微 积 分（下册）

Ellis Denny Gulick　章 平译　陶永德校

微 积 分

（下册）

〔美〕R·埃利斯　D·格里克　著

章　平　译　陶永德　校

江苏科学技术出版社

Robert Ellis Denny Gulick

CALCULUS

with analytic geometry

本书根据：1978 by Harcourt Brace Jovanovich, Inc. 译出

微 积 分

（下册）

〔美〕R·埃利斯 D·格里克 著

章 平 译 陶永德 校

出版、发行：江苏科学技术出版社

经 销：江苏省新华书店

印 刷：江苏新华印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 19 插页 2 字数 424,000

1990 年 10 月第 1 版 1990 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—2,000 册

ISBN 7—5345—1055—4

O·71 定价：6.75 元

责任编辑 沈绍绪

目　录

11 矢量、直线和平面

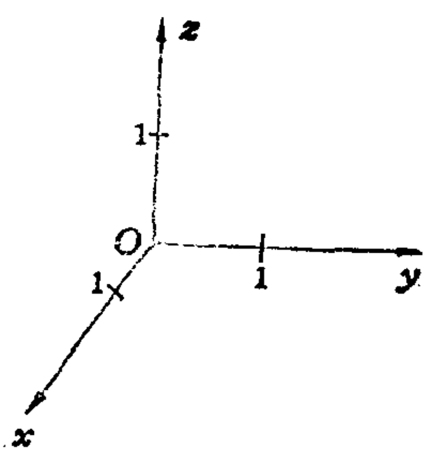
许多实际的和抽象的量只有大小，因而可以用数来描述。例如我们曾遇见过的质量、价值、利润、速率、面积、长度、体积，以及关于一轴的矩。另外有许多量既有大小又有方向。最典型的例子是速度，它不仅包括物体运动的速率，而且也包括物体运动的方向。既有大小又有方向的量在数学上用矢量来描述。在这一章中，我们将学习矢量及其应用，包括空间直线和平面的描述。

11.1 空间矢量

如同在平面上建立坐标系那样，我们首先在空间建立一个坐标系。然后应用这新的坐标系给出矢量的定义，并介绍矢量的几个基本性质。

空间笛卡尔坐标

我们先考虑三条互相垂直并且都通过点O的直线。点O称为原点(图 11.1)，这三条直线分别称为x轴、y轴和z轴。对于每一条轴，我们建立起轴上的点和实数集之间的对应关系，让原点O对应于数0。我们称此坐标系为三维空间，或简称空间。这些轴通常如图11.1所示。x轴的正向指向读者，y轴的正向指向右方，z轴的正向指向上方。



三维空间

图 11.1

在三维空间中有三个坐标平面：xy平面，它含有x轴和y轴；

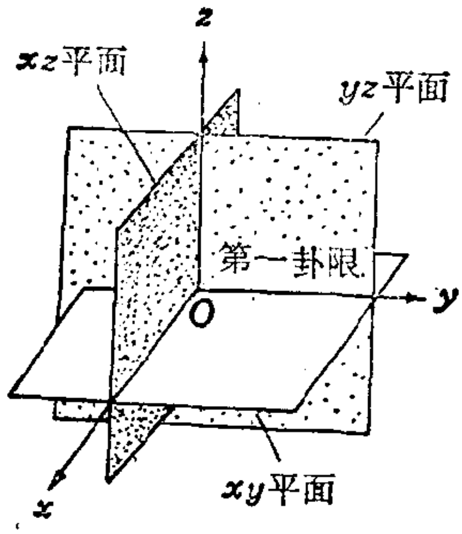


图 11.2

xz 平面，它含有 x 轴和 z 轴；以及 yz 平面，它含有 y 轴和 z 轴。因为每个平面把空间分为两部分，所以这三个坐标平面一起把空间分为八个区域，人们称每个区域为卦限(图 11.2)。含有 x 轴，y 轴以及 z 轴正向的卦限称为第一卦限。

