半解析函数
共轭解析函数

王见定　著

北京工业大学出版社

TJ11 /21/0119

半解析函数、共轭解析函数

王见定 著

北京工业大学出版社

半解析函数、共轭解析函数

王见定 著

*

北京工业大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京工业大学印刷厂印装

*

850×1168毫米 32开本 $3\frac{5}{16}$印张 78千字

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数：1～3000册

ISBN 7—5639—0031—4/G·19

定价：2.50元

简　　介

本书将解析函数进行了全面推广，提出了半解析函数、共轭解析函数的全新概念及相应的理论，并说明了这套理论在电磁场、流体力学、弹性力学、几何变换等领域的应用。该理论比较系统，内容新颖，由于它提供了怎样提出新概念、怎样应用新概念的方法，因而对从事理论研究和应用开发研究的科学工作者是一本重要的参考书。本书还可作为理工科院校复变函数的学习教材.

序

本书分两篇，第一篇提出的半解析函数的概念，将解析函数进行了推广，得到了不少好的结果及应用．第二篇论述的共轭解析函数则是和解析函数对称的一类函数，它是一种具有特殊变化率的复变函数，它几乎和解析函数一样美妙，并在很多领域中有它独到的应用．

半解析函数、共轭解析函数试图把复变函数研究推向立体化．

由于作者的水平所限，书中一定存在不少缺点和错误，恳請批评指正．

王见定

1988年8月于中国人民大学一分校

目　　录

第一章　半解析函数

第一章　半解析函数

§1. 定义

假设函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在域D内连续.

定义 1　称$f(z)$在（x_0,y_0）点是第一类半解析的，若在（x_0,y_0）的一个邻域内u_x、v_y连续，且$u_x=v_y$.

定义 2　称$f(z)$在域D内是第一类半解析的，若对D内任意一点（x，y），$f(z)$是第一类半解析的.

定义 3　称$f(z)$在(x_0，y_0）点是第二类半解析的，若在（x_0，y_0）的一个邻域内u_y、v_x连续，且$u_y=-v_x$.

定义 4　称$f(z)$在域D内是第二类半解析的，若对D内任意一点（x，y），$f(z)$是第二类半解析的.

定义 5　设$f(z)$在区域D内半解析，考虑一个包含D的更大区域G，若存在$F(z)$在G内半解析，且在D内$F(z)=f(z)$，则称$F(z)$为$f(z)$在区域G内的半解析开拓.

定义 6　设D是一个区域，$f(z)$在D内半解析，称二元体$\{D,\ f(z)\}$为一个半解析元素．两个半解析函数当且仅当其区域重合，而且在其内对应的函数相等时，才称为恒等.

§2. 存在性

定理 1　若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在域D内是解析的，则形如$f^*(z)=[u(x,y)+\varphi(y)]+i[v(x,y)+\psi(x)]$

的函数在 D 内是第一类半解析的.

定理 2 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在域 D 内是解析的，则形如 $f^*(z)=[u(x,y)+\psi(x)]+i[v(x,y)+\varphi(y)]$ 的函数在 D 内是第二类半解析的.

其中 $\varphi(y)$，$\psi(x)$ 分别为 D 内的连续函数.

定理1、2根据定义容易验证.

§3. 主要性质

定理 3 第一类（第二类）半解析函数的实系数线性组合仍为第一类（第二类）半解析函数.

定理 3 由定义容易验证.

定理 4 若 $f(z)$ 在域 D 内是第一类半解析的，u_y、v_x 连续，且 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 D 内是第一类半解析的，则 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

证明 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u+iv$

$$F(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$$

$$=\frac{[u(x-x_0)+v(y-y_0)]+i[v(x-x_0)-u(y-y_0]}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$$

由于 $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=\dfrac{\partial\eta}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$

不难得到

$$(y-y_0)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

在 $y-y_0\neq 0$ 的域 D 内，必有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

故在$y-y_0\neq 0$的域D内，$f(z)$是解析的．

又由u_y、u_x在域D内的连续性，可推出在$y-y_0=0$的直线上也有$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$，故在域$D$内$f(z)$是解析的．

