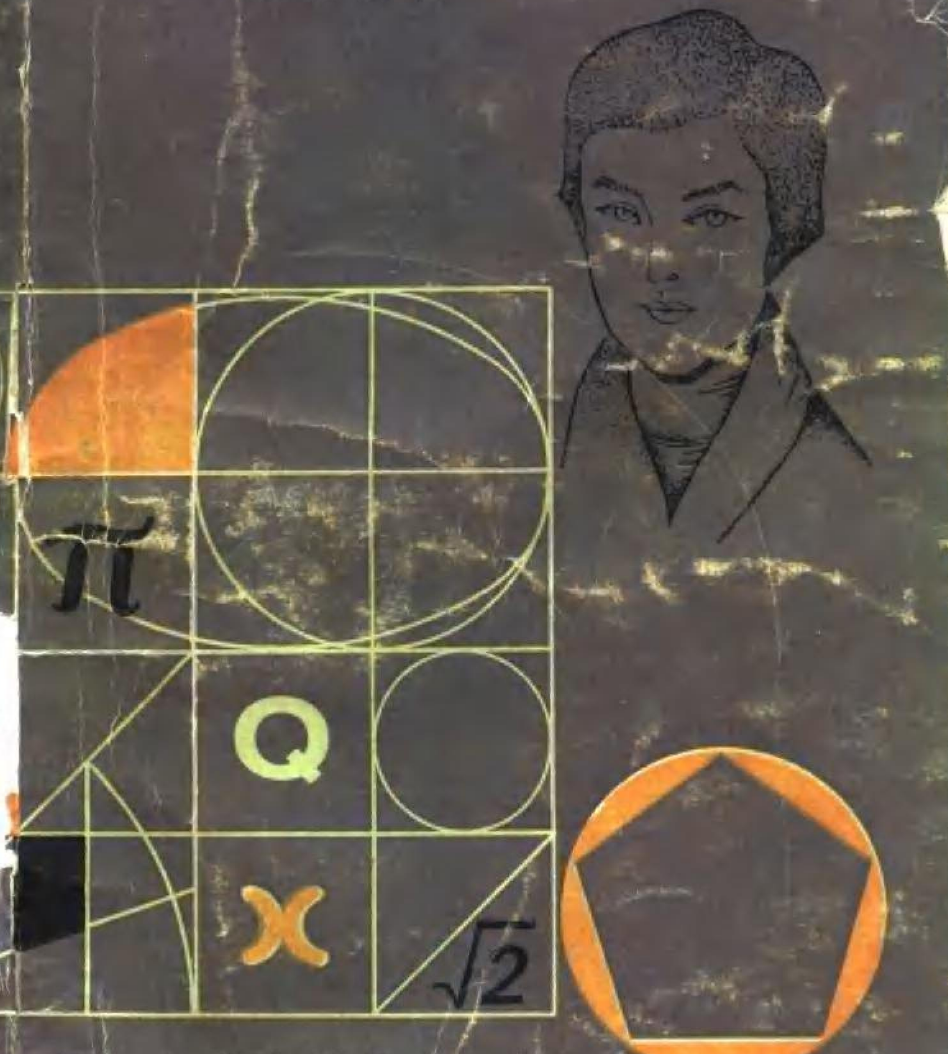
古典数学难题与伽罗瓦理论

徐诚浩著



复旦大学出版社

古典数学难题与伽罗瓦理论

徐诚浩 编著

复旦大学出版社

古典数学难题与伽罗瓦理论

复旦大学出版社出版
新华书店上海发行所发行
复旦大学印刷厂印刷
字数 117 千 开本 850×1168 1/32 印张 5.125
1986 年 8 月第一版 1986 年 8 月第一次印刷
印数：1——5000

书号：13253·031 定价：1.35 元

内 容 简 介

本书应用伽罗瓦理论清晰透彻地论述了两个古典难题的解决方法，即寻找代数方程的求根公式和限用圆规直尺作图（如三等分任意角、把立方体体积加倍、化圆为正方形以及作正多边形等），并借此由浅入深地向读者介绍了一些抽象代数的基本知识和研究方法。本书可作为理工科学生和其他数学爱好者学习抽象代数的普及读物，也可供大中学校数学教师阅读参考。