如果 P 是空间的任意一点，则通过 P 且分别垂直于三条坐标轴的三个平面与 x 轴、y 轴以及 z 轴的交点，各自对应于数 x、y 和 z(图 11.3)。这样，我们就把有序三重数组(x，y，z)与 P 联系在一起，且称(x，y，z)为 P 的直角坐标(或笛卡尔坐标)。图 11.4 表示了空间的一些点和它们的笛卡尔坐标。

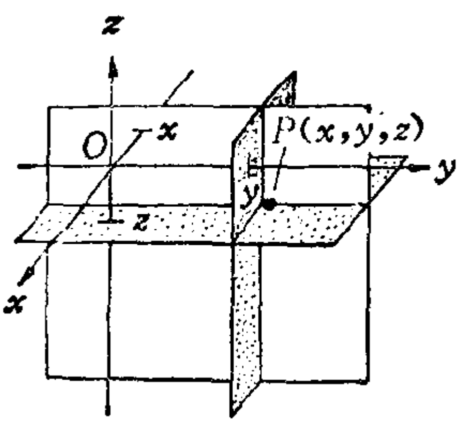


图 11.3

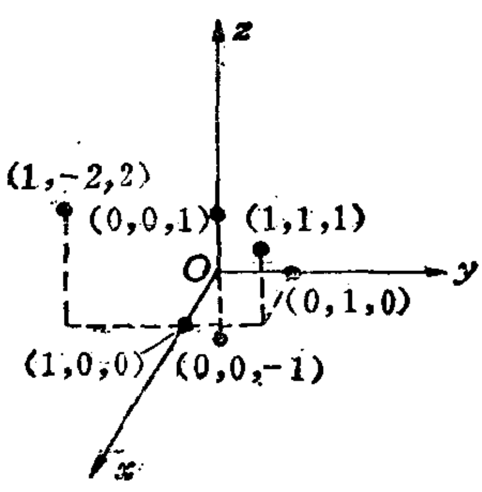


图 11.4

根据刚才所述，空间的每一个点确定一个有序三重数组，相反地，每一个有序三重数组(x，y，z)确定一个以(x，y，

z）为坐标的点。这种对应关系使我们可以用方程表示空间几何体。

如同平面上点的情况一样，表示空间两点间距离是重要的。我们连续两次应用毕达哥拉斯定理（图 11.5）可以证明：两点 $P=(x_0,y_0,z_0)$和 $Q=(x_1,y_1,z_1)$间距离$|PQ|$的公式是

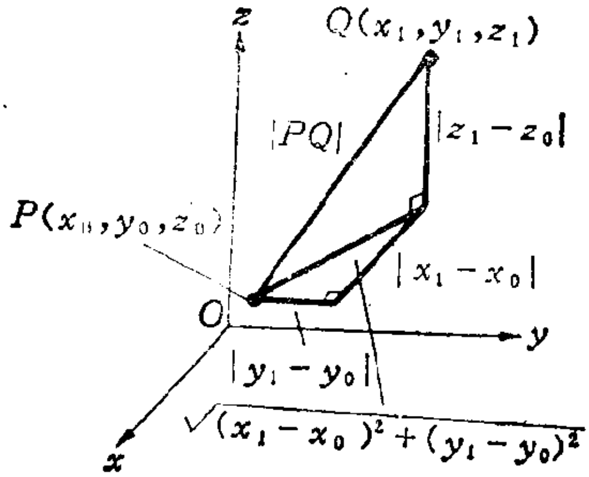


图 11.5

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2} \quad (1)$$

如果$Q=O$，则(1)式为

$$|PO|=|OP|$$
$$=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

例 1 设$P=(-1,3,6)$，$Q=(4,0,5)$，求$|PQ|$、$|PO|$及$|OQ|$。

解 计算

$$|PQ|=\sqrt{[4-(-1)]^2+(0-3)^2+(5-6)^2}$$
$$=\sqrt{35}$$
$$|PO|=\sqrt{(-1)^2+3^2+6^2}$$
$$=\sqrt{46}$$
$$|OQ|=\sqrt{4^2+0^2+5^2}$$
$$=\sqrt{41} \qquad \square$$

