四川省中学生数理化竞赛

数学讲座

（附：参考题及其解答）

上

四川人民出版社

四川省中学生数理化竞赛

数　学　讲　座

（附：参考题及其解答）

四　川　省　数　学　会　普　及　组
四川省教育局教材编写、教学研究室　编

四　川　人　民　出　版　社

一九八〇年·成都

四川省中学生数理化竞赛 **数学讲座 上**

四川人民出版社出版　　达县新华印刷厂印刷

四川省新华书店重庆发行所发行

开本850×1168毫米　1/32　印张10.75　字数264千

1980年9月第1版　　1980年9月第1次印刷

印数：1—31,360册

书号：13118·28　　定价：0.97 元

前　言

遵照中央教育部指示，今年二月，我省开展了中学生数学、物理、化学竞赛活动．有四十名中学生还参加了建国以来举行的第一次全国数学竞赛．

为了适应我省中学生参加全国数学竞赛的需要，我们在四川大学、四川师范学院、成都地质学院、成都师范学校高师班和成都市部分中学的大力支持下，举办了一个短期培训班．在此期间，我们邀请成都地区数学界知名教授和部分中学数学教师开设讲座，本书就是根据讲座稿修改整理编成．讲座内容，主要参照《全日制十年制学校数学教学大纲》（试行草案）和《一九七九年高考复习大纲·数学部分》的要求，分成十七个专题．通过这些专题的学习，对中学数学基础知识的巩固和提高，对综合运用分析问题和解决问题能力的培养有一定帮助．

由于讲座内容比较丰富（附有若干练习题与综合参考题和解答），对中学生进一步学习和中学数学教师教学有参考价值，曾受到好评．为此，我们请讲课老师修改整理，由四川人民出版社出版，以飨读者．

限于水平，书中所讲难免没有缺点、错误，我们殷切希望广大读者批评指正．

四川省数学会普及组
四川省教育局教材编写、教学研究室

一九七九年九月

目　次

第一讲

漫谈数学与四个现代化

柯 召

党的十一届三中全会决定，从一九七九年起，把全党工作着重点转移到社会主义现代化建设上来．这一伟大英明的战略决策是历史的要求、人民的愿望．

在本世纪内把我国建设成为农业、工业、国防和科学技术现代化的伟大的社会主义强国，这是中国人民的光荣的历史使命．四个现代化的关键是科学技术的现代化．如果科学技术落后，农业、工业和国防的现代化就要落空．为了从根本上改变我国经济落后状况，消除在社会帝国主义可能的侵略面前被动挨打的危险，巩固无产阶级专政，防止资本主义复辟，对人类作出较大贡献，必须首先突破科学技术现代化这一关，使科学技术走在经济建设前面．所以，能不能尽快地把科学技术搞上去，是一个关系到社会主义建设的全局、关系到我国的前途的大问题．

数学是一门基础科学，它研究的对象是现实世界的空间形式和数量关系．它是一切精确科学的基础，是人类认识自然和改造自然的基本工具，因为任何科学都是离不开“形”和“数”的．革命导师马克思和恩格斯都十分重视数学．拉法格在《马克思回忆录》一书中写道：“按照马克思的看法，任何一门科学，只有当它充分应用了数学时才能算做很好地开展了．”马克思还写出了精辟的微积分数学论文《数学手稿》．恩格斯在他写的《自然

辩证法》和《反杜林论》中，对数学的产生的历史、发展的动力，以及应用与作用，都有非常精辟的论述．数学在科学技术现代化中有着重要的地位和作用．科学越发达，需要的数学工具越多，计算就越复杂．

