半线性抛物型方程的几何理论

[巴西] Dan Henry 著

叶其孝　李正元　林源渠 译

高等教育出版社

半线性抛物型方程的几何理论

半线性抛物型方程的几何理论

半线性抛物型方程的几何理论

[巴西] Dan Henry 著

叶其孝 李正元 林源渠 译

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

半线性抛物型方程的几何理论/(巴西)亨利,D.著;叶其孝等译.—北京:高等教育出版社,1998
ISBN 7-04-006399-9

Ⅰ.半… Ⅱ.①亨… ②叶… Ⅲ.抛物型方程,半线性-几何 Ⅳ.O175.26

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 14332 号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街 55 号
邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588
新华书店总店北京发行所发行
国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.125 字数 310 000
1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷
印数 0 001—8 20
定价 21.30 元

引　言

1971 年我读了 Kato 和 Fujita[32]关于 Navier-Stokes 方程的漂亮的文章，而且高兴地发现，它所讨论的问题适当地看像一个常微分方程，所进行的分析在方法上与常微分方程所用的方法类似. 对于从事于偏微分方程研究的人来说也许这没有什么奇怪，但是我的训练是在常微分方程和泛函微分方程方面，因而我阅读偏微分方程常常被一些技术细节所困扰.

许多偏微分方程问题，包括无界算子在内，都可以写成 Banach 空间中的常微分方程问题. 重写为 Volterra 积分方程，无界算子就不再出现(在抛物型问题中)，从而分析就完全类似于常微分方程的分析. 人们只研究强解，它常常就是古典解. 和常微分方程的主要技巧的不同是：我们是在两个(或者多个)空间中进行研究，而且 Gronwall 不等式必须修改成包括当 a,b,α,β 是非负常数在内的形式，

$$0 \leqslant u(t) \leqslant a t^{-\alpha} + b\int_0^t (t-s)^{-\beta} u(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha<1$，$\beta<1$.

在微分方程的几何或定性理论中，目的是描述流的几何，稳定性问题就占了支配地位(见 §1.1 的例子). 即便对于常微分方程，这样的问题也很快成为困难的问题，但是，一旦必要的方法构造出来，许多对常微分方程有效的一般结果(例如线性逼近后的稳定性结果)对

抛物型偏微分方程也可以同样容易地得到证明.一般说,我们要用到从线性逼近得到的信息,所以解的可微性定理是重要的.

对读者要假定些什么呢?Banach 空间中的线性泛函分析是主要的工具,而且我们要用到 Banach 空间中的基本微积分(连续性,Fréchet 可微性,压缩映射以及隐函数定理);在§1.2 中复习了这些概念中的一部分.本书中所推广了的常微分方程的结果的有关知识无疑是有用的,但可能不是基本的;有了近代分析的基础训练,$\mathbf{R}^n$ 看起来和任何别的 Banach 空间差不多是一样的.所需要的关于椭圆型边值问题的仅有的困难的结果,即 Laplace 的方程 Dirichlet 问题和混合问题在 L^p 和 C^α 中的可解性结果,在§1.2 中引用.在一些例子用到了最大值原理的论证方法,而且在§3.3 的练习 5—11 中复习了这些论证方法.

结果都是连续编号的(练习中的除外),所以接在定理 3.4.2(第三章第四节的第二个主要结果)后面的是推论 3.4.3,3.4.4 和引理 3.4.5.许多困难程度差别很大的练习分散在全书.某些标以"*"号的习题在后面常常用到或者有重要的应用.某些练习对于前面的定理所述的问题描述了另外一些常常是更好的方法;插入一个练习比重写某一节要容易.(例如§4.2 中的练习 3 和§5.1 中的练习 10—11.)在任何情况下,练习都是本书的重要组成部分,不重视它们对于掌握本书的内容和方法来说后果是严重的.