推论 设$f(z)$在域D内第一类半解析，u_y、v_x连续，则

$f(z)$在D内解析$\Longleftrightarrow$存在一点$z_0\in D$，使得

$$f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$$

其中$\varphi(z)$在D内是第一类半解析的．

推论容易验证，只须令$\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$．

定理 5 若$f(z)$在域D内是第二类解析的，u_x、v_y连续，且$\dfrac{f(z)}{z-z_0}$在D内是第二类半解析的，则$f(z)$在D内是解析的．

推论 设$f(z)$在D内是第二类半解析的，u_x、v_y连续。

$f(z)$在D内是解析的$\Longleftrightarrow$存在一点$z_0\in D$，使得$f(z)=(z-z_0)\varphi(z)$．

其中$\varphi(z)$在D内是第二类半解析的．

定理5及其推论仿定理4及其推论的证明，容易得到．

假定下面所有的围线都是可求长的约当曲线．

定理 6 若$f(z)$在单连通域D内是第一类半解析的，C为D内任意一条围线，则$\int_C f(z)dz$为一实数．

定理6容易验证．

定理6的消弱形式：

定理 7 C为一围线，若$f(z)$在C的内部第一类半解析，在C及其内部组成的闭域G上连续，则$\int_C f(z)dz$为一实数．

为了证明定理7，先看：

引理 对于任一正数δ，任一可求长约当曲线C：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$的内部能被直线$x=\alpha+m\delta$，$y=\beta+m\delta$（$m=0$，$\pm1$，$\pm2$，…）上的线段分成有限个区域，其中每一个的高度与宽度均小于2δ，α、β由δ取定后适当可取．

下面证明定理7．

证 因为$f(z)$在闭域G上一致连续，
所以对于任意$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$（$\delta<1$）使当

$$|z-z_0|<4\delta \quad \text{时} \qquad (z,\ z_0\in G)$$

有

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \tag{1}$$

由引理，将C之内部分成有限个区域，其中每一个高度和宽度均小于2δ，并用C_1，…，C_N表示这些边界，用S表示由直线$x=\alpha+m\delta$与$y=\beta+m\delta$（$m=0$，±1，±2，…）所形成的正方形系统．假定S的每一个正方形没有一边或几边能将曲线C_n分成两个简单闭曲线，而其中之一为正方形边界．因为如果这样，我们只须用此二闭曲线来代替C_n．显然，每一个C_n是一个可求长的闭约当曲线，而且

$$I_m\int_C f(z)dz=\sum_{n=1}^{N} I_m\int_{C_n} f(z)dz \tag{2}$$

这里所有一切积分均沿正方向取的．不仿设曲线C_1，…，C_N中，前q个并只有q个与C有公共点，其余的都是完全位于C之内部的正方形边界．对它们引用定理6，我们有

$$I_m\int_{C_n} f(z)dz=0$$

从而由(2)式有

$$I_m\int_C f(z)dz=\sum_{n=1}^{q} I_m\int_{C_n} f(z)dz \tag{3}$$

设C、C_n的长度分别为L、L_n. 显然，$\sum_{n=1}^{q} L_n-L$ 最多等于S中其边含有C的点的诸正方形周界之和；而这些正方形的数目$\leqslant 4(L/\delta+1)$．因为一个长度$<\delta$的弧最多只能同 4 个这样的正方形有公共点．由于$\delta<1$，我们有

$$\sum_{n=1}^{q} L_n-L\leqslant 16(L/\delta+1)<16L+16\delta$$

于是

$$\sum_{n=1}^{q} L_n<17L+16 \tag{4}$$

设z_0为C_n内部或C_n之一点，由于C_n直径$<4\delta$，于是对于C_n任一点z，式(1)均成立．于是

$$\begin{aligned}&\left|I_m\int_{C_n}[f(z)-f(z_0)]dz\right|\\&\leqslant\left|\int_{C_n}[f(z)-f(z_0)]dz\right|<\varepsilon L_n\end{aligned} \tag{5}$$

但是

$$\begin{aligned}I_m\int_{C_n}[f(z)-f(z_0)]dz&=I_m\int_{C_n}f(z)dz-\\&I_m\int_{C_n}f(z_0)dz=I_m\int_{C_n}f(z)dz\end{aligned}$$

