高等学校教学参考书 李湘如 彭匡鼎 编

热力学与统计物理学例题和习题

(热力学分册)

高等学校教学参考书

热力学与统计物理学
例题和习题

（热力学分册）

李湘如　彭匡鼎　编

高等教育出版社
1986

内容简介

本书系作者多年教学工作的总结，反映了作者较丰富的教学经验.

全书共八章. 它针对物理专业《热力学与统计物理学教学大纲》所要求掌握的内容以及学生解题中较普遍感到困难的地方.举了有一定代表性的例题，並相应地选编了大量习题.

书中所举例题都从解题思路和方法上进行了分析，对解题具有一定指导意义.习题都给出了答案.

本书可作为物理专业师生的参考书，亦可以供有关专业师生参考.

高等学校教学参考书

热力学与统计物理学例题和习题

（热力学分册）

李湘如　彭匡鼎　编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海群众印刷厂印订

开本 850×1168　1/32　印张 11　字数 262,000

1988年9月第1版　1988年9月第1次印刷

印数 00,001-5,680

ISBN 7-04-001639-7/O·688

定价　3.45元

前　言

本书是《热力学与统计物理学例题和习题》这套书的热力学分册。

热力学理论是建立在热力学的三条实验定律之上，并据此作演绎的推论，它具有高度的可靠性和普遍性。

热力学理论能把科学的所有分支联系起来。它已渗透到所有的学科中去，特别是作了适当补充和推广了的熵的概念，更加突出地表现了它的重要性。

热力学理论在解决各种类型的实际问题中，有着不同的方法和技巧。在教学中我们深感为初学者提供审题、解题的方法和技巧的必要性。因此，我们在多年教学中积累的资料的基础上，根据我国高等院校"热力学与统计物理"教学大纲的要求，适当考虑各专业的不同需要，并参照国内外的有关文献资料，由李湘如执笔整理编写成这本书。全书分八章，共有例题和习题五百道。例题的解答力求给予初学者解题指导。必要之处还附有讨论性的说明，希望对问题的阐述有所深化。此外还引进了适量的经验公式，挑选重要的实验数据编成题目，目的在于尽可能与实际相结合。

云南大学物理系郑智锦教授审阅了部分手稿，西北师范大学辛绵荣副教授对全书作了校订，使本书大为增色；高等教育出版社范印哲、钟金城同志给予我们许多有益的、具体的帮助，谨此一并致谢！

由于编者水平有限，书中的错误或欠妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者

一九八三年五月于南昌

目　　录

第一章 温度 物态方程

§1.1 数学基础知识

1．**雅科毕行列式．**这一概念常在由一组变数变换为另一组变数的积分计算中遇到．今设四个函数 f，g，h，k 都是二独立变数 x、y 的函数，并以记号$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$代表雅科毕行列式，即

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_x\\ \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)_x\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y. \tag{1.1}$$

雅科毕行列式具有如下性质：

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(g,f)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,x)}; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial(f,y)}{\partial(x,y)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(h,k)}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(h,k)}. \tag{1.4}$$

2．**偏导数．**设函数 $f=f(x,y)$ 在某一区域 D 内有定义，并设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个内点．考虑 P_0 的某一邻域内纵标为 y_0 的一切点 $P(x,y_0)=P(x_0+\Delta x,y_0)$．如果这时一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 有导数，也就是存在极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

则这个极限值称为函数 $f=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的偏导数，

通常记为$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$或者$f'_x(x_0,y_0)$等。从而上述极限可表成

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数f在点(x_0,y_0)对于y的偏导数定义为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

设函数f在区域D内每一点$(x,\ y)$都有偏导数$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$和$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x$，则这两个偏导数在$D$内一般也是二元函数，它们被称为$f(x,y)$的偏导函数，简称偏导数。

3．全微分和积分因子。 热力学中常遇到形式为$M(x,y)dx+N(x,y)dy$的微分表达式。但应注意，并非所有的微分表达式都是全微分。就热力学意义而言，即并非所有的微分式都是态函数的无穷小变化。全微分的判别法之一是满足下列条件（这是全微分的必要且充分的条件）：