把偏微分方程作为无穷维空间中的发展方程来研究已经成为相当普通的事了,除了文献中列出的工作外,还应该提到 R. H. Martin 的《非线性算子和 Banach 空间中的微分方程》(Miley,1976)和 F. Browder的《非线性算子和 Banach 空间中的非线性发展方程》(美国数学会,1976),原因既是由于这两本书的重要性,还因为事实上这两本书和本书没有重复之处.以上就是本书主题的范围.

本书中所述的工作开始于1971年在Kentucky大学的一个讨论班上，而在1974年打印了一个改写本.在我访问Northwestern大学(1974—1975)时，我教了一个包括本书某些内容的课，在给予某些新内容，特别是关于梯度流的内容(§5.3和定理6.1.9-10)的同时，还改正了许多原稿中的错误并进行了修订.§7.5，§7.6，第九章和第十章是1979年访问Brown大学时发展而成的.我要感谢这些大学的同事们的鼓励和意见，而且在上述大学都有一批能仔细而确切地估价和判断我所讲的内容的听众。我要特别感谢Jack Hale的鼓励，当我的积极性衰退时，这种鼓励是一种鞭策，还要感谢Kate MacDougall，尽管我拖延了，她还是打印了最后的改写稿.

(京)112号

图字:01-98-0660号

Originally published in English under the title:
"Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations"by Daniel Henry

责任编辑　胡乃冏
封面设计　李卫青
责任绘图　尹　莉
版式设计　李　洁
责任校对　胡乃冏
责任印制　宋克学

目　录

引言…………………………………………………………………… (1)
第一章　预备知识…………………………………………………… (1)
1.1　什么是几何理论？ ……………………………………… (1)
1.2　基本事实和记号 ………………………………………… (4)
1.3　扇形算子和解析半群…………………………………… (16)
1.4　算子的分数幂…………………………………………… (26)
1.5　不变子空间和指数界…………………………………… (33)
1.6　分数幂的一个例和一个嵌入定理……………………… (35)
第二章　在物理、生物学和工程问题中的
非线性抛物型方程的例子 …………………………… (45)
2.1　非线性热方程…………………………………………… (45)
2.2　半导体中的电子流和空穴流…………………………… (46)
2.3　神经轴突的 Hodgekin-Huxley 方程 ………………… (46)
2.4　催化剂小球中的化学反应……………………………… (47)
2.5　群体遗传………………………………………………… (48)
2.6　核反应堆动力学(多组中子扩散方程)………………… (49)
2.7　Navier-Stokes 方程以及有关的方程 ………………… (49)
第三章　存在性、唯一性和连续依赖性……………………… (51)
3.1　例和反例………………………………………………… (51)
3.2　线性 Cauchy 问题 ……………………………………… (54)
3.3　局部存在性和唯一性…………………………………… (58)
3.4　解的连续和可微依赖性………………………………… (69)
3.5　微分方程的光滑作用…………………………………… (78)
3.6　例：$u_t=\Delta u+f(t,x,u,\operatorname{grad} u)$ …………………… (83)

