文科数学

数学在社会中的应用

张华安　编著

四川大学出版社

文 科 数 学

·数学在社会中的应用·

张华安　编著

四 川 大 学 出 版 社

一九九三年·成都

（川）新登字014号

内 容 提 要

本书用通俗的语言，简明地介绍了古典的和新近的一些数学知识。它们涉及到下面的一些领域：概率、统计、博弈、模糊集合、线性规划、突变理论、社会悖论、分形和微积分等。凡具有高中数学知识的人都可读懂。

本书可作大专院校文科本科生、专科生及有关研究生的教科书或参考书，也可作进一步学习有关内容的入门书。对于一般的管理、经营人员，中学教师，高中学生也可从中得到一些启迪。

责任编辑：陈昭麟
封面设计：冯先洁
技术设计：陈昭麟

文 科 数 学
·数学在社会中的应用·
张华安 编著

四川大学出版社出版发行 （成都市望江路29号）
四川省新华书店经销 成都市郫县犀浦印刷厂印刷
850×1168mm 32开本 13.125 印张 325 千字
1992年12月第1版 1992年12月第1次印刷
印数：0001—2000册
ISBN 7－5614－0608－8/O·77 定价4.20元

前 言

《文科数学》是一本介绍社会生活中有趣、有用、值得广大读者一读的数学书。社会离不开数学，数学能促进社会文明与进步，使人变得更加精明，尤其在各门学科互相渗透的今天，更是如此。

或许文科各系的自修生、大中专生、研究生会提出这样一个问题：我能不能读懂本书，对其内容能不能明瞭（我校历史系的学生学习后，回答是肯定的，能）；或许有的理、工、农、医的本科和专科生会提出另一个问题：我已学过高等数学，再阅读这些内容，有无必要？对这两个问题，只请读者翻阅一下本书的目录，并浏览各章便可得到解答。

本书的编排和材料的选择，几乎是各章自成一体系。而对内容的叙述、表达方式是让尽可能多的人读后都有所得。如果读者只有函数、直线方面的知识，我相信，在这基础上便可了解、接受书中描述的思想和内容。它的显著特点是，对于广大读者具有可读性。这种可读性是知识性、实用性、通俗性、趣味性的综合效果。其中的一些内容不但很有用，而且就撰者所见，在一般的高等数学书籍中是没有的。有的书虽有，由于需要很多的预备知识以及叙述的全面、详尽，以致于篇幅过大，这不能不使急于想了解的读者望书兴叹。如果本书中某部分内容引起了你的兴趣，需进一步深入了解，就请参看有关的专门书籍。

由于书中有最新的内容，对此，难免有不同的看法，因而对其评价也不同，其中有的评价相差悬殊。这些在相应的章或节的

前面部分给予介绍。

我认为，学习的最好方法是动手，动手推演书中的式子以及演算习题。这将极有利于掌握概念，理解定理，熟悉公式，训练思维，以及对演算出准确结果的技能的培养，这也是学好数学的一条捷径。在读本书时，理解书中的重要概念，读懂典型的例题，比较它的各种解法是主要的，单纯的记忆是次要的，而动手演算则是绝对必要的。

本书在几年前写了初稿，在授课的基础上，经过反复修改，在次序上作了调整、改动，又补充了不少材料使之更趋于完善。成稿后，请周城璧，陈庭龙，胡淑礼，周纪溥，张茂孝，田涛等教授、副教授审阅，他们提出了不少宝贵意见，在此，谨表我衷心的谢意。

由于编者水平有限，虽在编著过程中不断地进行了修改，挂一漏万，粗疏和处理失当的地方在所难免，敬请诸位读者赐教，本人将不甚感激，忱谢！

编著者

1992年2月

目 录

第一章 概率 统计

有关概率的研究起始于赌博。三百多年前，赌徒在投掷骰子时，很关心骰子出现的点数，为此而向法国数学家费尔马和数学家、哲学家巴斯加求教。他们于1654年正式开始研究概率论，可以说早期的概率论的出现和应用与赌博问题有关。因此，有人认为概率"出身"不好，对其贬之。时至今日，情况又如何了呢？它在自然科学中的种种应用，已鲜为人知，不用赘述，在社会生活及社会科学中的应用越来越广泛。例如，发行彩票（奖券）集资，就与其有关。西方政治家用它组织竞选活动，零售商利用它组织进货，农民用它计划收获，政府用它制订年度预算，心理学家用它研究思维过程，民意测验机构用它进行民意测验等等，可见，概率无论在自然科学，还是在社会科学以至于社会生活中，都越来越显示出它的强大生命力。