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y. \tag{1.5}$$

全微分的另一判别法是积分判别法。当积分式内是全微分时，或当x和y彼此不独立而以某一关系式相联系时，积分$\int(Mdx+Ndy)$才有意义。在后一种情形下，积分称为曲线积分。一般说来，曲线积分的量值与积分路线有关，即

$$\int_{A1B}(Mdx+Ndy)\neq\int_{A2B}(Mdx+Ndy).$$

若曲线积分与积分路线无关，则当积分的上下限共同时，或沿封闭曲线积分时，积分的量值等于零：

$$\int_{A1B2A}(Mdx+Ndy)=0. \tag{1.6}$$

反之，当沿封闭曲线所取积分$\oint(Mdx+Ndy)$为零时，则说积分

的量值与路线无关，或说积分号内的式子是全微分。

若条件(1.5)不满足，则微分式 $Mdx+Ndy$ 不是全微分。这时，如果有一个适当的函数 $\mu=\mu(x,y)$ 使得 $\mu Mdx+\mu Ndy$ 化为全微分，则称函数 μ 为原微分式的积分因子。

可以证明，对于二变数 x 和 y 的微分式，当它不满足全微分条件(1.5)时，我们一定能够找到至少一个积分因子，使得原来的微分式化为全微分。

对于三变数 x,y,z 的微分式

$$X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,d,z)dz, \tag{1.7}$$

其中 X,Y,Z 是 x, y, z 的连续、单值、可导的函数。如果式(1.7)满足下列条件，则该微分式是全微分式：

$$\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0,\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=0,\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}=0. \tag{1.8}$$

4．齐次函数。若一函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足如下关系：

$$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1.9}$$

则称 f 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的m次齐次函数。在热力学中，一个广延量是广延量的一次齐次函数。例如，若内能 U 作为 θ, V, N_i 的函数，则有 $U(\theta,\lambda V,\lambda N_1,\cdots,\lambda N_k)=\lambda U(\theta,V,N_1,\cdots,N_k)$。但应注意，假如一个函数中含有广延量外，还含有强度量，则只能把强度量作为参数看待，不能和齐次函数中的广延量变数一起考虑。如果函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对各变数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 都有连续偏导数，则一个 m 次齐次函数必满足下列偏微分方程

$$\sum_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=mf. \tag{1.10}$$

方程式(1.10)称为齐次函数的欧勒(Euler)定理。

例 1.1　设函数 f 和 g 都是二独立变数 x, y 的函数，试证

a) $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=1\Big/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(f,g)}$, b) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_g=\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\Big/\left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)_x$,

c) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(df/dt,g)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(f,dg/dt)}{\partial(x,y)}.$$

［解］ 我们从雅科毕行列式 (Jacobian) 的定义式 (1.1) 出发，而不直接应用雅科毕行列式的性质(1.2)至(1.4)。

a) $$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(f,g)}$$

$$=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y & \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_g & \left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)_f\\ \left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_g & \left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_f\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_g+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_g & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)_f+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_f\\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_g+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial f}\right)_g & \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial g}\right)_f+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_f\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial f}{\partial f}\right)_g & \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_f\\ \left(\frac{\partial g}{\partial f}\right)_g & \left(\frac{\partial g}{\partial g}\right)_f\end{vmatrix}=1,$$

从而得到 $$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=1\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(f,g)}. \tag{1}$$

b) 由题给 $g=g(x,y)$ 得到

$$f(x,y)=f(x,g(x,y)).$$

令 y 保持不变，将 f 对 x 求偏导数，得：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g+\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y, \tag{2}$$

从而可以求得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial y}{\partial g}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y$$

$$=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\right]\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x$$

$$=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x \tag{3}$$

c) 应用复合函数求导数的规则，就有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y\right]$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dt}\right)\right]_y\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x-\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{dt}\right)\right]_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dg}{dt}\right)\right]_x-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg}{dt}\right)\right]_y$$

$$=\frac{\partial(df/dt,g)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(f,dg/dt)}{\partial(x,y)}. \tag{4}$$