3.7 例：$u_t=\Delta u-\lambda u^3$（在 $\mathbf{R}^n$ 上） …………………………… (86)
3.8 例：Navier-Stokes 方程 …………………………………… (89)
第四章 动力系统和 Liapunov 稳定性 …………………………… (92)
4.1 动力系统和 Liapunov 函数 ……………………………… (92)
4.2 关于渐近稳定性的逆定理 ………………………………… (98)
4.3 不变性原理 ……………………………………………… (103)
第五章 平衡点的邻域 …………………………………………… (111)
5.1 由线性逼近给出的稳定性和不稳定性 …………………… (111)
5.2 鞍点性质 ………………………………………………… (126)
5.3 Chafee-Infante 问题和梯度流 ………………………… (134)
5.4 抛物型方程的行波(解) ………………………………… (145)
附录 某些常微分算子的本质谱 ………………………………… (154)
第六章 在平衡点附近的不变流形 ……………………………… (161)
6.1 不变流形的存在性和稳定性 ……………………………… (161)
6.2 稳定性的临界情形 ……………………………………… (190)
6.3 平衡点的稳定性的分歧和转移 ………………………… (200)
6.4 从一个平衡点出发的周期轨道的分歧 …………………… (207)
第七章 线性非自治方程 ………………………………………… (215)
7.1 发展算子及估计 ………………………………………… (215)
7.2 线性周期系统 …………………………………………… (226)
7.3 伴随方程组和后向唯一性 ………………………………… (232)
7.4 缓慢变化的系数 ………………………………………… (244)
7.5 迅速变化的系数 ………………………………………… (249)
7.6 指数二分性 ……………………………………………… (257)
第八章 周期解的邻域 …………………………………………… (282)
8.1 非自治系统的稳定性和不稳定性 ………………………… (282)
8.2 自治系统的轨道稳定性和不稳定性 ……………………… (286)
8.3 周期解的扰动 …………………………………………… (291)

8.4 Poincaré映射 …………………………………………………… (294)
8.5 分歧和周期解稳定性的转移 ………………………… (298)
第九章 不变流形的邻域……………………………………… (313)
9.1 不变流形的存在性、稳定性和光滑性………………… (313)
9.2 在不变流形附近的坐标系 ……………………………… (344)
9.3 例 …………………………………………………………… (354)
第十章 两个例…………………………………………………… (362)
10.1 群体遗传中的选择—迁移模型……………………… (362)
10.2 燃烧理论中的一个问题……………………………… (369)
注记………………………………………………………………… (382)
参考文献…………………………………………………………… (387)
名词索引…………………………………………………………… (401)

第一章　预 备 知 识

1.1　什么是几何理论?

Poincaré和 Liapunov 富有成效地开创了常微分方程的几何理论,或叫做定性理论,而该理论本身涉及特解(平衡点,周期解,殆周期解)或者解族(不变流形)的存在性,这些解的稳定性或不稳定性——包括方程发生"微小"变化时这些解的行为的变化.该理论也提出并有时回答一些全局问题:从一个"任意"初值开始,当时间趋于无穷时关于解能说些什么?系统作为一个整体是否是结构稳定的?(例如,参看[11,18,37,61,62,68,76,79,89].)

对于泛函微分方程[39,40,41]已提出了某些这样的问题并且有了回答,而且这种理论常常指导着我们对于半线性抛物型偏微分方程的研究.J. K. Hale 和 K. Meyer[42]认为,要从常微分方程推广的最重要的事实是:常数变易法的公式,把状态空间分解成关于线性化的方程的不变子空间,以及在这些子空间中线性方程的解的指数界.利用这些工具,**微积分的基本技巧**(线性化)就可以以类似于常微分方程理论中的方式被应用.除了偶尔要用到 Liapunov 函数和最大值原理的论证方法外,方法几乎总是线性化和压缩映射.

可能会认为结果都一定是平常的.在某种程度上,它们或许是平常的:无论在假设、结论或者证明方法上,一个接一个几乎都不令人

感到惊奇.看起来这些工具似乎还没有得到系统的发展,或者还没有系统地应用到抛物型偏微分方程上去.

"但是肯定地",有人反对道,"你没有解决依赖于时间的三维 Navier-Stokes 方程.要不然的话就要用激情的语言向外赞扬,或者至少要在美国数学会的通报上加以赞扬."是的,本书给出的方法和结果用到了 Navier-Stokes 方程上,但无论如何没有建立对于任意初始数据(仅仅由光滑性和相容性条件所限定的)全局解(对于一切正的时间存在的解)的存在性.我只想争辩说,还有许多别的有意义的问题要去研究."存在性是那些要自夸的事情吗?"(L. C. Young).