由此得到

$$\left|I_m\int_{C_n}f(z)dz\right|<\varepsilon L_n \tag{6}$$

由(3)、(4)、(6)式有

$$\left|I_m\int_C f(z)dz\right|=\left|\sum_{n=1}^{q} I_m\int_{C_n} f(z)\,dz\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{q}\left|I_m\int_{C_n} f(z)dz\right|\leqslant\sum_{n=1}^{q}\varepsilon L_n<\varepsilon(17L+16)$$

由ε的任意性，故$I_m\int_C f(z)dz=0$.

定理 8 若$f(z)$在单连通域D内是第二类半解析的，C为D内任意一条围线，则$\int_C f(z)dz$为一虚数.

此结论容易证明.

定理 8 的消弱形式：

定理 9 C为一围线，若$f(z)$在C的内部第二类半解析，在C及其内部所组成的闭域G上连续，则$\int_C f(z)dz$为一虚数.

此结论仿定理 7 的证明可以得到.

定理10 设D是围线$C=C_0+C_1+\cdots+C_n$所围成的有几个"洞"的复通区域，$f(z)$在D内是第一类半解析的，则$\int_C f(z)dz$为一实数.

此结论显然成立.

类似地，定理 8 也可以推广到复通区域.

定理11 若$f(z)$沿单连通区域D内的任意一条围线的积分为一实数，u_x、v_y连续，则$f(z)$在D内是第一类半解析的.

证明 设C为D内任一条围线，G为C的所围区域，我们有

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

因为

$$\int_C f(z)dz \text{为一实数,}$$

所以

$$\int_C vdx + udy = 0\,,$$

所以$\iint_C (u_x - v_y)dxdy = \int_C vdx + udy = 0\,.$

由 $u_x - v_y$ 的连续性及沿任一条围线的积分为实数，可推出

$$u_x - v_y = 0 \qquad \text{在}G\text{上成立.}$$

定理12 若$f(z)$沿单连通区域 D 内的任意一条围线的积分为一虚数，u_y、v_x 连续，则 $f(z)$在 D 内是第二类半解析的.

此结论仿定理11的证明容易得到.

易知上述两个结论对于复通区域也成立.

定理13 若$f(z)$在域D内是第一（二）类半解析的，则$if(z)$在域D内是第二（一）类半解析的.

此结论很容易验证. 它表明两类半解析函数的相互转化，实际上是几何上的一种特殊的90°旋转.

定理14 若 $f(z)$是第二类半解析的，则一定存在实函数$\varphi(x, y)$使得$\overline{f(z)} = \nabla\varphi(x, y)$，且这样的$\varphi(x, y)$有无穷多个，但彼此相差一个常数. 反之，若$\overline{f(z)} = \nabla\varphi(x, y)$，则$f(z)$是第二类半解析的.

其中 $\nabla\varphi(x, y) \equiv \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

证明 设$f(z) = u + iv$. 因为 $f(z)$是第二类半解析的，所以

$$\int_C udx - vdy = 0 \qquad (C\text{为任一围线})$$

故可定义

$$\varphi(x,\ y)\triangleq\int_{(x_0,\ y_0)}^{(x,\ y)} udx-vdy$$

于是

$$\varphi(x+\Delta x,\ y)-\varphi(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} udx-vdy$$

$$=u(x+\theta\Delta x,\ y)\Delta x \qquad (0<\theta<1)$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x}=u(x,\ y)$$

即
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u(x,\ y)$$

同理可证

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-v(x,\ y)$$

所以

$$\overline{f(z)}=\nabla\varphi(x,\ y)$$

显然，这样的$\varphi(x,\ y)$不止一个，且彼此相差一个常数．逆定理也容易验证．

定理15 若$f(z)$是第一类半解析的，则一定存在实函数$\varphi(x,\ y)$使得$\overline{if(z)}=\nabla\varphi(x,y)$，且这样的$\varphi(x,\ y)$有无穷多个，但彼此相差一个常数．反之，若$\overline{if(z)}=\nabla\varphi(x,y)$，则$f(z)$是第一类半解析的．