说明：在热力学理论及其应用中，式(2)是一个重要关系式，建议读者熟记．应用式(2)来变换偏导数的脚标是很方便的．在实用中可分两种情形：其一是原脚标容许再次出现的，这可直接应用式(2)．例如在推求定压热容 C_p 和定容热容 C_V 之间的关系时，由式(2)可以直接写出

$$C_p=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p=T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]$$

$$=C_V+T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{5}$$

其二是原脚标不希望再出现的，此时可把式(2)改写成

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_g=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y-\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_y. \tag{2'}$$

例如在推求气体绝热膨胀过程的 $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S$ 与焦-汤系数 $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$ 之间的关系时，应用式(2′)可以直接写出

$$\mu_S-\mu=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S-\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H=-\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H=V/C_p. \tag{6}$$

例 1.2 设三函数 f, g, h 都是二独立变数 x, y 的函数，试证明

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f\left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)_g=-1.$$

［**解**］ 依题意我们可以列出如下三个关系式：

$$f=f(x,y), \quad g=g(x,y), \quad h=h(x,y).$$

由后二式可解得 $x=x(g,h)$，$y=y(g,h)$。以此代入头一式，就可得出

$$f=f(g,h). \tag{1}$$

同理由一、三式解得 $x=x(f,h)$，$y=y(f,h)$，代入二式得

$$g=g(f,h). \tag{2}$$

对式(1)和式(2)分别求全微分，得：

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h dg+\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_g dh,$$

$$dg=\left(\frac{\partial g}{\partial f}\right)_h df+\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f dh.$$

把这两个方程联立消去 dg，就可写出

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h\left(\frac{\partial g}{\partial f}\right)_h df+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f+\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_g\right]dh. \tag{3}$$

比较式(3)等号两边的系数，则有

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h\left(\frac{\partial g}{\partial f}\right)_h=1 \quad 或 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h=1\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial f}\right)_h. \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f+\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_g=0,$$

移项并应用式(4)，就可得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f\left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)_g=-1. \tag{5}$$

另一证法是应用雅科毕行列式的性质，我们可以写出：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h = \frac{\partial(f,h)}{\partial(g,h)}, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f = \frac{\partial(g,f)}{\partial(h,f)},$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)_g = \frac{\partial(h,g)}{\partial(f,g)}. \tag{6}$$

从而得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h \left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f \left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)_g$$

$$= \frac{\partial(f,h)}{\partial(g,h)} \frac{\partial(f,g)}{\partial(f,h)} \left[-\frac{\partial(g,h)}{\partial(f,g)}\right] = -1. \tag{7}$$

说明一：在热力学理论及其应用中，式(7)是一个重要的关系式，建议读者熟记．式(7)也称为循环公式，意指凡是满足关系式 $F(f,g,h)=0$ 的三个态函数 f,g,h 的“循环”偏导数的连乘积等于 -1．这表明偏导数的连乘式不能施行分子和分母的简约．例如无外场存在的气体系统，其物态方程满足关系式 $F(p,V,T)=0$，应用循环公式(7)，就有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -1. \tag{8}$$

注意到等压膨胀系数 $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$，等容压强系数 $\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$，等温压缩系数 $\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$，则式(8)为

$$\alpha = p\beta\kappa. \tag{9}$$

说明二：由式(7)出发，并应用式(4)，就可以得到在热力学理论中另一个常用的偏导数关系式：

$$\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_f = -\left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_g \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_h \tag{10}$$

或者对 $f=f(x,y)$ 写作

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_f = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x. \tag{11}$$

说明三：由循环公式(7)$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_f\left(\frac{\partial x}{\partial f}\right)_g=-1$出发，还可以得出另一个常用的偏导数关系式：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right)_x=-1\Big/\left[\frac{\partial(g,f)}{\partial(x,f)}\,\frac{\partial(x,g)}{\partial(f,g)}\right]=1\Big/\frac{\partial(x,g)}{\partial(x,f)}$$

$$=1\Big/\left[\frac{\partial(x,g)}{\partial(x,y)}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,f)}\right]=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_x. \qquad (12)$$

例 1.3 设函数 $z=z(x,y)$ 的两个二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续。试证在该区域内，这两个二阶偏导数必定相等。