写在前面

近几年来，仍然有人宣布已成功地用圆规直尺将任意角三等分。他们把稿件投寄有关部门，但一般都得不到答复。事实上，这一问题早已被证明是不可能的。“不予审阅，妥为保存”，这已成为处理这种特殊稿件的专门方法。据说，法国科学院曾作出决议，凡是关于三等分角、倍立方、化圆为方和永动机的文章一律不予审阅。作者愿把这本小册子奉献给读者，也算是一个肤浅的答复和解释吧！书中所提到的五大难题，曾折磨了人们二千多年，致使有些了不起的数学家也曾为之冥思苦想，虚掷光阴，直到十九世纪伽罗瓦引入了置换群，创立了抽象代数学，才透彻地解决了这些难题。作者恳切希望至今仍迷恋于这些已有定论之难题的人们，不要再浪费时间和精力了。当然，有些人相信这些问题已有结论，但他们“只知其然，不知其所以然”，总希望能看到一些普及读物，以便了解这些问题是如何解决的。更进一步，近一个世纪以来，抽象代数学已成为一门重要学科，它的应用已遍及各个数学分支，甚至扩及其他科学领域。然而，不少大学生、青年教师和科技工作者却没有机会系统地学习这门学科。因此，作者希望通过对伽罗瓦理论的介绍，普及某些最基本的抽象代数学知识，让读者了解抽象代数学处理问题和解决问题的方法。

抽象代数，顾名思义是抽象的代数，而这也正是使某些人“望而却步”的原因之一。的确，抽象代数可谓是抽象概念的宝塔，逻辑推理的楷模。应该说，抽象是个好法宝，经

过抽象往往更能看清事物的本质和各个事物相互之间的联系。事实上,任何有生命力的抽象概念都有广泛的实际背景,决不是凭空臆造出来的空中楼阁。为了尽量减轻阅读难度,我们将比较自然地引入一些必要而又基本的概念,采取尽可能简单的途径证明一些结论,并力求讲得通俗易懂些,至于逻辑推理,只要习惯了,也就不难了。

本书从初等代数和初等几何中的古典难题讲起,由浅入深地介绍抽象代数、特别是伽罗瓦理论的基本知识,任何受过一定数学训练的读者都能读懂本书。

全书共分四章,在第一章中介绍有关历史,所引用的史料,由于出处不一,仅供参考。第二章介绍有关的群论知识。伽罗瓦理论的核心内容将在第三章中讨论。第四章是它的一些应用,详细地叙述了五大难题是如何解决的。

在本书的编写过程中,周仲良同志和顾海燕同志曾认真地阅读了全书,并提出了不少修改意见,作者在此对他们表示衷心的感谢。由于作者学识浅,水平低,在本书中难免有不当之处,望读者批评指正。

徐诚浩

一九八四年国庆

目　　录

第一章 历 史 概 况

§1 高次代数方程的求根公式

根据古埃及的草片文书①记载，早在公元前1700年左右，人们就发现，当 $a\neq 0$ 时，$ax=b$ 有根 $x=b/a$。随着岁月的流逝，数学发展了．到了公元前几世纪，巴比伦（现在伊拉克的一部份）人实际上已经使用过配方法得知 $ax^2+bx+c=0$（当 $a\neq 0$ 时）有根

$$x=\frac{1}{2a}\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)。$$

当时，人们只承认现在称之为正实数的根才是根。零、负数、无理数和复数的概念和理论迟至十六世纪到十八世纪才得到承认并逐步完善。根据巴比伦的泥板文书①记载，当时已解决了如下二次方程问题：求出某数 x，使其与其倒数之和等于给定数 b，即 $x+1/x=b$。得出的解答是

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1},$$

这就促使人们进一步思考，是否对于任意次数的方程都能找

① 草片是一种把木髓紧压后切成的薄片，用墨水写上象形数字就成了草片文书。下述的泥板文书则是在胶泥尚软时刻上楔形数字然后晒干得到的文书。

到这种求根公式？寻找三次方程的求根公式，经历了二千多年的漫长岁月，直到十六世纪欧洲文艺复兴时期，才由几位意大利数学家找到，这就是通常所说的卡丹(J. Cardan，1501～1576)公式。其原始的想法是：在