第一节 随 机 试 验

我们常常会遇到下面的两类现象：必然现象和随机现象。必然现象是指在一定条件下，一定（必然）会出现的现象。例如，"用手向上抛一石子，它最终必然下落着地"，"同性电荷互相排斥"等等。所谓随机现象，指的是在条件完全相同时，出现的结果一般不尽相同。例如，抛一枚伍分硬币，在桌面上可能出现"国徽"一面，也可能出现"伍分"这一面。每一次抛时，事先完全不能确定最终出现的是"国徽"还是"伍分"。又如某电话

交换台，在每天上午 8 点至 9 点钟接到的电话呼唤次数，事先也不能精确地知道。再如，掷骰子时，谁也不能在掷之前断言一定出现几点。如果在一大箱零件中，随意地取出一只，事先也难以判断其是正品还是次品。

为了叙述方便起见，我们约定："把掷一次硬币"、"掷一次骰子"、或"从一箱零件中拿出一只来"叫做进行了一次试验，简称"**试验**"，把观察到的结果称为试验的结果或**事件**。如果我们观察的是随机现象，就称此试验为随机试验。随机试验具有以下三个特点：

（1）可以在完全一样的条件下重复地进行；

（2）每次试验可能的结果不止一个，而且可以在试验之前列出试验的所有可能结果；

（3）在进行每一次试验之先，不能确定哪一个结果一定出现。

我们是通过随机试验来研究随机现象的。为了明白一些抽象概念的含义，我们从一些具体的、自己动手还可以进行的一些试验出发（如抛硬币，掷骰子等等），逐步引出一些概念。因为用掷骰子作试验简易可行，用它的结果来解释有关的概念，简单明瞭，具有典型性。本书之所以常以它为例，其原因就在于此。

下面先介绍一些基本概念。我们以掷硬币、骰子为例。掷一次伍分硬币，"出现国徽"或"出现伍分"就称为试验中的随机事件，简称事件。掷骰子时，"出现1点"或"出现2点"…或"出现 6 点"就是试验中的事件，它们是这个试验的最简单的事件，我们称这些简单的事件为基本事件。在试验中，除了简单的事件外，还有其它的随机事件。例如，在掷骰子试验时，"出现偶数点"，也是一个随机事件。这个事件是由"出现 2 点"、"出现4点"和"出现 6 点"组成的。在随机试验中，所有基本事件组成的集合称为此试验的**样本空间**。例如，掷伍分硬币试验的样本空

间S_1：

$$S_1=\{\text{“出现国徽”；“出现伍分”}\}$$

掷一粒骰子的样本空间S_2：

S_2＝{“出现1点”，“出现2点”，…“出现6点”}。为了书写简单，常常将其简写成

$$S_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

例1.1 同时掷两枚硬币，一枚贰分，一枚伍分，求此试验的样本空间E。

解 每一结果(称为事件)由“国徽”或“伍分”之一与“国徽”或“贰分”之一所组成。因此，可以用一括号(A，B)表此事件，其中A表示伍分硬币出现的结果，B表示贰分硬币出现的结果。

E＝{(“国徽”，“国徽”)，(“国徽”，“贰分”)，(“伍分”，“国徽”)，(“伍分”，“贰分”)}

此样本空间由四个形如(A，B)的元素组成，把每一个，例如(“国徽”，“贰分”)，称为一个样本点。为了简单起见，用“正”或“+”表出现国徽，用“反”或“-”表示出现硬币币值的一面。于是样本空间