在上一世纪，恩格斯说：“数学的应用：在固体力学中是绝对的，在气体力学中是近似的，在液体力学中已经比较困难了；在物理学中多半是尝试性的和相对的，在化学中是最简单的一次方程；在生物学中等于零．”这在当时是完全正确的．但是在现在，众所周知，力学和物理学是离不开数学的．近代化学要用到群论和图论等数学分支，还形成了一门科学分支叫做计算化学．联合国教科文组织关于科学研究主要趋势的调查报告中曾指出，目前科学研究工作有两个特点：一是所有各门学科的“数学化”；二是生物学的突飞猛进．这两种趋势的汇合，导致了“生物数学”这门边缘科学分支的出现．这门科学分支又派生出许多小的分支，如数量遗传学、分子生物数学、生物统计学、生物概率论、生物运筹学等等，纵横交错，内容非常丰富．数学已深入到生物学领域，是推动当前生物学发展不可缺少的工具．

美国“阿波罗”飞行计划把人送上月球的过程，是一个很复杂的过程，它必须依赖于许多极为精确的计算．没有数学这是肯定不行的．

不仅对自然科学，数学很重要，而且，由于计算机的出现，数学已经渗透到社会科学的许多领域，如经济学、语言学、历史学等学科中．从而离散性的数学分支，如数论、代数、组合论等数学分支已逐渐显出它们的重要性．

去年，华罗庚同志来成都推广统筹法和优选法，其中有许多东西如分数法就是用的离散性数学．对我市的工业生产起到了增产的作用，节省了大量的资金、材料和人力．

数学这门科学虽然具有高度的抽象性、严密的逻辑性，却又

同时具有广泛的应用性．也正因为它有高度的抽象性和严密的逻辑性，所以也就会有广泛的应用性．以上的例子都说明了数学目前取得了极其广泛的应用性．

数学是随着社会生产力的发展而发展起来的一门科学．它不仅可以描绘自然规律和纷繁多变的自然现象，而且对科学技术的发展起着巨大的推动作用．现在举出几个较明显的例子：

太阳系最远的行星之一的海王星是在1846年在数学计算的基础上被发现的．天文学家阿达姆和勒来累分析了天王星运动的不规律性，得出的结果说，这种不规律性是由其它行星的引力所发生的，勒来累根据力学法则和引力法则计算出这颗行星应该位于何处，他把结果告诉了观察员，而观察员果然就从望远镜中在勒来累指出的位置上看到了这颗星．这个发现不仅是力学和天文学特别是哥白尼体系的胜利，而且也是数学计算的胜利．

另一个例子是电磁波的发现．英国物理学家马克斯威尔概括了由实验建立起来的电磁现象，把这些规律表达为方程的形式．他用纯粹数学的方法从这些方程推导出可能存在电磁波，并且这种电磁波应该以光速传播着．根据这一点，他提出了光的电磁理论．这个理论，以后被全面地发展和论证了．

科学就是这样，从观察，进入分析概括，进入规律的提出以及它们的数学表达式．新的结论从这些规律中产生，而最后，理论又体现在实践中，受实践的检验并且指导实践．实践也给予理论以向前发展的新的强有力的动力．

特别值得注意的是，没有从自然科学或技术方面来的直受推动，而仅从数学本身内部产生的最抽象的数学体系，甚至也有极有的价值的应用．例如，虚数在代数中出现了．在很长一段时间内它的实在意义都没有被理解．这一情况可以从它的 名 称 中看出，但是以后，建立了复变函数的广泛理论，成为解决许多技术问题的很现实的工具．关于机翼上升的基本定理就是以这个理论

作为工具来证明的。

非欧几里德几何是另一个同样光辉的例子。它是从欧几里得时代起的几千年中人们想要证明平分公理的企图中，也就是说，从一个只有纯粹的数学兴趣的问题中产生的。后来成为广义相对论的基础之一。看来是抽象的数学体系，成为一个最重要的物理理论发展的有力工具。同样地，在原子现象的近代理论中，在量子力学中，实际上都运用着许多高度抽象的数学概念和理论。比如，无限低空间的概念，等等。