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

中作变量代换 $x=y-a/3$ 后化为

$$y^3+py=q, \tag{1}$$

它不再含有平方项了。设 $y=\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}$，这里 m 和 n 是两个待定的数，则有

$$y^3=m-n-3\cdot\sqrt[3]{mn}\,y=q-py。$$

如果取 m、n 满足

$$m-n=q,\quad \sqrt[3]{mn}=\frac{p}{3},$$

则对应的 y 值必满足(1)式。另一方面，由

$$(m+n)^2=(m-n)^2+4mn=q^2+\frac{4}{27}p^3,$$

可得

$$m+n=\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}.$$

所以，当取

$$m=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3},\quad n=-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$$

时，并令 $\alpha=\sqrt[3]{m}$，$\beta=\sqrt[3]{n}$，就得原三次方程的一个根

$$x_1=\alpha-\beta-a/3,$$

它的另两个根是

$$x_2=\omega\alpha-\omega^2\beta-a/3,$$

$$x_3=\omega^2\alpha-\omega\beta-a/3,$$

这里 $\omega=(-1+\sqrt{3}i)/2$,

$\omega^2=(-1-\sqrt{3}i)/2$　　(其中 $i=\sqrt{-1}$)

是 $x^3-1=0$ 的两个不是 1 的根。

关于卡丹，历史上评价不一，可谓是毁誉参半。在他晚年所著《我的生平》一书中，他对自己既有褒扬之词，但也不乏贬抑之语。卡丹既是闻名全欧的医生，又是颇为人知的数学教授。他既对数学、物理学作出过不少贡献，又精通赌博和占星术，而且还曾写过有关赌博的专著。他曾因犯有给耶稣基督算命的异端罪行而被捕入狱，然而教皇却也将他奉为座上宾，请他当占星术士。在三次方程求根公式的发明过程中，卡丹还有一段不甚光彩的轶事。这就要从四百多年前的一场数学竞赛谈起了。竞赛的内容是求解三次方程。竞赛的一方是菲俄（A.M.Fior，十六世纪前半叶），他是意大利波洛那（Bologna）数学学会会长费尔洛（S.d.Ferro，1465～1526）的学生。另一方是威尼斯的数学教授方丹诺（N. Fontana，1499？～1557）。不过他的这个真名鲜为人知，留传于后世的倒是他的绰号——塔尔塔里亚（Tartaglia），意思是“口吃者”。在他幼年时，正值意法战争。其父被法国兵杀害，他的头部和上、下颚被法国兵用马刀砍成重伤。后来，他的母亲在尸骸堆中把他找到，用舌舔其伤口，居然得救，但已得了口吃之疾。他自学拉丁文、希腊文，酷爱数学。与费尔洛一样，对求解三次方程很有研究。在 1530 年，塔尔塔里亚曾解决了另一个挑战者科拉（Colla）提出的以下两个三次方程求解问

题：$x^3+3x^2=5$，$x^3+6x^2+8x=1000$。这引起菲俄的不服，定于1535年2月22日在米兰大教堂公开竞赛，双方各出三十个三次方程。结果，塔尔塔里亚在两小时内解完，而菲俄却交了白卷。1541年，塔尔塔里亚得到了三次方程的一般解法，准备在译完欧几里得和阿基米德的著作后，自己写一本书公开他的解法。此时，卡丹出场了。他再三乞求塔尔塔里亚把解法告诉他，并发誓保守秘密。塔尔塔里亚给他一首语句晦涩的诗。这首诗写得很蹩脚，但的确把解法的每一步骤都写进去了。他本人也说："本诗有无佳句，对此我不介意。为记这一规则，此诗堪作工具。"（另一种说法是，卡丹是在塔尔塔里亚的朋友处答应保密后套出了这首诗的）卡丹在得到这一切以后，却背信弃义，于1545年把这一解法发表在《大术》这本书中，并断定塔尔塔里亚的方法就是费尔洛的方法，他是在与菲俄竞赛时得知的。这引起塔尔塔里亚的极大愤怒，并向卡丹宣战。双方各出31题，限定15天交卷。卡丹派他的学生费尔拉里(L.Ferrari,1522～1565)应战。结果，塔尔塔里亚在七天之内解出大部份题目，而费尔拉里五个月后才交卷，仅解对了一题。塔尔塔里亚本想完成一部包含他的新算法在内的巨著，可惜壮志未酬就与世长辞了！在三次方程的求解问题解决后不久，费尔拉里又得到了四次方程的求解方法。其主要思路是：对于四次方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \tag{2}$$