〔解〕 如果我们假设点(x_0,y_0)是区域 D 的一个内点，则本题的命题等效于证明 $z''_{xy}(x_0,y_0)=z''_{yx}(x_0,y_0)$。为此我们首先给出式 $A=z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+z(x_0,y_0)-z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0+\Delta y)$，然后把式 A 组合成如下两式：

$$A=[z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-z(x_0+\Delta x,y_0)]$$
$$-[z(x_0,y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0)]; \qquad (1)$$

$$A=[z(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0+\Delta y)]$$
$$-[z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)]. \qquad (2)$$

其次引进一个可以视作 x 的函数的辅助函数 $\varphi(x)$：

$$\varphi(x)=z(x,y_0+\Delta y)-x(x,y_0). \qquad (3)$$

把式(3)应用到式(1)，就可以写出

$$A=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1), \qquad (4)$$

其中已用到拉格朗日(Lagrange)中值定理。把式(3)的两边各对 x 求导数，就可得到 $\varphi'(x)=z'_x(x,y_0+\Delta y)-z'_x(x,y_0)$。若把这等式右边的差看作 x 保持不变，并应用拉格朗日中值定理，则有

$$\varphi'(x)=z''_{xy}(x,y_0+\theta'\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta'<1). \qquad (5)$$

把式(5)应用到式(4)，就可以得到

$$A = z''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta'\Delta y)\Delta x\Delta y$$
$$(0<\theta<1, 0<\theta'<1). \tag{6}$$

根据类似的道理，采用类似的步骤，由式(2)得出：

$$A = z''_{yx}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_1'\Delta y)\Delta x\Delta y$$
$$(0<\theta_1<1, 0<\theta_1'<1). \tag{7}$$

由于式(6)和式(7)相等，故有

$$z''_{xy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta'\Delta y) = z''_{yx}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_1'\Delta y). \tag{8}$$

依照题给的二阶偏导数连续的假设，求当 $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$ 时式(8)的两边的极限，就可得到 $z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0)$，从而证明了

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}. \tag{9}$$

说明一：关系式(9)是热力学理论中常常用到的重要关系式，应当熟记。麦克斯韦(Maxwell)关系就是应用式(9)求得的。

说明二：如果高阶偏导数在所考虑的点是连续的，则在这一点的偏导数的值与求导的次序无关。例如函数 $u = u(x, y, z)$ 对 x, y, z 的六个三阶偏导数

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial y}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial z},$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z\partial x}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z\partial y\partial x},$$

若在考虑的点处都是连续的，则它们应相等。

例如对于函数 $z = x^4y - 3xe^y + \dfrac{x}{y} - 1$，我们可以求得：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 4x^3 - 3e^y - \frac{1}{y^2}.$$

对于函数 $u = x^4yz - 3xze^y + \dfrac{xz}{y} - 5$，我们可以求得：

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z\partial x\partial y}$$
$$= \frac{\partial^3 u}{\partial z\partial y\partial x} = 4x^3 - 3e^y - \frac{1}{y^2}.$$

例1.4 检验下面的微分表达式是不是全微分。如果不是全微分，则先求出积分因子$\mu(x,y)$，然后再由$dF=\mu dz$求出函数$F(x,y)$的表达式：

$$dz=(2y^2-3x)dx-4xydy.$$

［**解**］ 我们把题给的微分表达式改写成

$$dz=M(x,y)dx+N(x,y)dy. \tag{1}$$

假定系数$M(x,y)$和$N(x,y)$是x和y的连续、可导、单值函数，并且在变量x,y的全部变化区域内有$N\neq 0$。如果此时

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

成立，则说dz是全微分。这就是说，全微分的条件是：

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y). \tag{2}$$

如果条件式(2)不满足，则说dz不是全微分。但是，对二独立变量的任意函数$z(x,y)$，总能找到一个积分因子$\mu(x,y)$，使得$dF=\mu dz$成为全微分，即

$$\mu dz=\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=dF. \tag{3}$$

现在我们由题给的微分表达式求出：

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(2y^2-3x)=4y, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(-4xy)=-4y, \tag{5}$$

由于$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$，故知题给的微分表达式不是全微分。

下面我们来寻求积分因子$\mu(x,y)$。如果$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$只是$x$的函数，即

$$f(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right), \tag{6}$$

则积分因子为$\mu(x,y)=\exp\left[\int f(x)dx\right]$。如果$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$只