{1}{2}lR$$

而

$$l=R\theta$$

$$\therefore \qquad S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

〔8〕 15. 已知扇形的周长等于它所在圆的周长的一半，求这个扇形角的大小.

解：设扇形角为θ弧度，其半径为R,依题意，有

$$R+R+R\theta=\frac{1}{2}(2\pi R)$$

$$\therefore \qquad R(2+\theta)=\pi R$$

$$\therefore \qquad \theta=\pi-2$$

答：扇形角为$\pi-2$弧度.

第二节　任意角的三角函数

习　题　(第 17 页)

〔17〕 1. 已知角θ终边上一点的坐标为$(3,-4)$，求$\sin\theta$、

$\cos\theta$、$\operatorname{tg}\theta$、$\operatorname{ctg}\theta$、$\sec\theta$ 和 $\csc\theta$ 的值.

解: $r=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, 由三角函数的定义可知:

$$\sin\theta=-\frac{4}{5}、\quad \cos\theta=\frac{3}{5}、\quad \operatorname{tg}\theta=-\frac{4}{3}、$$

$$\operatorname{ctg}\theta=-\frac{3}{4}、\quad \sec\theta=\frac{5}{3}、\quad \csc\theta=-\frac{5}{4}.$$

〔17〕 2. $\sin\alpha$ 的值能大于 1 吗? 能小于 -1 吗? $\cos\alpha$ 的值呢?

答: $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值都不能大于 1, 也不能小于 -1. 即

$$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1,\quad -1\leqslant\cos\alpha\leqslant1.$$

〔17〕 3. 设 $\alpha=330°$, $\beta=-30°$, 试问 $\sin\alpha=\sin\beta$ 吗? 为什么? 能说明 $\alpha=\beta$ 吗?

答: $\because$ $\sin330°=\sin[360°+(-30°)]=\sin(-30°)$

$\therefore$ $$\sin\alpha=\sin\beta$$

所以不能说 $\alpha=\beta$.

〔17〕 4. 求下列三角函数的值:

$$\sin1110°,\quad \cos\frac{9\pi}{4},\quad \operatorname{tg}\frac{13\pi}{3},\quad \operatorname{ctg}(-330°)$$

解: $\sin1110°=\sin(3\times360°+30°)=\sin30°=\dfrac{1}{2}$

$$\cos\frac{9\pi}{4}=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg}(-330°)=\operatorname{ctg}(-360°+30°)=\operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}$$

〔17〕 5. 已知角的终边与 $y=2x$ 的图形重合, 求这个角的正弦与余弦.

解：设这个角为 α，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$.

因为角的终边与 $y=2x$ 的图形重合，可设 $x=1$，$y=2$. 或设 $x=-1, y=-2$，则 $r=\sqrt{5}$. 如图可知：

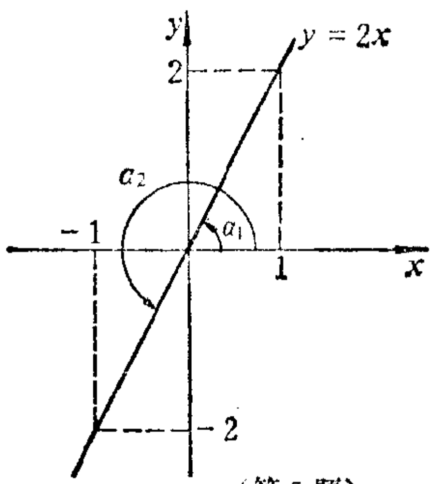
$$\sin\alpha=\sin(2k\pi+\alpha_1)=\sin\alpha_1=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha=\cos(2k\pi+\alpha_1)=\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

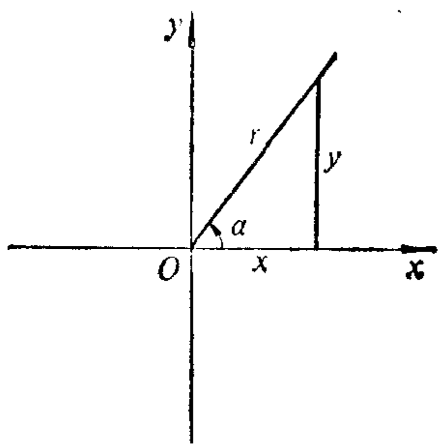
或

$$\sin\alpha=\sin(2k\pi+\alpha_2)=\sin\alpha_2=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha=\cos(2k\pi+\alpha_2)=\cos\alpha_2=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$



（第 5 题）



（第 6 题）

〔17〕 6. 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证：

(1) $\sin\alpha+\cos\alpha>1$. (2) $\mathrm{tg}\alpha>\sin\alpha$

证明：如图.

(1) $x>0$，$y>0$，且 $x+y>r$，

$\therefore\quad \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{x+y}{r}>1$

(2) $x>0$, $y>0$,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}.\text{ 而 } r>x,$$

$\therefore$ $\operatorname{tg}\alpha>\sin\alpha$

习　题　（第21页）

〔21〕 1. 判断下列三角函数值的正负号：

$\sin 146^\circ$, $\cos 146^\circ$, $\operatorname{tg} 146^\circ$, $\operatorname{ctg} 146^\circ$,

$\sin 214^\circ$, $\cos 214^\circ$, $\operatorname{tg} 214^\circ$, $\operatorname{ctg} 214^\circ$,

$\sin 326^\circ$, $\cos 326^\circ$, $\operatorname{tg} 326^\circ$, $\operatorname{ctg} 326^\circ$.