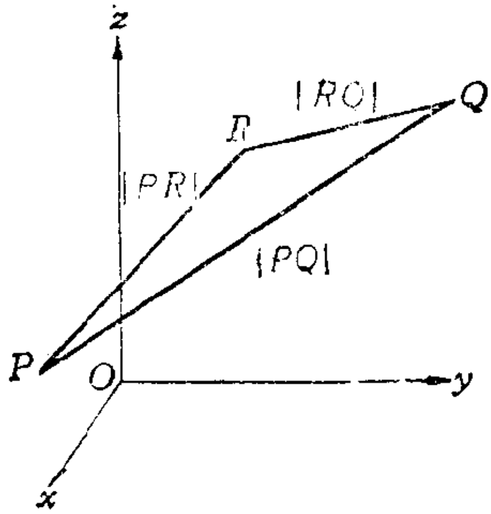
关于空间两点间距离的三个基本法则是：

当且仅当$P=Q$时，$|PQ|=0$；

$|PQ|=|QP|$；

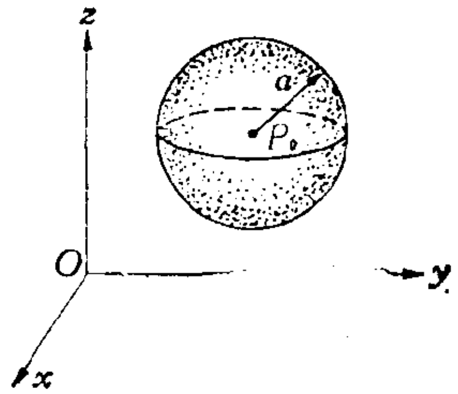
对于任意的第三点R，有$|PQ|\leqslant|PR|+|RQ|$成立。

前两个法则可直接由(1)式得出．第三个法则叫做"三角不等式"，它说明三角形的任意一边不大于其它两边之和(图11.6)．(见11.2节习题中第25题关于三角不等式的证明．)



三角不等式
$|PQ| \leqslant |PR| + |RQ|$

图 11.6



半径为 a 的球面

图 11.7

球心为 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$，半径为 a 的球面定义为使

$$|P_0P| = a$$

的点 P 的全体所成的集合(图11.7)．因比，当且仅当点 $P = (x, y, z)$ 在球面上时，有关系式

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = a$$

或者等价地有关系式

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = a^2$$

成立，这是空间的球面方程．

例 2 证明

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 4y - 6z$$

为球面方程．并求出球心和球半径．

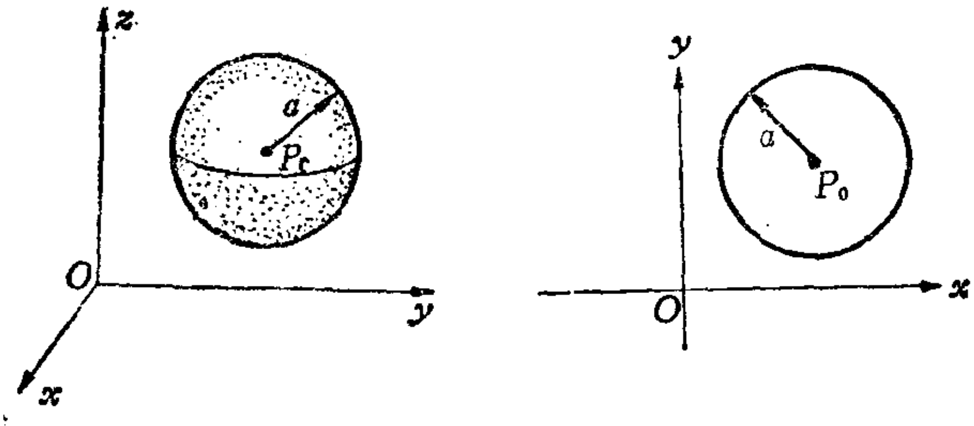
解 把方程右端各项移到方程左端，配方，得

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 6z + 9) = 1 + 4 + 9$$

或

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=14$$

这就是球心为(1,2,-3)，半径为$\sqrt{14}$的球面的方程。 □



(a) 半径为 a 的球体　　　　(b) 半径为 a 的圆域

图 11.8

球心为 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$，半径为 a 的球体是使 $|P_0P|\leqslant a$，或坐标满足关系式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\leqslant a$$