大家看过美国的科学幻想片《未来世界》，这是一部描述机器人的幻想片。由于计算机的出现，人工智能等科学 分 支 的产生，已经制造出了机器来，而且在逐步发展中，虽然不是象《未来世界》这部影片中描述的那样，记者同和自己一样的机器人打架，但是现在已经出现的机器人，比代替人在恶劣环境下工作的原始机械手已经前进了一大步。

现在来说一说最简单的、最基本的、也是很有用的一个记数问题。

我们记数必须符合两条原则：每一个数要有一个符号，两个不同的数所用的符号也不相同。

我们熟悉的常用的记数法是十进位制，即记数根为 10 ，记为：

$$a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot 10+a_0\quad(0\leqslant a_i<10)$$

计算机上所使用的记数法一般是二进位制的，即记数根为2，记为：

$$a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot 2+a_0\qquad(0\leqslant a_i<2)$$

这个数目到二后，它不叫2，叫10，进了一位了。3呢？是11。是这么逢二进一位，叫做二进位制．二进位制有什么好处呢？我们可以用电的设备，电流通是一个数目，不通是另一数目。用通与不通来计算数字，运算比十进位制方便，但读写不变。1+1=10、

$10-1=1$，除法不用找商数。

更一般地，可以采取混合进位制，例如：

$$a_n\prod_{i=1}^{n-1} m_i + a_{n-1}\prod_{i=1}^{n-2} m_i + \cdots\cdots + a_3 m_1 m_2 + a_2 m_1 + a_1 \quad (o \leqslant a_i <)$$

m_i为记数根，而a_i为 混合 进位制的位数。例如取$m_1=2$，$m_2=m_3=\cdots\cdots=3$，则有：

0	0 0 0				7	1 0 1
1	0 0 1				8	1 1 0
2	0 1 0				9	1 1 1
3	0 1 1				10	1 2 0
4	0 2 0				11	1 2 1
5	0 2 1				12	2 0 0
6	1 0 0				13	2 0 1

这些数系总称为加权数系

由于快速计算机的运算速度，在60年代发展起来的有模数系。

先从《孙子算经》（有上、中、下三卷，著于公元第四、五世纪）的孙子定理（即中国剩余定理，在卷下）讲起："今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？""答曰二十三"。

这个问题用同余式符号表出为：

设$x\equiv 2(mod3)$，$x\equiv 3(mod5)$，$x\equiv 2(mod7)$，求最小正整数。

"术曰：三三数之剩二置一百四十，五五数之剩 三 置 六十三，七七数之剩二置三十，并之得二百三十三，以二百十减之，即得。凡三三数之剩一则置七十，五五数之剩一则置二十一，七七数之剩一则置十五，一百六以上，以一百五减之，即得。"

照术文前半段，这个问题的解是：

$x=70\times 2+21\times 3+15\times 2-2\times 105=23$

有一歌诀："三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆正月半，除百零五便得知。"

依据术文的后半段，下列一次同余式组：

$x\equiv a_1(mod3)$　　$x\equiv a_2(mod5)$　　$x_1\equiv a_3(mod7)$

的解是：

$x=70a_1+21a_2+15a_3-105t$　　（t为整数）

推广孙子“物不知数”题的解法，我们有以下的中国剩余定理：

设$m_1\cdots\cdots m_n$为两两互素的n个正整数，$M=m_1\cdots m_n$，

$x=a_i(modm_i)$，〔$i=1,\cdots\cdots,n$〕，解出：

$k_i\dfrac{M}{m_i}\equiv 1\ (modm_i)$　则：

$$x\equiv\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{M}{m_i}a_i\qquad (mod\ M)$$

欧洲十八世纪中欧拉、拉格朗日都曾对一次同余式问题进行过研究.高斯于一八〇一年明确写出了上述定理.一八五二年美国传教士 *Alaxander Wylie* 将《孙子定理》“物不知数”题的解法传到欧洲，从而在西方的数学史上将这一定理称为“中国剩余定理”.这个定理的用处很多，这里仅举它在模系数记数法中的应用.