引入参数t，经过配方化为

$$\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}t\right)^2$$
$$=\left(\frac{1}{4}a^2-b+t\right)x^2+\left(\frac{1}{2}at-c\right)x+\left(\frac{1}{4}t^2-d\right)。\tag{3}$$

容易验证(2)与(3)式是一样的.为了保证(3)式右边是完全平方,可令它的判别式为 0:

$$\left(\frac{1}{2}at-c\right)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2-b+t\right)\left(\frac{1}{4}t^2-d\right)=0,$$

即选择 t 是三次方程

$$t^3-bt^2+(ac-4d)t-a^2d+4bd-c^2=0$$

的任一根。把这个根作为(3)中的 t 值就有

$$\left(x^2+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}t\right)^2=\left(\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+t}\ x+\sqrt{\frac{1}{4}t^2-d}\right)^2.$$

把右边移到左边并分解因式得到两个二次方程

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+t}\right)x+\frac{1}{2}t-\sqrt{\frac{1}{4}t^2-d}=0,$$

$$x^2+\left(\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b+t}\right)x+\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}t^2-d}=0.$$

这样，就把求四次方程的根化为求一个三次方程和两个二次方程的根，因此，可以认为四次方程求解问题也解决了。既然有了这个突破，数学家们就以极大兴趣和自信致力于寻找五次方程的求解方法。他们发现,对次数不超过四的方程,都能得到根的计算公式，每个根都可用原方程的系数经过加减乘除和开方运算表出。我们把这件事简称为**可用根号求解**。于是人们就断言：对五次方程来说，也一定存在这种求根公式.关于这一点，当时的一些著名数学家，如欧拉(L.Euler, 1707～1783)、范达蒙(Van der monde,1735～1796)、拉格朗日(J.L.Lagrange,1736～1813)、鲁菲尼(P.Ruffini, 1765～1822)和高斯(K.F.Gauss, 1777～1855)等都曾深信不疑,

因而都曾尽力寻找，但都以失败告终。

首先怀疑这种求根公式存在性的是拉格朗日。他透彻地分析了前人所得的次数低于五的代数方程的求解方法，发现都可作适当变量代换化为求解某些次数较低的辅助方程（它们被后人称为拉格朗日预解式），然而，对于五次方程，按这种方法得到的辅助方程的次数却升至六次，于是此路不通！1771 年，拉格朗日发表长篇论文《关于方程的代数解法的思考》提出了这个怀疑。到了 1813 年，他的弟子，意大利的内科医生鲁菲尼终于证明了拉格朗日所采用的寻找预解式的方法对于五次方程的确是失效的。早在 1801 年，高斯也意识到这个问题也许是不能解决的。可是，包括拉格朗日在内，他们都没有给出"不存在性"的证明。

第一个证明"高于四次的代数方程不能用根号求解"的是挪威青年数学家阿贝尔（N.H.Abel，1802～1829）。他是乡村牧师之子，幼年丧父，家境贫困。在中学时，他就读了拉格朗日和高斯关于方程论的著作，探讨高次方程的求解问题。1824～1826年，他写出《五次方程代数解法不可能存在》一文，但高斯等人表示不理解。阿贝尔在数学方面有很多独创性成就，在当时都未能被重视。由于贫病交迫，1829 年 4 月 6 日死于结核病，年仅 27 岁。在他逝世前不久，曾把一些研究结果告诉了拉让得（A.M.Legendre，1752～1833）。就在他离开人间的第三天，柏林大学给他寄来了教授聘书。

不过，鲁菲尼和阿贝尔的证明毕竟是不很清楚的，甚至还有一些漏洞。阿贝尔并没有给出一个准则用来判定一个具体数字系数的高次代数方程能否用根号求解。作为历史，他们的功绩不容抹煞，但是，若与不久以后出现的伽罗瓦的辉煌成就相比，就大为逊色了！