答：

α	146°	214°	326°
$\sin\alpha$	+	−	−
$\cos\alpha$	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	−	+	−

〔21〕 2. 判断下列三角函数值的正负号：

$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\frac{4\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$,

$\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$, $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\csc\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

答：$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$, $\cos\frac{4\pi}{3}<0$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}>0$,

$\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}<0$, $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)>0$, $\csc\left(-\frac{4\pi}{3}\right)>0$.

〔21〕 3. $\alpha=\frac{7\pi}{6}$时，哪几个三角函数值是负的？$\alpha=-\frac{5\pi}{3}$时，哪几个三角函数值是正的？

答：因为 $\alpha=\frac{7\pi}{6}$是第三象限的角，所以$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\sec\alpha$、$\csc\alpha$ 的值是负的；

因为 $\alpha=-\frac{5\pi}{3}$是第一象限的角，所以$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$、$\csc\alpha$ 的值都是正的.

〔21〕 4. 设A是三角形的一个内角，下列函数中哪些可能取负值：

(1) $\sin A$ (2)$\cos A$ (3)$\mathrm{tg}A$ (4)$\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}$

答：当$\frac{\pi}{2}<A<\pi$ 时，$\cos A$、$\mathrm{tg}A$ 取负值.

〔21〕 5. 依照下列条件，分别确定角θ所在象限：

(1) $\sin\theta$ 和 $\mathrm{tg}\theta$ 同号 (2) $\cos\theta$ 和 $\mathrm{tg}\theta$ 异号

(3) $\sin\theta\cdot\cos\theta>0$ (4) $\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{\cos\theta}<0$

答：(1) 第一象限或第四象限，

(2) 第三象限或第四象限，

(3) 第一象限或第三象限，

(4) 第三象限或第四象限.

〔21〕 6. 求下列各式的值：

(1) $5\sin 90^\circ+2\cos 0^\circ-3\sin 270^\circ+10\cos 180^\circ$

(2) $a^2\cos\frac{3\pi}{2}+b^2\sin 0+2ab\,\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{2}$

(3) $m\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{n\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\pi}+k\operatorname{tg}\pi$

(4) $a^2\cos0^\circ-b^2\sin270^\circ+ab\cos180^\circ-ab\cos0^\circ$

(5) $a^2\sin\frac{\pi}{2}+2ab\cos\pi+\frac{b^2}{\cos0}$

(6) $\sin\frac{3\pi}{2}-2\cos0-\operatorname{tg}\pi$

(7) $2\cos0^\circ+3\sin90^\circ-4\cos180^\circ+5\sin270^\circ$
$-6\cos360^\circ$

(8) $m\operatorname{tg}0^\circ+x\cos90^\circ-p\sin180^\circ-q\cos270^\circ$
$-r\sin360^\circ$

答：(1) 0　　(2) 0　　(3) $n-m$

(4) $(a-b)^2$　　(5) $(a-b)^2$　　(6) -3

(7) -2　　(8) 0

习　题　(第 27 页)

〔27〕 1. 化简下列各式(直接写出化简的结果):

(1) $\frac{1}{\csc\alpha}$　　(2) $\frac{2}{\sin\alpha}$　　(3) $\frac{1}{\sec^2\alpha}$

(4) $\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$　　(5) $\sin120^\circ\cdot\csc120^\circ$

(6) $\operatorname{tg}^2\theta\cdot\operatorname{ctg}^2\theta$　　(7) $\frac{1}{\sin\alpha\cos\beta}$

(8) $\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$　　(9) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$

(10) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$　　(11) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 10^\circ$

(12) $\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}$　　(13) $1-\cos^2\varphi$

(14) $1-\sin^2\frac{A}{2}$　　(15) $\cos^2\theta-1$

(16) $\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (17) $1+\operatorname{ctg}^2\theta$ (18) $\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha$

(19) $\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha$ (20) $\sec^2\varphi-1$

答: (1) $\sin\alpha$　(2) $2\csc\alpha$　(3) $\cos^2\alpha$

(4) $\operatorname{tg}^2\alpha$　(5) 1　(6) 1

(7) $\csc\alpha\sec\beta$　(8) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$　(9) $\cos\alpha$

(10) $\sin\alpha$　(11) 1　(12) 1

(13) $\sin^2\varphi$　(14) $\cos^2\frac{A}{2}$　(15) $-\sin^2\theta$

(16) $|\cos\theta|$　(17) $\csc^2\alpha$　(18) 1

(19) 1　(20) $\operatorname{tg}^2\varphi$

〔28〕 2. 已知 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 α 的其它各三角函数的值.

答: $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\operatorname{tg}\alpha=-2\sqrt{2}$，$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\sec\alpha=-3$，　$\csc\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

〔28〕 3. 已知$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，求 α 的其它各三角函数的值.

解: 因为已知 α 的余切值是负的，所以 α 在第二象限或在第四象限.

如果 α 在第二象限，那么

$$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3},\quad \sec\alpha=-2,\quad \cos\alpha=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \csc\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

如果 α 在第四象限，那么

$$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3},\quad \sec\alpha=2,\quad \cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \csc\alpha=-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

〔28〕 4. 用 $\cos\alpha$ 表示 $\sin\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$。

答：$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，$\operatorname{tg}\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$，

$$\operatorname{ctg}\alpha=\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

〔28〕 5. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，计算 $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$ 的值.

解：$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\pm\dfrac{a^2-b^2}{ab}$.

〔28〕 6. 证明下列恒等式：

(1) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\sec\alpha-\cos\alpha=\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$

(3) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$

(4) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$

(5) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

(6) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$

(7) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$