考虑一个例子,我的收藏品中的珍宝. Chafee 和 Infante[14]研究了包括

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+au-bu^3,\quad (0<x<\pi,t>0)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0$$

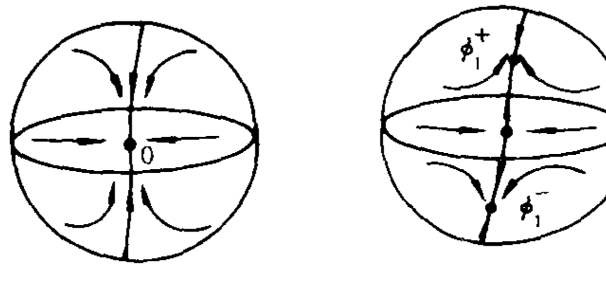
在内的一类问题,其中 a,b 都是正常数.这种情形,初值问题在 Sobolev 空间 $H_0^1(0,\pi)$ 中是适定的,而且对一切正的时间解存在.而且,当 $t\to+\infty$ 时,$u(\cdot,t)$ 在 $H_0^1(0,\pi)$ 中收敛到某个平衡解 ϕ,

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2}+a\phi(x)-b\phi^3(x)=0,\quad 0<x<\pi,$$

$$\phi(0)=0,\quad \phi(\pi)=0.$$

Chafee 和 Infante 证明了只存在有限个这种平衡解——确切地说,若对某个整数 $n\geqslant 0$,$n^2<a\leqslant(n+1)^2$,则恰好有 $2n+1$ 个.若 $0<a\leqslant 1$,则零解是全局渐近稳定的.若 $a>1$,则零解是不稳定的,所有其它的平衡解,除了由对一切 $0<x<\pi$,$\phi_1^+(x)>0>\phi_1^-(x)$ 表征的记作 ϕ_1^-,ϕ_1^+ 的两个平衡解外,都是不稳定的.这两个解是渐近稳定的,而且我们(在§5.3中)证明$\{\phi_1^+,\phi_1^-\}$的吸引区域是 $H_0^1(0,\pi)$ 中的一个开稠密集.

我们还证明了(§6.3中)存在$H_0^1(0,\pi)$中原点的一个邻域,当$|a-1|$充分小时,该邻域是正不变的,而且对于小的$a-1>0$,零解的稳定流形把该邻域分成两个开集(ϕ_1^+,ϕ_1^-的吸引区域).因此,我们证实了下面的流的图形:对于靠近1的a,

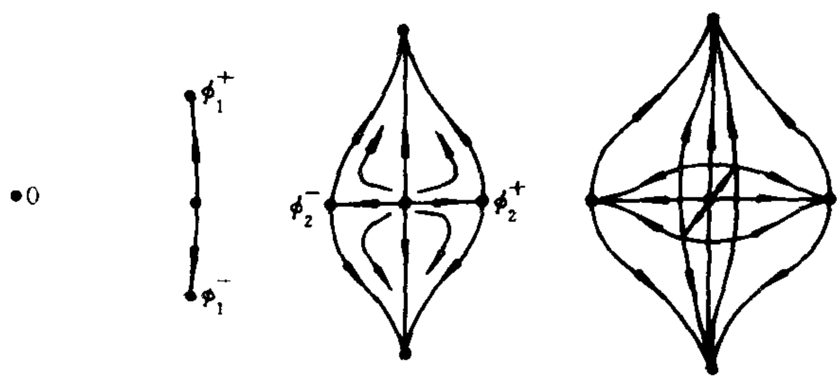


$a\leqslant 1$ $a>1$

若B是$H_0^1(0,\pi)$中任何关于0的充分大的球,而$u(t,B)$是初值在B中的解u在时刻t时所取到的点集,则

$$K=\bigcap_{t\geqslant 0}u(t,B)$$

是极大有界不变集.K是紧、连通的,并且是有限维的,是平衡点的不稳定流形的并集,从而我们有下列K的图形:



$0\leqslant a\leqslant 1$ (0维) $1<a\leqslant 4$ (1维) $4<a\leqslant 9$ (2维) $9<a\leqslant 16$ (3维)

当$n^2<a\leqslant(n+1)^2$时,K是n-维的,原点的不稳定流形的闭包.