伽罗瓦（E.Galois，1811～1832）是法国青年数学家．他是巴黎附近一个小镇镇长的儿子，15岁进入巴黎的一个有名的公立中学学习，偏爱数学。后来想进多科工艺学校（即工科大学），可能是由于口试失误或者主考教授不理解他的思想，竟两次落榜，只得进了一所低等的预备学校．此时，他专攻五次方程代数解法。第一年就写了四篇文章。1828年，十七岁的伽罗瓦写出《关于五次方程的代数解法问题》等两篇论文送交法国科学院，但被柯西（A.Cauchy，1789～1875）遗失了。后来，他又把另一篇文章送给傅利叶（J.Fourier，1768～1830）．不久，傅利叶去世，也就不了了之。1831年，伽罗瓦完成了《关于用根式解方程的可解性条件》一文，院士泊松（S.D.Poisson，1781～1840）的审查意见却是“完全不能理解”，予以退回。1830年法国七月革命时，他因批评学校的学监不支持革命而被开除，又因政治罪两次被送进监狱。1832年4月出狱住医院治病．出院当天，在路上遇到两个不速之客，相约于第二天决斗，结果他因受重伤于5月31日离世，时年不满21岁．在决斗前夜，他深知为女友决斗而死毫无意义，但又不甘示弱．当晚，他精神高度紧张和不安，连呼“我没有时间了！”匆忙之中，他把他的关于方程论的发现草草写成几页说明寄给他的朋友，并附有如下一段话：“你可以公开地请求雅科比（C.Jacobi）或者高斯，不是对于这些定理的真实性而是对于其重要性表示意见．将来我希望有一些人会发现把这堆东西注释出来对他们是有益的．”到了14年以后的1846年，柳维尔（J.Liouville，1809～1882）在由他创办的《纯粹数学和应用数学杂志》上发表了伽罗瓦的部份文章。关于伽罗瓦理论的头一个全面而清楚的介绍是在若唐（C.Jordan，1838～1922）于1870年出版的《置换和代数方程专论》一书中给出

的。这样，伽罗瓦超越时代的天才思想才逐渐人所被弖理解和承认，至今已成为一门蓬勃发展的学科—抽象代数学。伽罗瓦避开了拉格朗日的难以捉摸的预解式而巧妙地应用置换群这一工具，他不但证明了如下的一般代数方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

当 $n\geqslant5$ 时不可能用根号求解（这里系数 a_i 可取任何复数），而且还建立了具体数字系数的代数方程可用根号求解的判别准则，并举出不能用根号求解的数字系数代数方程的实例。这样，他就透彻地解决了这个在长达二百多年的时间中使不少数学家伤透脑筋的问题。不仅如此，伽罗瓦所发现的结果，他的奇特思想和巧妙方法，现已成为全部代数的中心内容。在这一点上说，他作为抽象代数的创始人之一是当之无愧的。他的贡献决不限于解决代数方程根号求解的问题。

§2 圆规直尺作图

在历史上，限用圆规直尺的古希腊四大几何作图难题，一直引起无数数学家和数学爱好者的浓厚兴趣。这里所说的直尺是没有刻度的，并且要求作图必须在有限步完成。为什么非要限用圆规直尺作图呢？希腊人认为，直线和圆弧是构成一切平面几何图形的基本图形，而直尺和圆规则是直线和圆弧的具体化。他们甚至认为只有使用圆规直尺作图才能确保其严密性。到了公元前三世纪的欧几里得时期，创立了以五条公设为基础的欧氏几何，就更加严格限用圆规直尺作图了。现在我们把这四个难题逐一介绍一下。我们约定：凡说到"可

作”，总指限用圆规直尺能在有限步内作出。

(一)**将任意角三等分**．这等价于将任意一段圆弧三等分。中学生学会了用圆规直尺把任意角二等分。那末，自然要问：能否将任意角三等分呢？在历史上的确有过一些三等分角的作图法。早在公元前五世纪，希腊人喜皮亚斯(Hippias，生于公元前 425 年左右）特地为此发明了一种割圆曲线，用它可把任意角三等分．割圆曲线的作法如下：在平面上作 AB