E＝{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)}

例1.2 先掷一枚硬币，后再掷一粒骰子，求此试验的样本空间E。

解 列出全部可能结果，得表1.1。

从表1.1看出，样本空间E有12个元素，也就是说E有12个基本事件，即

E＝{(正，1)，(正，2)，(正，3)，(正，4)，(正，5)，(正，6)，(反，1)，(反，2)，(反，3)，(反，4)，(反，5)，(反，6)}

例1.3 掷两粒骰子，求其样本空间。

解 为了醒目，设两粒骰子的颜色不同，一粒红，一粒白。

表1.1

出现点数 / 向上面	1	2	3	4	5	6
正面	1	2	3	4	5	6
	正	正	正	正	正	正
反面	1	2	3	4	5	6
	反	反	反	反	反	反

我们用（A，B）表示红骰子出现的是A点，而白骰子出现的是B点。例如，（4，2）就表示红骰子出现4点，同时白骰子出现的是 2 点。所求样本空间可用表1.2表示。

表1.2

红 / 白	1	2	3	4	5	6
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)

样本空间的样本点，也可用直角坐标上的点表示。例如（4，3）可看作横坐标是 4，纵坐标是 3 的一个点。

于是，样本空间在直角坐标系就是在图 1.1 中标出的 36 个点。

在每次试验中，一定会出现的事件叫做必然事件。例如，在掷骰子试验中，事件“出现的点数不大于 6 ”就是必然事件。在

试验中，把不可能发生的事情叫做不可能事件。例如，掷一粒骰子时，“出现大于6点”的事件就是不可能事件。

这里举例用的骰子、硬币，是理想的、绝对均匀的，桌面也是光滑的理想平面。每次掷的结果不会出现硬币直立于桌面或骰子的棱立于桌面的情形。

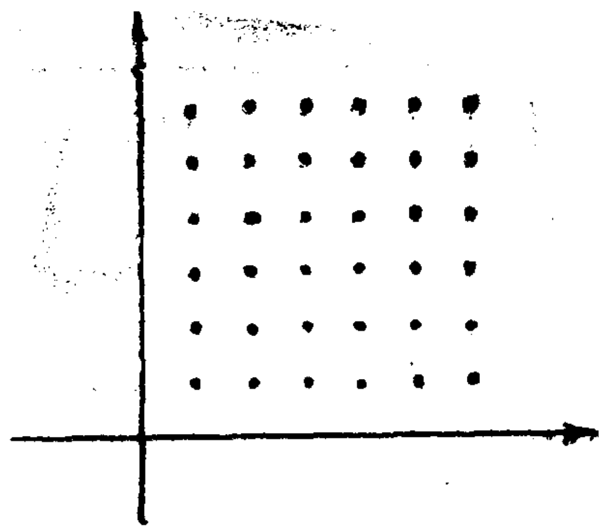

图1.1

第二节　概　率

在抛一枚硬币时，虽然我们不能事先判断结果是出现正面还是出现反面，似乎出现正面、反面都是偶然的，然而，这种偶然性，正如恩格斯所说：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题是在于发现这些规律”①。那么，隐蔽着的规律是什么呢？这正是我们要讨论的。

掷一次硬币，虽不能断定必然出现哪一面，但总会出现一面：正面、反面。我们先来猜测一下出现正面、反面的可能性。由于硬币是均匀的，我们立刻会猜到出现正面、反面的可能性是一样的。其根据是我们的生活经验、想象、推理。这种猜测对不对呢？现在来看历史上一些人的实验结果，见表2.1。

从表2.1可以看出，不管谁抛掷硬币，掷的次数越多，频率越接近$\frac{1}{2}$。

① 《马克思、恩格斯选集》第四卷第243页。

表2.1

实验者	投掷次数 n	出现正面的次数 μ	频率 $=\frac{\mu}{n}$
隶莫庚	2048	1061	0.5180
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼罗夫斯基	80640	39699	0.4923

在掷一粒均匀的骰子时，就某一次试验而言，我们不能肯定出现几点，但是，大量投骰后，经过统计结果，会发现出现1点的次数 μ 与投掷总次数 n 之比 $\frac{\mu}{n}$ 接近 $\frac{1}{6}$。出现 2 点的次数与投掷总数之比也接近 $\frac{1}{6}$。