大多数例子不可能这样仔细的讨论,部分原因是因为弄清平衡

解问题——一个非线性椭圆型方程——的困难. 但有另外一些例子(特别是[107],第十章和 §6.1 的练习 11)对它们可以进行相当完全的讨论. 我们希望我们的许多例子将会丰富半线性抛物型方程的定性理论.

1.2 基本事实和记号

1.2.1 Gronwall 不等式
1.2.2 线性算子和空间的记号
1.2.3 Sobolev 嵌入定理
1.2.4 某些椭圆型边值问题
1.2.5 多项式,导数和解析性
1.2.6 带参数的压缩映射;隐函数定理
1.2.7 选读指南

本节中我们收集了本书中将会用到的一些结果和记号.

1.2.1 Gronwall 不等式

T. H. Gronwall 证明了,若 a,b 是非负常数,又对一切 $0\leqslant t<T$ 有

$$0\leqslant u(t)\leqslant a+b\int_0^t u(s)\mathrm{d}s,$$

则对于 $0\leqslant t<T$, $u(t)\leqslant a\mathrm{e}^{bt}$.

为了讨论下面会碰到的弱奇性 Volterra 积分方程,我们需要另一种形式的 Gronwall 不等式.

假定 a,b,α,β 是非负常数,其中 $\alpha<1,\beta<1$ 而 $0<T<\infty$;存在常数 $M=M(b,\alpha,\beta,T)<\infty$,使得对于在$[0,T]$中几乎所有的 t 满足

$$0\leqslant u(t)\leqslant at^{-\alpha}+b\int_0^t (t-s)^{-\beta}u(s)\mathrm{d}s$$

的任何可积函数 $u:[0,T]\to R$，我们有

$$0\leqslant u(t)\leqslant aMt^{-\alpha},\quad \text{a.e. 在 } 0<t\leqslant T \text{ 上}.$$

这是定理 7.1.1 的特殊情形.证明是一个由 Lebesgue 控制收敛定理得到的初等的迭代论证，介绍读者参看定理 7.1.1.

1.2.2 线性算子和空间的记号

所有的 Banach 空间都是**实的**，按照习惯为防止误解而作如下说明，即谱理论已经以复化的方式得到了.Banach 空间 X 的(实)对偶记作 X^*，而把 $y\in X^*$ 在 $x\in X$ 上的值写作 $\langle x,y\rangle$.

$\mathscr{L}(X,Y)$是定义域在 X，值域在 Y 中的连续线性算子空间.其中 X,Y 都是 Banach 空间.

对于一个线性算子 L，

$D(L)=L$ 的定义域；

$R(L)=L$ 的值域；

$N(L)=L$ 的的零空间；

$\rho(L)=L$ 的预解集；

$\sigma(L)=L$ 的谱$=P\sigma(L)\cup C\sigma(L)\cup R\sigma(L)$，

$P\sigma(L)=$点谱(L 的本征值)，

$C\sigma(L)=$连续谱，

$R\sigma(L)=$剩余谱；

$\sigma_e(L)=L$ 的本质谱(参见 § 5.4 的参考文献)；

$r(L)=$当 L 是连续时，L 的谱半径.

有时我们写“Re $\sigma(L)>k$”来表示当 $\lambda\in\sigma(L)$时 λ 的实部$=\mathrm{Re}\lambda$ 大于 k.

我们有时候也用“Δ_D”来记作用于在 $\mathbf{R}^n$ 中(问题所蕴含的)区域的边界上为零的光滑函数上的 Laplace 算子$\left(\Delta=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)$.确切的