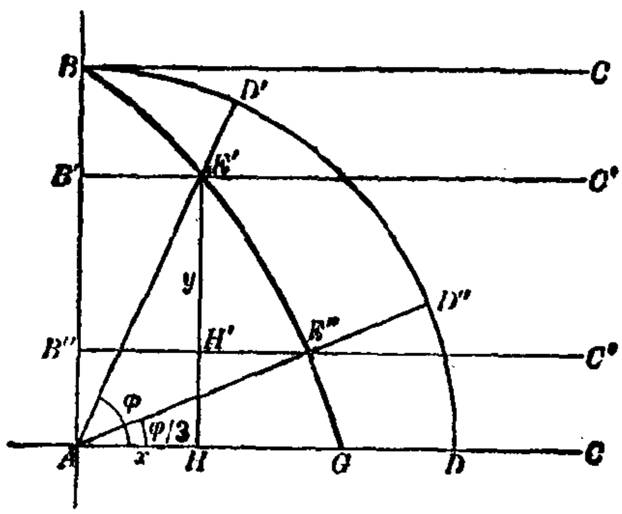


图1

垂直于 AD，且 $|AB|=|AD|$．作 BC 平行于 AD。将 AB 绕 A 点顺时针匀速转到 AD。同时，将 BC 匀速平行下移与 AD 重合．设 AB 转到 AD' 时，BC 移到 $B'C'$。AD' 与 $B'C'$ 交于 E'，则这个 E' 就是割圆曲线上的一般点．如果割圆曲线已经作出，那就可把任意角三等分了．不妨设 $\angle E'AD=\varphi$。作 $E'H$ 垂直于 AD，在 AD 上的垂足是 H。把线段 $E'H$ 三等分(这容易用圆规直尺作出，见第137页)，使 $|H'H|=|E'H|/3$，过 H' 作 $B''C''$ 平行于 AD，交割圆曲线于 E''，注意到割圆曲线是按照两个“匀速”的要求作出的，所以必有

$$\frac{\angle E''AD}{90^\circ}=\frac{|H'H|}{|AB|}=\frac{1}{3}\ \frac{|E'H|}{|AB|}=\frac{1}{3}\ \frac{\angle E'AD}{90^\circ}.$$

于是 $\angle E''AD=\angle E'AD/3=\varphi/3$。可惜的是这种割圆曲线是决不可能只用圆规直尺在有限步内作出的.

到了公元前三世纪，希腊数学大师阿基米德（Archimedes，公元前287-212）曾给出一个非常简单的方法：任给$\angle AOB=\varphi$，设 F 和 F' 是某直尺的两个端点. 用有色笔在此直尺

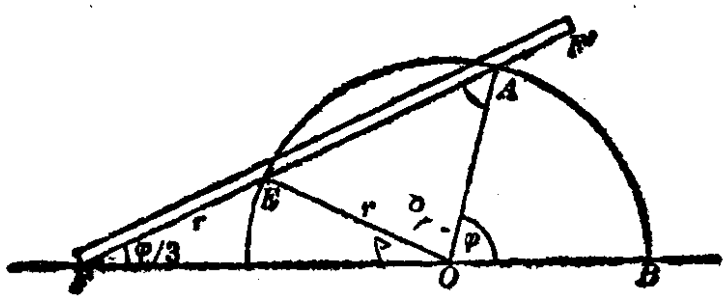


图 2

上任意画上一个点 E。以O为圆心，以 $|EF|=r$ 为半径作半圆，交角 φ 的两边于 A 和 B。现在这样来放置直尺，让 E 在圆周上滑动，F 在 OB 的延长线上滑动，恰使此尺过 A 点，则有

$$\begin{aligned}\varphi=\angle AOB&=\angle AFO+\angle OAE\\&=\angle AFO+\angle OEA=2\angle AFO+\angle EOF\\&=3\angle AFO,\end{aligned}$$

所以 $\angle AFO=\varphi/3$。可惜，在直尺上画上点 E 不符合规尺作图的规定。稍为放松一"点"要求，三等分任意角就可作了！类似这种不易觉察的"想当然"式的漏洞，三等分角者经常会不自觉地产生。当然，阿基米德知道这是犯规的，但苦于无法否定它的可作性。在本书中我们将要证明，的确存在不可以三等分的角，例如 60°。另一方面，只要 n 不能被3整除，角 $\alpha=\pi/n$ 必可三等分。在一百多年前，这个问题已有定论：三等分任意角不可作。企图用圆规直尺把任意角三等分，就