设整数$M>x\geqslant 0$，$(x)_{m_1},\cdots\cdots,(x)_{m_n}$ 就表示x的模系数记数法，这里$(x)_{m_i}$ 表示x模m_i的最小非负剩余，如果已知x的模系数，就可用孙子定理找出x.例如：取$m_1=2,m_2=3,m_3=5$　则$M=30$

0	0	0	0	11	1	2	1	22	0	1	2
1	1	1	1	12	0	0	2	23	1	2	3
2	0	2	2	13	1	1	3	24	0	0	4
3	1	0	3	14	0	2	4	25	1	1	0
4	0	1	4	15	1	0	0	26	0	2	1
5	1	2	0	16	0	1	1	27	1	0	2
6	0	0	1	17	1	2	2	28	0	1	3
7	1	1	2	18	0	0	3	29	1	2	4
8	0	2	3	19	1	1	4				
9	1	0	4	20	0	2	0				
10	0	1	0	21	1	0	1				

这个记数法，加法和乘法均无须进位，例如：

$$\begin{array}{l|ccc} 10+13 & 0 & 1 & 0 \\ =23 & 1 & 1 & 3 \\ \cline{2-4} & 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|ccc} 4\times 7 & 0 & 1 & 4 \\ =28 & 1 & 1 & 2 \\ \cline{2-4} & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

为了数论变换的快速计算在计算上实现，还有其它的记数法，在编码问题里就有多种记数法．关于记数问题，还有很多内容，有好些关于这方面问题的专著，不来详说了．

在小学和中学的数学课程里，我们接触到了整数、小数、分数、正数和负数、实数和虚数，以及它们之间的各种运算，如加、减、乘、除、乘方、开方等等，这些构成了以数量为主的算术和代数部门；我们又接触到了点、线、方、圆之类的图形，以及它们的性质和相互关系，如面积、体积、全等、相似等等，这些构成了以空间形式为主的几何部分．我们还要接触到表示几个数量之间相互制约的关系，这就是函数的概念，以及它们的图形所表示的变量，和坐标等等，这就进入了把数和形这两大类基本概念沟通起来的解析几何和微积分初步的领域．我们还要接触到这些基础知识在这种实际运用中的具体问题．这些东西，就是小学和中学数学课中的大致轮廓．

它们有的是随着生产的发展而发展起来的，有的是从数学本身内部产生的．都是人类在漫长的岁月中积累下来的数学知识．当然，实现四个现代化所需要的数学，有许多是小学和中学课本上还没有的．现代数学不仅能刻画力学及物理的运动规律，现在已发展到用来刻画化学、生物体内发生的极其复杂的微观规律．但是必须在中、小学里把数学的基础打好，基本概念必须搞清楚，定理必须严格证明，基础理论必须透彻理解，基本训练必须严格要求．只有这样，将来才能循序渐进，学习比较高深的数学，在牢靠的基础上建立起高楼大厦，根深枝壮叶茂，掌握好实现四化的这一有力武器．

第　二　讲

整数的除法与分解

陆　文　瑞

用来计数的正整数：

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12…又称为自然数。我们知道，任意两个正整数的和与积都是正整数，但是，对任意两个正整数a，b，方程$a+x=b$却不一定有正整数解，也就是说，两个正整数的差不一定是正整数