的点 $P=(x,y,z)$ 的全体所成的集合(图 11.8(a))。上式相当于

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant a^2$$

因比，若 $P_0=(1,2,-3)$，$|P_0P|\leqslant 3$，或

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2}\leqslant 3$$

则点 $P=(x,y,z)$ 在以 P_0 为球心，3 为半径的球体上。

球体是在空间中被球面所围成的立体区域。在平面上与其对应的是被圆周所围的区域，我们称这样的区域为圆域。以 $P_0=(x_0,y_0)$ 为中心，半径为 a 的圆域是满足 $|P_0P|\leqslant a$，或坐标满足关系式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\leqslant a$$

的点 $P=(x,y)$ 的全体所成的集合（图 11.8(b)）。上式等价

于

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a^2$$

矢量

直观地，一个矢量是空间的一条有向线段，通常用一个箭头标出(图 11.9)．矢量在空间运动的研究中经常出现．例如，考虑一个质点沿图 11.10 所示途径运动．若在给定时刻

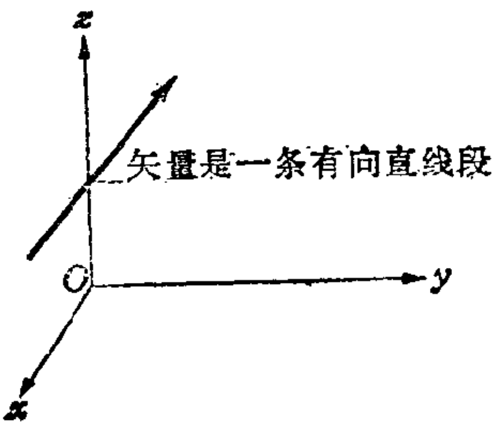


图 11.9

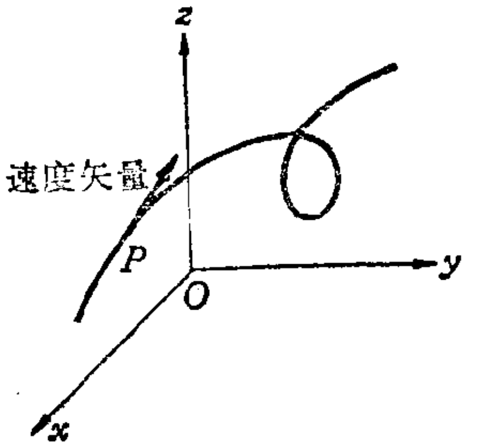


图 11.10

t 质点位于点 P 处，我们可以赋予 P 一个矢量，称作速度矢量，它指向质点运动的方向，长度等于质点运动的速率．矢量也用来描述力．描述一个力的矢量，其指向为这个力所作用的方向，长度等于这个力的大小．

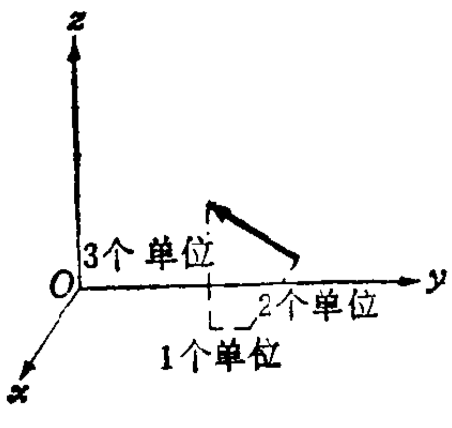


图 11.11

一种显而易见的描述矢量的方式，是简明地给出表示矢量的有向线段的起点和终点的坐标．但是，在研究速度和力的时候，经常不涉及矢量的起点和终点，仅讨论它的方向和大小．图 11.11

中所示的矢量表示在 x 轴正向有 2 个单位的变化，在 y 轴负向有 1 个单位的变化，在 z 轴正向有 3 个单位的变化。这三个数决定了所给矢量的指向和长度，因此，我们可以方便地使这个矢量等同于有序三重数组$(2,-1,3)$。更一般地，如果一条有向线段具有起点(x_0,y_0,z_0)和终点(x_1,y_1,z_1)，则相应的矢量表示在 x 轴正向有 x_1-x_0 个单位的变化，在 y 轴正向有 y_1-y_0 个单位的变化，在 z 轴正向有 z_1-z_0 个单位的变化。因此，我们可以把这三个差数组成有序三重数组$(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$，从而使所给矢量等同于这个有序三重数组。