概率的统计定义：

定义2.1 在相同条件下，重复作 n 次试验。用 μ 表示在 n 次试验中事件 A 发生的次数。如果频率 $\frac{\mu}{n}$ 在 $n\to\infty$ 时接近于数 p，称 p 是在此条件下事件 A 发生的**概率**，或说事件 A 发生的概率，记成 $P(A)=p$。

据此定义，因为 $0\leqslant\frac{\mu}{n}\leqslant 1$，于是 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，对于不可能事件 U，因它绝不会出现，即 $\mu=0$，因此 $P(U)=0$。而对于必然事件 V，由于次次出现，因此 $\mu=n$，由此得 $P(V)=1$。

由此定义及表2.1所示的实验结果，在掷硬币的试验中，我们就可以说出现正面的概率是 $\frac{1}{2}$，也可以说出现正面的可能性是 $\frac{1}{2}$。

这样一来，我们就用一个数来表示可能性的大小，即事件发生可能性的大小。

如果都根据这个定义来确定一个事件的概率，就必须做大量的试验，花费不少的精力和物力，这显然是不经济的。这就是此定义的缺点。于是就有了抽象的、公理化的定义方法。虽然如此，统计定义能在一定程度上反映事件发生可能性的大小，而且较为直观，因而简单易懂，这是它的优点。

由统计定义确定一事件的概率，有时也无需做试验。仍以掷硬币为例。因为硬币是均匀的，借助于我们的想象和推理能力，可以判断出现正面、反面的机会（或可能性）是一样的，因而概率也是一样的。

为了便于实际计算概率，我们引出等可能事件的定义。

定义2.2 在试验中，称一组事件 A_1，A_2，…，A_n 是一个**等可能事件组**（或称事件 A_1，A_2，…，A_n 是**等可能事件**），是指它们满足下列条件：

（1）事件 A_1，A_2，…，A_n 发生的可能性（或机会）相同；

（2）在任意一次试验后，A_1，A_2，…，A_n 之中至少有一个事件要发生（即除此之外，不可能再有其它的结果发生）；

（3）在任意一次试验后，A_1，A_2，…，A_n 之中最多也只有一个事件发生。

例如，掷硬币试验的等可能事件组是，出现正面，和出现反面。掷一粒骰子试验的等可能事件组是 $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，即前面已提到的样本空间。

设 A_1，A_2，…，A_n 为等可能事件组，而 B 为其中的某 m 个事件（m 也表示 B 能够发生的各种状态的数目）所组成的事件，大量实践经验验证，事件 B 发生的概率可用下面公式来计算

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{B\text{中所包含的等可能事件组的事件个数}}{\text{等可能事件组的总数目}}$$

此式称为概率的**古典概型定义**，在概率论发展初期它曾是主要研究对象。其优点是，用一个严格的公式表示概率，而缺点是，它适用的对象仅限于有限个等可能事件组的情况。但是，就实用而言，用它计算事件的概率，既可信又方便。

例2.1 掷一粒均匀的骰子，求下列事件发生的概率：（1）A＝{出现偶数点}；（2）B＝{出现不小于3的点}；（3）C＝{出现3的倍数点}。

解 由于骰子是均匀的，故出现1点，出现2点，…，出现6点是等可能的。

设A_1＝{出现1点}，A_2＝{出现2点}，…，A_6＝{出现6点}，则A_1，A_2，…，A_6是等可能事件组，因此$n=6$。

（1）事件A可看成由事件A_2＝{出现2点}，A_4＝{出现4点}，A_6＝{出现6点}而组成，因此$m=3$。

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

（2）B可看作是由事件A_3＝{出现3点}，A_4，A_5，A_6而组成的，此时$m=4$时。因此

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

（3）C是由事件A_3＝{出现3点}，A_6＝{出现6点}组成的，因此$m=2$。

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

例2.2 试验是“将一枚硬币抛3次”，求下列事件的概率：（1）用A_1表示事件：“恰有一次出现正面”；（2）用A_2表示“至少有一次出现正面”的事件。

解 为了求出等可能事件的总数目，我们采用记号（正，正，反）表示第一次、第二次都出现正面，而第三次出现反面的