我们把全部正整数，零及全部负整数

$$\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$$

都称为整数，那么，任意两个整数的和、差与积都是整数，但是整系数方程$ax=b$却不一定有整数解，也就是说，两个整数相除的商不一定是整数。

以后，除特别声明的外，字母$a,b,c,\cdots\cdots,x,y,z$等全都表示整数。

§1　整　　除

整系数方程$ax=b$有整数解时，称为a能整除b或b能被a整除。整除是研究整数性质的最基本的概念。

定义1　如果$b=ag$，则称a能整除（除尽）b或b能被a整除（除尽），以$a\mid b$表示，此时，称a为b的约数或因数，称b为a的

倍数，b不能被a整除时记为$a\nmid b$。

由定义1知道，±1是任意整数的因数，也只有±1是任意整数的因数。0是任意整数的倍数，也只有0是任意整数的倍数。如果a是b的倍数，则$(-a)$也是b的倍数。

定义2　能被2整除的整数叫做偶数或双数，它们是

$$\cdots,\ -8,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,$$

不能被2整除的整数叫做奇数或单数，它们是

$$\cdots,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,$$

对于整除，我们需熟悉下列两个性质。

1°如果$a\mid b$，$b\mid c$，则$a\mid c$。

证　由定义1，$b=aq$，$c=bm$，所以$c=aqm$，qm是整数，再由定义1知$a\mid c$。

2°在等式$a+b+\cdots+m=k+e+\cdots+s$中，除某一项(例如$k$)外，其余各项都能被$n$整除，则该项也必能被$n$整除。

证　据假设$n\mid a$，$n\mid b$，$\cdots$，$n\mid m$，$n\mid e$，$\cdots$，$n\mid s$，即$a=a_1n$，$b=b_1n$，$\cdots$，$m=m_1n$，$e=e_1n$，$\cdots$，$s=s_1n$，于是

$$\begin{aligned}k&=a+b+\cdots+m-e-\cdots-s\\&=(a_1+b_1+\cdots+m_1-e_1-\cdots-s_1)n\end{aligned}$$

即k能被n整除。

下面举出几个例子，用来说明怎样应用上面所讲的性质。

例1　求方程$xy=x+y$的整数解

解　由原方程得，$x(y-1)=(y-1)+1$，$y-1$能除尽此式的左端及右端第一项，故它也能除尽右端的第二项，即$y-1$能除尽1，于是$y-1=\pm1$，即$y=0$或2，代入原方程得$x=0$或2，即得所求整数解为：

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$$

例2　求方程$x^3+12x^2-32x-256=0$的整数解。

解 设x为原方程的整数解，在方程中，除首项x^3外，其余各项均为偶数，故x必为偶数，命$x=2y$代入原方程得：

$$y^3+6y^2-8y-32=0$$

同理，由此式又知，y必为偶数，命$y=2z$代入上式得

(2) $z^3+3z^2-2z-4=0$.

此式说明z必为4的因数，而4的因数有，±1，±2，±4，由试验知$z=-1$是(2)的解，因而(2)的左端有$z+1$的因式，经分解，(2)式可写成

$$(z+1)(z^2+2z-4)=0.$$

如除$z=-1$外此方程还有解，则应有$z^2+2z-4=0$，由此知$2\mid z$，命$z=2u$得$u^2+u-1=0$，因$u^2+u=u(u+1)$为二连续整数的乘积，它是一个偶数，故$u^2+u-1\neq0$，这就得出原方程有唯一解

$$x=2y=4z=-4.$$

例3 如果$6\mid a+b+c$，证明$6\mid a^3+b^3+c^3$.

证 因$6\mid a+b+c$，在a,b,c中至少有一个是偶数，由等式：

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+3abc$$

因$6\mid a+b+c$，$6\mid 3abc$，故$6\mid a^3+b^3+c^3$.

§2 带余除法及同余式

定义1 对实数x，不超过x的最大整数，叫做x的整数部分，以$[x]$表示，也就是说，$[x]$是满足$x-1<[x]\leqslant x$的整数.

例1 $[8]=[8]$，$[3.4]=3$，$[-2.4]=-3$.

定理1（带余除法） 设b是正整数，任意整数a都可以表示成下列形状，

(1) $a=bq+r$，$0\leqslant r<b$，

其中q与r是唯一确定的，q称为a除以b的不完全商，r称为a除

以b的余数.