定义 11.1 矢量是一个有序三重数组(a_1,a_2,a_3)。数 a_1，a_2 以及 a_3 称为矢量的分量。以 $P=(x_0,y_0,z_0)$为起点、以 $Q=(x_1,y_1,z_1)$为终点的有向线段所表示的矢量是$(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$，并记作 $\overrightarrow{PQ}$。

当且仅当两个矢量(a_1,a_2,a_3)和(b_1,b_2,b_3)的分量都相应相等，即

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

时，这两个矢量相等。在 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$ 的表示式中，$\overrightarrow{PQ}$与 $\overrightarrow{RS}$ 是用相同的有序三重数组描述的。

例 3 设$P=(1,3,7)$，$Q=(-1,0,6)$，$R=(0,-1,-2)$以及$S=(-2,-4,-3)$。证明 $\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{RS}$ 是两个相等的矢量。

解 应用定义 11.1 于 P，Q，R 以及 S 的分量，求得

$$\overrightarrow{PQ}=(-2,-3,-1)=\overrightarrow{RS} \qquad \square$$

尽管用以表示矢量的字母各不相同（依上下文的含意而定），但在印刷中，矢量几乎总是用黑体字表示。为了区别矢量和数，数也称为标量，一般我们用英文字母表中前几个字

母的黑体字表示矢量．如$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$以及$\boldsymbol{c}$．用其余字母表示某些特别的矢量；例如，零矢量(0,0,0)记作$\boldsymbol{O}$．因为手写黑体字很麻烦，所以常用在表示一个矢量的符号上方加箭头的形式写出矢量．于是，我们可以把$\boldsymbol{a}$写成$\vec{a}$．

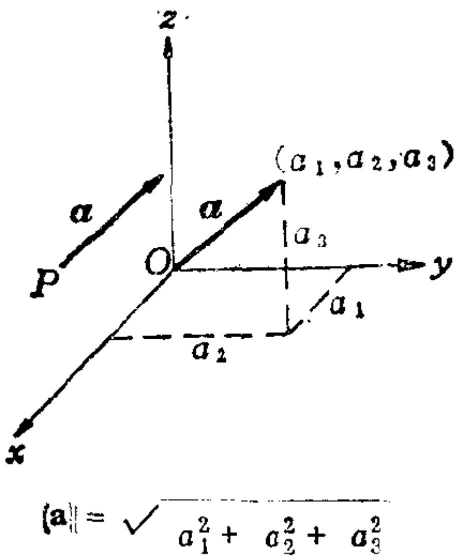


图 11.12

每一个矢量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$都能够用以任意一点$P$为起点的有向线段来表示*(图 11.12)，而空间中不同的起点给出了同一矢量的不同的表示法．假若P为原点，则矢量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$与空间的点$(a_1,a_2,a_3)$相联系，且以由原点到点$(a_1,a_2,a_3)$的有向线段来表示(图 11.12)．

确定一个矢量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$的长度的常用方法，就是确定由原点到点$(a_1,a_2,a_3)$的有向线段的长度．

定义 11.2 矢量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$的长度(或模)记作$\|\boldsymbol{a}\|$，且定义

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

单位矢量是长度为 1 的矢量．

例如，若$\boldsymbol{a}=(-1,3,6)$，则

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(-1)^2+3^2+6^2}=\sqrt{46}$$

这个数值与例 1 中所求得的点$(-1,3,6)$到原点的距离相同．一般地，矢量$\overrightarrow{PQ}$的长度$\|\overrightarrow{PQ}\|$与点P和点Q之间的距离$\|PQ\|$相同．

* 零矢量例外——译者注

有三个特殊的单位矢量，可以简单地用矢量

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$$

$$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$$

$$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$$

来描述，并进行运算（图 11.13）。由矢量长度的定义，显然有

$$\|\boldsymbol{i}\|=\|\boldsymbol{j}\|=\|\boldsymbol{k}\|=1,$$

因此，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 以及 $\boldsymbol{k}$ 确实是单位矢量.