证明 因为$f(z)$是第一类半解析的，所以$if(z)$是第二类半解析的，于是定理15的证明转为定理14的证明．

定理16 若$f(z)=(u(x,y,\ v(x,y))$是第一类半解析的，则一定存在$\mathbf{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，使得

$\mathbf{a}=(u(,y),\ -v(x,y),\ w(x,y))=\nabla\times\mathbf{b}$. 相反的，若$\mathbf{a}=(u(x,y),\ -v(x,y),\ w(x,y))=\nabla\times\mathbf{b}$，则 $f(z)=(u(x,y),\ v(x,y))$ 一定是第一类半解析的，且满足$\mathbf{a}=\nabla\times\mathbf{b}$的$\mathbf{b}$有无穷多个，但彼此相差一个$\nabla\varphi$.

$$\text{其中}\quad \nabla\times\mathbf{b}\equiv\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

定理 17 若$f(z)=(u(x,y),v(x,y))$是第二类半解析的，则一定存在$\mathbf{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$使得 $\mathbf{a}=(-v(x,y),\ -u(x,y),\ w(x,y))=\nabla\times\mathbf{b}$. 相反的，若$\mathbf{a}=(-v(x,y),\ -u(x,y),\ w(x,y))=\nabla\times\mathbf{b}$，则 $f(z)=(u(x,y),\ v(x,y))$ 一定是第二类半解析的，且满足$\mathbf{a}=\nabla\times\mathbf{b}$的$\mathbf{b}$有无穷多个，但彼此相差一个$\nabla\varphi$.

以上两个结论的证明类似定理14、15的证明.

定理 18 $\{D_1,\ f_1(z)\}$，$\{D_2,\ f_2(z)\}$为二个同类的半解析元素.

(1) 区域D_1和D_2有一个公共域d_{12}，D_1及D_2互不包含.

(2) $f_1(z)=f_2(z)$，$z\epsilon d_{12}$，

则$\{D_1+D_2,\ F(z)\}$也是一个半解析元素.

$$\text{其中}\quad F(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\epsilon D_1-d_{12} \\ f_2(z) & z\epsilon D_2-d_{12} \\ f_1(z)=f_2(z) & z\epsilon d_{12} \end{cases}$$

定理 19 $\{D_1,\ f_1(z)\}$，$\{D_2,\ f_2(z)\}$为二个同类半解析元素.（此处以第一类为例）

(1) 区域D_1与D_2不相交，但有一段公共边界，除掉其端点后的开弧记为Γ.

(2) $f_1(z)$、$u_x^{(1)}$、$v_y^{(1)}$在$D_1+\Gamma$上连续，

$f_2(z)$、$u_x^{(2)}$、$v_y^{(2)}$在$D_2+\Gamma$上连续，

则$\{D_1+\Gamma+D_2, F(z)\}$也是一个半解析元素.

$$\text{其中，} F(z)=\begin{cases} f_1(z) & z\in D_1 \\ f_1(z)=f_2(z) & z\in\Gamma \\ f_2(z) & z\in D_2 \end{cases}$$

以上两个结论由定理6、8、11、12仿解析开拓容易证明，且开拓一般不是唯一的.

§4. **物理背景**

为叙述方便，下面以流体力学为例.

设流体在z平面某一区域D内作定常流动，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$表示$z\in D$处的流速，$u(x,y)$、$v(x,y)$分别是$f(z)$的水平及垂直分速. 现考察流体单位时间流过r的流量.

设 N_γ为单位时间内流过r的流量，

Γ_γ为流速的环量，

则

$$N_\gamma=\int_\gamma\left(u\frac{dy}{ds}-v\frac{dx}{ds}\right)ds=\int_\gamma -vdx+udy$$

$$\Gamma_\gamma=\int_\gamma\left(u\frac{dx}{ds}+v\frac{dy}{ds}\right)ds=\int_\gamma udx+vdy$$

写成复数形式：

$$\Gamma_\gamma+iN_\gamma=\int_\gamma udx+vdy+i\int_\gamma -vdx+udy$$

$$=\int_\gamma \overline{f(z)}\,dz$$