证 命$q=\left[\frac{a}{b}\right]$，$r=a-bq$，则由

$$\frac{a}{b}-1<\left[\frac{a}{b}\right]=q\leqslant\frac{a}{b}$$

得出(1)式.

再证明表法(1)的唯一性. 设整数a表成(1)的形状有两种表法，命

$$a=bq+r=bq^1+r^1，0\leqslant r<b，0\leqslant r^1<b，$$

则$r-r^1=b(q^1-q)$为b的倍数，但$-b<r-r^1<b$，因此必须$r-r^1=0$，即得$r=r^1$，$q=q^1$.

例 2 $b=14$时，
$$154=14\cdot 11+0,\qquad 0=0<14\cdot$$
$$177=14\cdot 12+9,\qquad 0<9<14\cdot$$
$$-64=14\cdot(-5)+6,\qquad 0<6<14\cdot$$

定义 2 设m是正整数，如果整数a及b除以m有相同的余数，则称a与b对模m同余，记为$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$.

定理 2 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$的充要条件是$m\mid a-b$或$a=b+mc$

证 (i)必要性 如$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$，由定义 2 得

$$a=mq+r，b=mh+r，0\leqslant r<m，$$

于是$a-b=m(q-h)$能被m除尽.

(ii)充分性 如$a\mid a-b$，即$a-b=mc$.设b除以m的余数为r，即$b=mq+r$，$0\leqslant r<m$，于是得

$$a=b+mc=m(q+c)+r，0\leqslant r<m\cdot$$

即a以m除的余数也是r.

对模m，所有整数都与其（除以m的）余数同余，而除以m只能得出m种余数：0，1，2，…，$m-1$，所以，全部整数可以分成m类，同一类中的数对模m彼此同余，而不同类的数对模m彼此不同余，这m个类叫做模m的剩余类.

例如，模 2 的剩余类有 2 类，即奇数类与偶数类；模 3 的剩余类有三类：

$$\begin{cases} 3q\text{形的数}\cdots,-12,-9,-6,-3,0,3,6,9,12,\cdots \\ 3q+1\text{形的数}\cdots,-11,-8,-5,-2,1,4,7,10,13,\cdots \\ 3q+2(\text{或}3q-1)\text{形的数}\cdots,-10,-7,-4,-1,2,5,8,10,13,\cdots \end{cases}$$

在模m的m个剩余类中，每一类取一个数作代表，这m个类称为模m的完全剩余组，最常用的模m的完全剩余组有

1） 最小正剩余组 $0, 1, 2, \cdots, m-1$；

2） 绝对最小剩余组

当m为奇数时，取 $0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm\dfrac{m-1}{2}$，

当m为偶数时，取$0, \pm1, \pm2, \cdots\pm\left(\dfrac{m}{2}-1\right), \dfrac{m}{2}$.

这样一来，对模 5，所有整数可表示为下列形状之一：

$$5n, \ 5n+1, \ 5n+2, \ 5n+3, \ 5n+4$$

（或 $5n, \ 5n\pm1, \ 5n\pm2$）

而对模 6，所有整数可以表成下列形状之一：

$$6n, \ 6n+1, \ 6n+2, \ 6n+3, \ 6n+4, \ 6n+5$$

（或$6n, \ 6n\pm1, \ 6n\pm2, \ 6n+3$）

在日常生活中，我们经常遇到同余的概念. 例如，星期几是按模 7 取余数，而几点钟是对模12取同余的数.

同余式有下面的简单性质：

$1°\ a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)$，$k \mid m$，则$a\equiv b(\mathrm{mod}\, k)$.

$2°\ a\equiv b(\mathrm{mod}\, m)\ c\equiv d(\mathrm{mod}\, m)$，则

$a+c\equiv b+d(\mathrm{mod}\, m)$，$ac\equiv bd(\mathrm{mod}\, m)$.

证 因$(b+d)-(a+c)=(b-a)+(d-c)$，

$bd-ac=(b-a)d+a(d-c)$.