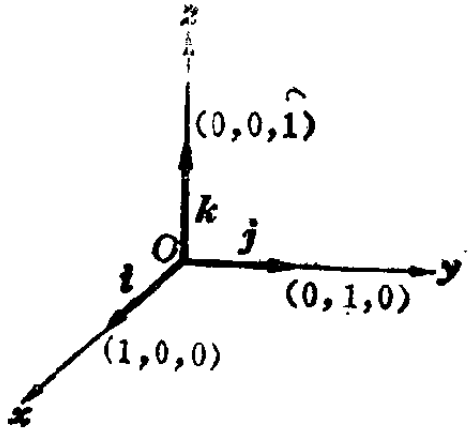


图 11.13

矢量的组合

数可以相加、相减、相乘，矢量可以用类似的方式进行组合.

定义 11.3 设矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，又设 c 为常数. 则定义两矢量的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，以及数与矢量的积 $c\boldsymbol{a}$ 为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$$

$$c\boldsymbol{a}=(ca_1,ca_2,ca_3)$$

有时我们把 $\left(\frac{1}{c}\right)\boldsymbol{a}$ 写成 $\frac{\boldsymbol{a}}{c}$. 于是，我们可以把 $\frac{1}{5}\boldsymbol{a}$ 写成 $\frac{\boldsymbol{a}}{5}$.

两类矢量的积将在第 2 节和第 3 节中给出定义. 然而，我们不定义矢量的商.

定义 11.3 所给出的运算符合许多运算法则. 例如

$$\boldsymbol{O}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}$$

$$c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b}$$

$$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{O}$$

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

例 4 设$\boldsymbol{a}=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-4,-1,0)$，求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，以及$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$

解 由定义得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(1+(-4),\ -3+(-1),\ 2+0)\\&=(-3,-4,2)\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(1-(-4),-3-(-1),2-0)\\&=(5,-2,2)\\-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}&=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)\end{aligned}\qquad\square$$

应用矢量的加法以及数和矢量的乘法，可以把任一矢量$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$表示为特殊的单位矢量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$以及$\boldsymbol{k}$的组合。事实上

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)&=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)\\&=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)\\&=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\tag{2}$$

例如，

$$(1,-3,2)=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

若$P=(x_0,y_0,z_0)$，$Q=(x_1,y_1,z_1)$，则$\overrightarrow{PQ}$可以表示为(2)的形式：

$$\overrightarrow{PQ}=(x_1-x_0)\boldsymbol{i}+(y_1-y_0)\boldsymbol{j}+(z_1-z_0)\boldsymbol{k}$$

在后面微积分的学习中，常常用(2)的形式表示矢量。因为矢量$\boldsymbol{a}$的分量是(2)式中单位矢量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$的系数，有时我们称a_1为矢量$\boldsymbol{a}$的$\boldsymbol{i}$分量，称a_2为矢量$\boldsymbol{a}$的$\boldsymbol{j}$分量，称a_3为矢量$\boldsymbol{a}$的$\boldsymbol{k}$分量。

应用(2)式的表示法，我们重述矢量长度，矢量和，矢量差，以及数与矢量的乘积的公式：

$$\|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{3}$$

$$(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$
$$=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$$

$$(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})-(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$
$$=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}$$

$$c(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=ca_1\boldsymbol{i}+ca_2\boldsymbol{j}+ca_3\boldsymbol{k}$$

由(3)式，得

$$|a_1|\leqslant\|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\|$$
$$|a_2|\leqslant\|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\|$$
$$|a_3|\leqslant\|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\|$$

概括地，我们把表示一个矢量的几种方法罗列如下：

(a_1,a_2,a_3)，一个有序三重数组；

(a_1,a_2,a_3)，空间的一个点；

以点(x_0,y_0,z_0)为起点，以点$(x_0+a_1,y_0+a_2,z_0+a_3)$为终点的有向直线段；

$a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$。

矢量运算的几何解释

我们可以赋予矢量组合许多几何的和物理的意义，从而使矢量成为科学工作者的极为有力的工具。为了能用几何来